MQ EXAM 2020

x^{t} tensoriel et intrication.

1. dim $= 2 \times 2 = 4$
2. Base $\{|g\rangle|g\rangle, |g\rangle|e\rangle, |e\rangle|g\rangle, |e\rangle|e\rangle\}$

   qu'on peut réécrire : $\{|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle\}$
3. $\nexists$ interaction $|gg\rangle \to 0$ $\quad |ge\rangle$ et $|eg\rangle \to \epsilon_e \quad |ee\rangle \to 2\epsilon_e$

ds la base $\{|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle\}$:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\epsilon_e \end{pmatrix}$$

4. $V_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad V = V_0 \left(|ge\rangle\langle eg| + |eg\rangle\langle ge| \right)$

$$\hookrightarrow \quad H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_e & V_0 & 0 \\ 0 & V_0 & \epsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\epsilon_e \end{pmatrix}$$

6. $\vec{v}p$: triviaux $|gg\rangle$ associé à $\epsilon = 0$

   $|ee\rangle$ ——— $\epsilon = 2\epsilon_e$

   et $\dfrac{|ge\rangle \pm |eg\rangle}{\sqrt{2}}$ ass à $\epsilon_e \pm V_0$

   ces 2 derniers sont intriqués (pas séparables)

OH

1. $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \quad n \geq 0$

2. $\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$

$\hookrightarrow \varphi_0''(x) = (\quad)^{1/4}\left[-\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}\right]e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$

on forme $-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_0''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \times \varphi_0(x)$

$= -\frac{\hbar^2}{2m}(\quad)^{1/4}\left[-\frac{m\omega}{\hbar} + \cancel{\frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}}\right]e^{-} + \cancel{\frac{1}{2}m\omega^2x^2}(\quad)^{1/4}e^{-}$

$= (\quad)^{1/4}\frac{\hbar\omega}{2}e^{-} = \frac{\hbar\omega}{2} \times \varphi_0(x)$ OK.

3. $|1\rangle = a^+|0\rangle \Rightarrow \langle x|1\rangle = \langle x|a^+|0\rangle$

soit $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x)$

d'où $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\quad)^{1/4}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{m\omega}{\hbar}x\right)e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$

$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\quad)^{1/4}\, 2x\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$

$= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}(\quad)^{1/4}\, x\, e^{-}$ OK

4. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(|0\rangle + \varepsilon|1\rangle)$ $\quad |0\rangle$ et $|1\rangle$ vp de H pour $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ et $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

$\hookrightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\left(e^{-i\frac{\omega t}{2}}|0\rangle + \varepsilon e^{-i\frac{3\omega t}{2}}|1\rangle\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\left(|0\rangle + \varepsilon e^{-i\omega t}|1\rangle\right) \times \underbrace{e^{-\frac{i\omega t}{2}}}_{\text{qu'on peut oublier}}$

$\hookrightarrow \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\left(\varphi_0(x) + \varepsilon e^{-i\omega t}\varphi_1(x)\right)$

5) $|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left[|\varphi_0(x)|^2 + \varepsilon^2|\varphi_1(x)|^2 + 2\varepsilon|\varphi_0||\varphi_1|\cos\omega t\right]$

soit $\rho(x,t) \simeq |\psi_0(x)|^2 + 2\varepsilon\, \psi_0(x)\psi_1(x) \cos\omega t$ au 1^er ordre en ε

5. $$\rho(x,t) \simeq \left(1 + 2\varepsilon x \cos\omega t\right) (\ )^{1/2} e^{-\frac{m\omega^2 x^2}{\hbar}}$$

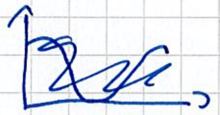
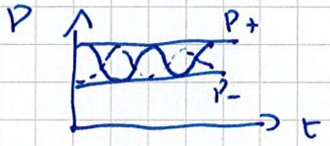
6. il faut regarder $(1+2\varepsilon x \cos\omega t)$

- $t=0$ $(1+2\varepsilon x) \to$ + probable ds $x>0$

- oui quand $\cos\omega t$ chge de signe $\left(t = \frac{\pi}{\omega}\right)$
- oui quand $\cos\omega t = 0$

- $P_+ = \int_0^{+\infty} \rho(x,t)\,dx \qquad P_- = \int_{-\infty}^{0} \rho(x,t)\,dx$

$P_+(t)$ et $P_-(t)$ en opposition de phase.

