Partiel de Mécanique Analytique

Durée : 2 heures

Les documents et la calculatrice sont interdits

Cet examen partiel de deux heures comporte deux exercices indépendants. Il y a des questions de cours et questions indépendantes ou reposant sur des résultats intermédiaires donnés. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

1 Oscillateur harmonique amorti [12]

On considère un oscillateur harmonique unidimensionnel de coordonnée x, fonction du temps t, associé à une masse m et une constante de raideur k. Il est de plus soumis à une force de frottement visqueux, une force dissipative, qui est de la forme $D = -\gamma \dot{x}$ avec $\gamma > 0$.

1. **[1]** Donner le lagrangien L en l'absence de force dissipative. Retrouver l'équation du mouvement à partir des équations d'Euler-Lagrange.
2. **[0.5]** Écrire l'équation du mouvement obtenue en rajoutant maintenant la force de frottement.

On cherche à construire un lagrangien en présence de la force dissipative. Pour cela Bateman a introduit en 1931 une méthode qui consiste à introduire un degré de liberté supplémentaire noté $y(t)$. Il considère alors l'action, fonctionnelle de x et de y, définie par

$$S[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{x} - \gamma\dot{x} - kx)y \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

3. **[0.5]** Rappeler le principe de moindre action.
4. **[1]** On considère dans un premier temps une fonctionnelle de la forme

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}) \mathrm{d}t \ , \tag{2}$$

avec des conditions aux limites fixes $\delta x(t_i) = 0$ et $\delta \dot{x}(t_i) = 0$ pour $i = 1, 2$. On rappelle que la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta S}{\delta x}$ est définie en mettant la variation δS sous la forme $\delta S = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta x} \delta x \, \mathrm{d}t$. Montrer que la dérivée fonctionnelle peut se calculer via

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{x}}\right) \ . \tag{3}$$

5. **[1]** En appliquant le principe de moindre action à (1), trouver les équations du mouvements pour x et pour y. Commenter la forme des équations.
6. **[1]** Montrer que l'action peut se mettre sous la forme « symétrisée »

$$S[x, y] = \int_{t_1}^{t_2} \left(m\dot{x}\dot{y} + \frac{\gamma}{2}(\dot{y}x - \dot{x}y) - kxy \right) \mathrm{d}t \; . \tag{4}$$

7. **[1]** Définir puis calculer l'énergie lagrangienne E pour le système décrit par (4). Est-ce qu'elle est conservée ? Commenter cette réponse par un argument qualitatif.
8. **[1]** On cherche maintenant une solution dans laquelle x et y évoluent selon $y = f(t)x$ avec f une fonction à déterminer. Montrer que les équations du mouvement conduisent à un choix possible sous forme d'une fonction simple pour $f(t)$.
9. **[1]** En utilisant la forme de $y(t)$ obtenue, montrer que l'on construit ainsi un lagrangien pour le degré de liberté x uniquement qui prend la forme

$$L(x, \dot{x}, t) = e^{\gamma t/m} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \right) \; , \tag{5}$$

   et est appelé lagrangien de Bateman.
   Indication : faire apparaître une dérivée totale qui disparaîtra par invariance de jauge. L'equation (5) *est obtenue en divisant par 2 le lagrangien issu de* (4)*.*
10. **[0.5]** Vérifier que ce lagrangien permet de retrouver l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique amorti.

Montrons maintenant qu'il existe une quantité conservée associée au lagrangien (5) à l'aide du théorème de Noether. Soit $L(x, \dot{x}, t)$ un lagrangien générique à un degré de liberté. Soit $(x, t) \to (x', t')$ une transformation ponctuelle qui combine l'espace et le temps, paramétrée par $\varepsilon > 0$, et qui prend la forme

$$\begin{cases} x' = x - \varepsilon\, \xi(x, t) \\ t' = t + \varepsilon \end{cases} \tag{6}$$

avec $\xi(x, t)$ une fonction différentiable.

