Université Paris Saclay **MDD 102**
L1S1 **Algèbre**

Feuille d'exercices 2

Ensembles et applications

Exercice 2.1. Ensembles et tautologies
Soit X un ensemble et A, B deux sous-ensembles de X. Montrer que $A \subset B$ ssi $B^c \subset A^c$. Faire un dessin.

Exercice 2.2. Soient A et B deux ensembles.
1. Montrer que l'énoncé $A \subset B$ est équivalent à chacun des énoncés suivants :
$A \cup B = B$
$A \cap B = A$
$A \setminus B = \emptyset$
2. Montrer que $A = B$ ssi $A \Delta B = \emptyset$.

Exercice 2.3. Ensembles et tautologies
Soit X un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de X. En s'inspirant des tautologies du chapitre 1, écrire différemment les ensembles suivants. Faire des dessins.
1. $(A \cup B)^c$
2. $(A \cap B)^c$
3. $A \cap (B \cup C)$
4. $A \cup (B \cap C)$

Exercice 2.4. Ensemble des parties
Donner la liste des éléments des ensembles suivants :
$\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Exercice 2.5. Paire et couple
Soient deux objets a et b. On veut justifier qu'on peut définir le couple (a, b) comme l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$: montrer que si $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, alors $a = a'$ et $b = b'$ (indication : traiter à part le cas où $a = b$ et le cas où $a \neq b$).

Exercice 2.6. Injection, surjection, bijection
Soient X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.
1. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.
3. On suppose que f et g sont bijectives. Montrer que $g \circ f$ est bijective. Exprimer l'application réciproque $(g \circ f)^{-1}$ en fonction de f^{-1} et de g^{-1}.

Exercice 2.7. Image directe, image réciproque
Soit une application $f : X \to Y$.

1. Soit A un sous-ensemble de X. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Soit B un sous-ensemble de Y. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Un exemple : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(f([0,2]))$ et $f(f^{-1}([-1,1]))$.

Exercice 2.8. Image réciproque
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \sin(x)$. Détermier $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 2.9. Bijection
1. Soient a et b deux réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = ax+b$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit bijective. Donner dans ce cas l'application réciproque f^{-1}.
2. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x$. En fonction des valeurs de y, déterminer le cardinal de $f^{-1}(\{y\})$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.10. Fonction indicatrice
Soit X un ensemble, et A un sous-ensemble de X. La fonction indicatrice de A, notée $\mathbf{1}_A$, est l'application

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{1}_A & : & X & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

1. Soient A et B deux sous-ensembles de X. Exprimer les fonctions indicatrices de A^c, de $A \cap B$ et de $A \cup B$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et de $\mathbf{1}_B$.
2. Soient F l'ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$. Soit l'application

$$\begin{array}{rcccl} I & : & \mathcal{P}(X) & \to & F \\ & & A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$$

Montrer que I est une bijection, et déterminer l'application réciproque $I^{-1} : F \to \mathcal{P}(X)$.
3. On suppose maintenant que X est un ensemble fini, de cardinal n. Déduire de ce qui précède que

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^n$$

Exercice 2.11. Ensemble des parties
Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$.
1. On suppose ici que X est fini. En utilisant l'exercice 2.10, montrer qu'il n'existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$.
2. On traite maintenant le cas général, c'est-à-dire que X peut être fini ou infini. On suppose par l'absurde qu'il existe une surjection $f : X \to \mathcal{P}(X)$.
a. Soit $A = \{x \in X ; x \notin f(x)\}$. Justifier qu'il existe $c \in X$ tel que $f(c) = A$.
b. Étudier si $c \in A$ et conclure.
3. Une conséquence : peut-on trouver une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui énumère tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$?

Exercice 2.12. Cardinal d'une réunion

Tous les ensembles considérés dans cet exercice sont supposés finis.

1. Rappeler la formule donnant le cardinal de $A \cup B$ en fonction des cardinaux de A, B et $A \cap B$.

2. En utilisant la formule précédente, exprimer le cardinal de $A \cup B \cup C$ en fonction des cardinaux de A, B, C et de leurs différentes intersections.

3. Pour tout $n \geq 2$, conjecturer, et éventuellement démontrer, une formule qui exprime le cardinal de $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ en fonction des cardinaux de $A_1, \ldots, A_n$ et de leurs différentes intersections.

Exercice 2.13. Nombre d'injection entre deux ensembles finis

Soit X un ensemble fini à p éléments et Y un ensemble fini à n éléments, et $I(X,Y)$ l'ensemble des injections de X dans Y. Le but de cet exercice est de trouver le cardinal de $I(X,Y)$ en fonction de p et de n.

1. Quel est le cardinal de $I(X,Y)$ quand $n < p$?

2. On suppose que $p = 0$. Justifier que $\mathrm{card}(I(X,Y)) = 1$.

3. On va montrer que $\mathrm{card}(I) = \frac{n!}{(n-p)!}$ par récurrence sur p.

On suppose que $\mathrm{card}(X) = p+1$, on fixe un élément x_0 dans X et on pose $X' = X \setminus \{x_0\}$. Dénotons par $y_1, \ldots, y_n$ les n éléments de Y, et posons, pour tout i entre 1 et n :

$$A_i = \{f \in I(X,Y); f(x_0) = y_i\}$$

a. Montrer que les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints et que $I(X,Y) = A_1 \cup \ldots \cup A_n$.

b. Montrer que pour tout i entre 1 et n, l'application

$$\begin{array}{ccc} A_i & \to & I(X', Y \setminus \{y_i\}) \\ f & \mapsto & f_{|X'} \end{array}$$

est bien définie et est une bijection.

c. Conclure la démonstration du résultat voulu.

4. Un cas particulier. Soit X un ensemble fini de cardinal n. On appelle permutation de X une bijection de X dans X. Combien y a-t-il de permutations de X ? (on rappelle que $0! = 1$)

Exercice 2.14. Sous-ensembles à p éléments

Soient des entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$, et Y un ensemble de cardinal n. Le but de cet exercice est de compter les sous-ensembles de Y avec exactement p éléments, on note $Z = \{Y' \in \mathcal{P}(Y); \mathrm{card}(Y') = p\}$. On note $X = \{1, \ldots, p\}$, et, comme dans l'exercice 2.13, $I(X,Y)$ l'ensemble des injections de X dans Y. On rappelle que $\mathrm{card}(I(X,Y)) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccccc} G & : & I(X,Y) & \to & Z \\ & & f & \mapsto & f(X) \end{array}$$

est bien définie, et qu'elle est surjective.

2. Soit $Y' \in Z$. Montrer qu'on peut identifier $G^{-1}(\{Y'\})$ avec $I(X,Y')$, et en déduire le cardinal de $G^{-1}(\{Y'\})$.

3. En utilisant un résultat du cours, conclure que $\mathrm{card}(Z) = \frac{n!}{(n-p)!p!}$: c'est le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Exercice 2.15. En utilisant le résultat des exercices 2.10 et 2.14, montrer que

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.$$

Redémontrer cette formule en utilisant la formule du binôme de Newton.