7. $\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle$ avec $|\psi\rangle = |0\rangle + \varepsilon e^{-i\omega t} |1\rangle$

$$\to \langle x \rangle = \left(\langle 0| + \varepsilon e^{i\omega t}\langle 1|\right) x \left(|0\rangle + \varepsilon e^{-i\omega t}|1\rangle\right)$$

avec $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^+)$ et $a|0\rangle = 0 \quad a^+|0\rangle = |1\rangle$

$a|1\rangle = |0\rangle \quad a^+|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$

$$\to \langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\varepsilon e^{i\omega t}\langle 1|x|0\rangle + \varepsilon e^{-i\omega t}\langle 0|x|1\rangle\right)$$

(tous les autres termes = 0)

d'où $\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\varepsilon e^{i\omega t} + \varepsilon e^{-i\omega t}\right)$

$$\langle x \rangle(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \times 2\varepsilon \cos\omega t$$

$$\langle p\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle \quad \text{avec } p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^+ - a)$$

$$\rightarrow \langle p\rangle = \left(\langle 0| + \varepsilon e^{i\omega t}\langle 1|\right) i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(a^+ - a)\left(|0\rangle + \varepsilon e^{-i\omega t}|1\rangle\right)$$

$$= i\varepsilon\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

$$\langle p\rangle(t) = 2\varepsilon\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\sin\omega t$$

On retrouve le "mvt oscillant" d'une particule classique

$x(t) = x_0\cos\omega t$ et $\dot{x} = -\omega x_0\sin\omega t$ (cf Cheveufort)

8. $$\langle x^2\rangle = \left(\langle 0| + \varepsilon e^{i\omega t}\langle 1|\right)\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^2 + a^{+2} + aa^+ + a^+a\right)\right)\left(|0\rangle + \varepsilon e^{-i\omega t}|1\rangle\right)$$

$$a^+a|0\rangle = 0 \qquad a^+a|1\rangle = |1\rangle \qquad aa^+|0\rangle = |1\rangle$$

$$aa^+|1\rangle = 2|1\rangle$$

$$\rightarrow \langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(1 + 3\varepsilon^2\right)$$

de m̂ $$\langle p^2\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}\left(1 + 3\varepsilon^2\right)$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(1 + 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon^2\cos^2\omega t\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(1 + 4\varepsilon^2 - \varepsilon^2 - 4\varepsilon^2\cos^2\omega t\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(1 - \varepsilon^2 + 4\varepsilon^2(1 - \cos^2\omega t)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(1 - \varepsilon^2 + 4\varepsilon^2\sin^2\omega t\right) \ldots$$

de m̂ $$(\Delta p)^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}\left(1 - \varepsilon^2 + 4\varepsilon^2\cos^2\omega t\right)$$

$$(\Delta x\,\Delta p)^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\left(1 - \varepsilon^2 + 4\varepsilon^2\sin^2\omega t\right)\left(1 - \varepsilon^2 + 4\varepsilon^2\cos^2\omega t\right) \ldots$$

9) $H_2 = H_1(x) + H_1(y)$

$$E_{n_1 n_2} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$= (n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega$$

$\rightarrow$ 1 seul nbre quantique $E_N = (N+1)\hbar\omega$

10) d'après (9) : E_N est dég. en g^{al}.

Fond. $N = 0$: obtenu pour le couple unique $n_1 = n_2 = 0$

$E_0 = \hbar\omega$ pas dég.

1er excité $N = 1$: obtenu pour $n_1 = 1$ et $n_2 = 0$ ou $n_1 = 0$ et $n_2 = 1$

$E_1 = 2\hbar\omega$ dég 2×.

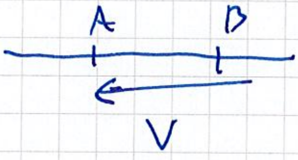
11. $N = 0$: φ_0 (ou φ_{00}) $(x, y) = \varphi_0(x)\,\varphi_0(y) = \cdots$

$N = 1$: $\varphi_1^{(1)}(x, y) = \varphi_0(x)\,\varphi_1(y) = \cdots$

et $\varphi_1^{(2)}(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_0(y) = \cdots$

Effet Josephson

Partie A

1. 