11. **[1.5]** Soit E l'énergie lagrangienne, rappeler ce que vaut $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ en fonction d'une dérivée de L. Si L est invariant sous la transformation (6), montrer qu'il existe la quantité conservée suivante, notée Γ, avec E l'énergie lagrangienne :

$$\Gamma = E + \xi \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \; . \tag{7}$$

12. **[1]** Montrer par un développement à l'ordre 1 en ε que le lagrangien (5) est invariant sous ce type de transformation en prenant une fonction $\xi = ax$ avec a une constante à déterminer.
13. **[1]** En déduire l'expression de Γ pour l'oscillateur harmonique amorti en fonction des variables $(x, \dot{x}, t)$.

2 Billes sur une surface en tissu extensible [11]

De nombreux cours introductifs à la relativité générale utilisent une analogie simple pour illustrer la courbure de l'espace-temps introduite par Einstein : si l'on tend un morceau de tissu extensible, comme de l'élasthanne, sur un cadre circulaire à la manière d'un tambour, et que l'on pose dessus une boule lourde, celle-ci va déformer le tissu (voir figure ci-dessous). Si l'on pose ensuite une bille sur ce même tissu, son mouvement est impacté par la présence de la boule au travers de la déformation du tissu, de façon analogue à l'influence d'une masse sur une autre via la déformation de l'espace-temps. Ce problème vise à étudier ce système et la pertinence de cette analogie [1].

FIGURE 1 – d'après https://www.jpl.nasa.gov/edu/teach/activity/modeling-the-orbits-of-planets/.

On suppose que le cadre est rond, de rayon R, que le tissu tendu sans la masse est horizontal, que la boule est ponctuelle, placée au centre du cadre, et qu'elle a une masse M. On utilisera les coordonnées polaires (r, θ, z) en supposant la forme du tissu invariante par rotation et caractérisée par une altitude $z = h(r)$ telle que $h'(R) = h(R) = 0$ où l'on a utilisé la notation $h'(r) = \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}$.

2.1 Dynamique d'une bille sur la surface déformée

On étudie la trajectoire d'une bille que l'on lance sur la surface déformée, soumise à la pesanteur g. La bille est considérée ponctuelle, de masse m et se déplaçant sans frottement sur la surface de révolution dont la forme est donnée par $h(r)$, supposée pour l'instant générique mais telle que $h'(r) > 0$. On suppose que sa masse ne déforme par la surface ($m \ll M$).

14. **[1]** Quels sont les degrés de liberté de la bille ? Écrire le Lagrangien $\mathscr{L}$ en fonction de m, g et des fonctions h et h'.
15. **[1.5]** Après avoir rappelé les équations d'Euler-Lagrange, calculer les équations du mouvement. Comment peut-on interpréter l'équation pour θ ?
16. **[0.5]** On considère le cas où les orbites sont circulaires et centrées sur $r = 0$. Calculer la période de révolution T en fonction de r et $h'(r)$.

1. L'exercice est adapté de l'article C. A. Middleton & M. Langston, Am. J. Phys. **82**, 287 (2014).

2.2 Forme du tissu déformé par la boule

On étudie maintenant l'équation qui gouverne la forme du tissu déformé par la boule de masse M placée en son centre.

17. **[0.5]** Faire un schéma du système en coupe transverse et tracer l'allure de $h(r)$.

Avant déformation, on décompose le film plat en éléments annulaires de rayon r et de largeur $\mathrm{d}r$. Puis $\mathrm{d}r$ est étiré de $\mathrm{d}\ell$: $\mathrm{d}r \to \mathrm{d}r + \mathrm{d}\ell$ lors de l'étirement. La loi de Hooke relie la tension élastique par unité de surface transverse σ (de la dimension d'une pression) à l'étirement relatif selon

$$\sigma = E\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}r} , \tag{8}$$

avec E le module d'Young supposé constant. On notera e l'épaisseur du tissu de sorte que la force élastique totale $F_{\text{el}}(r)$ s'exerçant à une distance r du centre s'écrit $F_{\text{el}}(r) = \sigma 2\pi r e$.

