Questions pour le Test 1

1. Soit $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ une série convergente. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sont-elles nécessairement convergentes?
2. Supposant que $\lim\limits_{n\to n} u_n = 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est-elle nécessairement convergente?
3. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série absolument convergente. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})u_n$ est-elle nécessairement convergente?
4. Soient $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ deux séries convergentes. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n v_n)$ est-elle nécessairement convergente?
5. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série absolument convergente. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ est-elle nécessairement convergente?
6. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série convergente. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ est-elle nécessairement convergente?
7. En examinant la limite du terme général montrer que les séries suivantes divergent:
$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\cos n \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n\cos\frac{1}{n}) \quad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(\sin n+\cos n) \quad (d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n.$$
8. Les séries suivantes sont-elles convergentes ?
$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \quad (d)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n} \quad (e)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n} \quad (f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2}$$
9. Combien de termes faut-il prendre pour calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-3}$ à $0,0002$ près?
10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente, absolument convergente ?
11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$ est-elle convergente, absolument convergente ?
12. La série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ est-elle convergente, absolument convergente?
13. Les séries suivantes sont-elles convergentes? (utiliser la règle de d'Alembert ou celle de Cauchy)
$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n} \quad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n}{3^n} \quad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5+n}{n!} \quad (d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\sqrt[n]{n})^n}{3^n} \quad (e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \quad (f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$$
14. La suite de fonctions $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ admet-elle une limite simple sur $[0,+\infty[$? Une limite uniforme sur $[0,1]$?
15. La suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n^{\frac{2}{3}}x^n}{1+nx^{2n}}$ admet-elle une limite simple sur $[0,+\infty[$? Une limite uniforme ?
16. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : x\in[0,1]\mapsto nx^n(1-x)$.
    (a) La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0,1]$?
    (b) Pour chaque $n\geq 1$, dresser le tableau de variations de f_n.
    (c) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1/2]$. Converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
17. Montrer que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ pour $n>0$ par $u_n(x)=\sin\frac{x}{n}$ converge vers 0 uniformément sur tout segment mais pas sur $\mathbb{R}$.