$V > 0 \Rightarrow i$ de A vers B

$\Rightarrow \vec{v}$ de B vers A

2. $i = 0$

3. effet tunnel.

4. $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + U(x)\, \psi(x) = E\, \psi(x)$

5. ~~ψ_{III}~~ zone III : $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + U_B \psi = E \psi$

$$\hookrightarrow \quad \psi'' + \frac{2m(E - U_B)}{\hbar^2} \psi = 0$$

on pose $k_B = \sqrt{\frac{2m(E-U_B)}{\hbar^2}}$

sol^{n} : $\psi_{III}(x) = e^{-ik_B x} + r\, e^{ik_B x}$

onde incidente (amplitude arbitrairement choisie à 1)

onde réfléchie en $x = a$

zone I : $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + U_A \psi = E \psi$

$$\hookrightarrow \quad \psi'' + \frac{2m(E - U_A)}{\hbar^2} \psi = 0$$

on pose $k_A = \sqrt{\frac{2m(E-U_A)}{\hbar^2}}$

sol^{n} : $\psi_I(x) = t\, e^{-ik_A x} + \cancel{(\;)\, e^{ik_A x}}$

onde transmise vers les $x < 0$

onde incidente depuis $x = -\infty$ ($\nexists$)

6. Dans la zone II :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + U_0 \Psi = E\Psi$$

$$\Rightarrow \Psi'' + \underbrace{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}_{<0}\Psi = 0$$

on pose $\alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$ $\quad \Psi'' - \alpha^2\Psi = 0$

↳ sol^n $\Psi_{II}(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$

"onde evanescente".

Continuités de Ψ et Ψ' en $x=0$:

$$\begin{cases} t = A + B \\ -ik_A t = \alpha(A-B) \end{cases}$$

$$↳ \begin{cases} A = \frac{t}{2}\left(1 - i\frac{k_A}{\alpha}\right) \\ B = \frac{t}{2}\left(1 + \frac{ik_A}{\alpha}\right) \end{cases}$$

7. $$J = \frac{\hbar}{2im}\left(\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\right)$$

zone III : $\Psi \equiv \Psi_{III} = t e^{-ik_A x}$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -ik_A t e^{-ik_A x}$$

$$↳ J = \frac{\hbar}{2im}\left(t^* e^{ik_A x} \times (-ik_A t e^{-ik_A x}) - t e^{-ik_A x} \times i k_A t^* e^{ik_A x}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im} \times -2ik_A|t|^2$$

$$J = -|t|^2\frac{\hbar k_A}{m} < 0$$ OK

"propagation de B vers A"

$\longleftarrow$

Partie B

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \Psi_A}{\partial t} = \dfrac{qV}{2}\Psi_A - K\Psi_B & \Psi_A = \sqrt{\rho_A}\, e^{i\theta_A} \\ i\hbar \dfrac{\partial \Psi_B}{\partial t} = -\dfrac{qV}{2}\Psi_B - K\Psi_A & \Psi_B = \sqrt{\rho_B}\, e^{i\theta_B} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} i\hbar\left[\sqrt{\rho_A}\, i\dot\theta_A e^{i\theta_A} + \dfrac{\dot\rho_A}{2\sqrt{\rho_A}} e^{i\theta_A}\right] = \dfrac{qV}{2}\sqrt{\rho_A}\, e^{i\theta_A} - K\sqrt{\rho_B}\, e^{i\theta_B} \\ i\hbar\left[\sqrt{\rho_B}\, i\dot\theta_B e^{i\theta_B} + \dfrac{\dot\rho_B}{2\sqrt{\rho_B}} e^{i\theta_B}\right] = -\dfrac{qV}{2}\sqrt{\rho_B}\, e^{i\theta_B} - K\sqrt{\rho_A}\, e^{i\theta_A} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} i\hbar\left[\sqrt{\rho_A}\, i\dot\theta_A + \dfrac{\dot\rho_A}{2\sqrt{\rho_A}}\right] = \dfrac{qV}{2}\sqrt{\rho_A} - K\sqrt{\rho_B}\, e^{i\varphi} \\ i\hbar\left[\sqrt{\rho_B}\, i\dot\theta_B + \dfrac{\dot\rho_B}{2\sqrt{\rho_B}}\right] = -\dfrac{qV}{2}\sqrt{\rho_B} - K\sqrt{\rho_A}\, e^{-i\varphi} \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} -\hbar\sqrt{\rho_A}\,\dot\theta_A + i\hbar\dfrac{\dot\rho_A}{2\sqrt{\rho_A}} = \dfrac{qV}{2}\sqrt{\rho_A} - K\sqrt{\rho_B}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ -\hbar\sqrt{\rho_B}\,\dot\theta_B + i\hbar\dfrac{\dot\rho_B}{2\sqrt{\rho_B}} = -\dfrac{qV}{2}\sqrt{\rho_B} - K\sqrt{\rho_A}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) \end{cases}$$

Re et Im:

$$\begin{cases} -\hbar\sqrt{\rho_A}\,\dot\theta_A = \dfrac{qV}{2}\sqrt{\rho_A} - K\sqrt{\rho_B}\cos\varphi & (1) \\ \hbar\dfrac{\dot\rho_A}{2\sqrt{\rho_A}} = -K\sqrt{\rho_B}\sin\varphi \Rightarrow \dot\rho_A = -\dfrac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_A\rho_B}\sin\varphi & (2) \\ -\hbar\sqrt{\rho_B}\,\dot\theta_B = -\dfrac{qV}{2}\sqrt{\rho_B} - K\sqrt{\rho_A}\cos\varphi & (3) \\ \hbar\dfrac{\dot\rho_B}{2\sqrt{\rho_B}} = K\sqrt{\rho_A}\sin\varphi \Rightarrow \dot\rho_B = \dfrac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_A\rho_B}\sin\varphi & (4) \end{cases}$$

2.) (2) et (4) $\Rightarrow$ $\dot\rho_A + \dot\rho_B = 0$ $\quad \rho_A + \rho_B = \text{cte}$

conservation nbre porteurs de charge.

3. $J = q\dot{\rho}_A = -q\dot{\rho}_B$

$\leadsto J = -\frac{2Kq}{\hbar}\sqrt{\rho_A\rho_B}\,\sin\varphi$

$J_0 = -\frac{2Kq}{\hbar}\sqrt{\rho_A\rho_B}$ (<0 c̄ eq (A))

4. éq^{ns} (1) et (3) avec $\rho_A \simeq \rho_B$:

$$\begin{cases} -\hbar\dot{\theta}_A \simeq \frac{qV}{2} - K\cos\varphi \\ -\hbar\dot{\theta}_B \simeq -\frac{qV}{2} - K\cos\varphi \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} \hbar\dot{\theta}_A = -\frac{qV}{2} + K\cos\varphi \\ \hbar\dot{\theta}_B = \frac{qV}{2} + K\cos\varphi \end{cases}$$

$\leadsto \hbar(\dot{\theta}_B - \dot{\theta}_A) = \hbar\dot{\varphi} = qV$

$$\dot{\varphi} = \frac{qV}{\hbar}$$

si $V = $ cte (ddp cste aux bornes de la jonction)

$$\varphi = \frac{qV}{\hbar}t + \varphi_0$$

5. $\underline{V=0}$: $\rightarrow \varphi = \varphi_0$

φ prend tte valeur possible entre 0 et 2π

avec $J = J_0\sin\varphi \Rightarrow J$ prend tte valeur entre $-J_0$ et J_0

6. $\underline{V\neq 0}$ $J = J_0\sin\varphi$ avec $\varphi = \frac{qVt}{\hbar} + \varphi_0$

$J = J_0\sin\left(\frac{qV}{\hbar}t + \varphi_0\right)$ $\boxed{\omega = \frac{qV}{\hbar}}$

7) ici $q = -2e$

- Mesure tension → pulsation
  → rapport $\frac{e}{\hbar}$

- étalon de fréquence (ou de temps) peut être converti en étalon de tension !

- AN $\omega = \frac{qV}{\hbar}$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2eV}{h}$$

AN $f \sim \frac{2 \times 1.6\, 10^{-19} \times 10^{-6}}{6.6\, 10^{-34}} \simeq 5\, 10^{8}\ \text{Hz}$ (0.2 GHz)