18. **[1]** Exprimer $\mathrm{d}\ell$ en fonction de $\mathrm{d}r$ et $h'(r)$ et vérifier qu'elle s'annule si $h(r)$ =const.
19. **[1]** Écrire le travail élémentaire $\mathrm{d}W(r)$ de la force élastique associé à l'étirement de l'anneau à une distance r. En déduire que l'énergie potentielle élastique U_{el} à fournir pour étirer l'ensemble du tissu peut se mettre sous la forme de la fonctionnelle de $h(r)$ suivante
$$U_{\text{el}}[h] = \frac{K}{2}\int_0^R r\left(\sqrt{1+h'(r)^2}-1\right)^2 \mathrm{d}r ,$$
où l'on donnera l'expression de K en fonction de E et e.
20. **[1]** Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle de la boule, notée U_M en fonction de M, la constante de pesanteur g et la hauteur $h(0)$. Montrer que ce terme peut se réécrire comme une fonctionnelle de h sous forme intégrale
$$U_M[h] = -Mg\int_0^R h'(r)\mathrm{d}r . \tag{9}$$
21. **[0.5]** Bien qu'étiré, un élément annulaire de tissu conserve sa masse lors de la déformation. Soit d la densité surfacique massique de tissu. Écrire l'énergie potentielle de pesanteur totale $U_p[h]$ du tissu sous forme d'une intégrale.
22. **[1]** En minimisant l'énergie totale $U_{\text{tot}}[h]$ du système tissu+masse M, montrer que la courbe $h(r)$ solution satisfait à l'équation
$$g(M + d\pi r^2) = Krh'(r)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+h'(r)^2}}\right) \tag{10}$$
Indication : ne cherchez pas à appliquer la dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$ *mais intégrez la relation obtenue.*
23. **[1]** En développant l'équation au premier ordre non nul en $h'(r)$ dans les régimes de faible déformation $h'(r) \ll 1$ et de forte déformation $h'(r) \gg 1$, donner l'expression de $h'(r)$ en fonction de r et des paramètres dans chacun des deux cas.

2.3 Pertinence de l'analogie

La troisième loi de Kepler indique que la période de révolution T et le rayon de l'orbite r sont reliés par la loi d'échelle $T^2 \propto r^3$.

24. **[1]** On se place dans l'approximation $M \gg d\pi r^2$ (que l'on justifiera) et dans le régime de faible déformation. En partant du résultat de la question 16, quelle relation d'échelle trouve-t-on ? Conclure sur la validité de l'analogie entre ce système et la physique gravitationnelle.

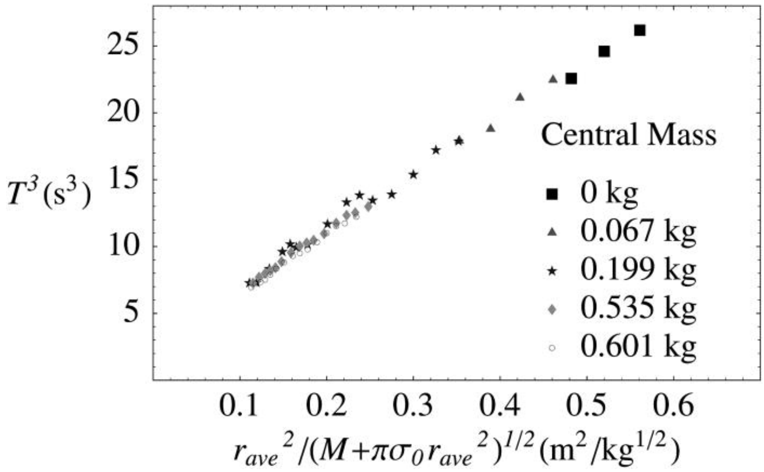

FIGURE 2 – Période de révolution au cube T^3 pour des orbites circulaires dans le régime de faible déformation en fonction du rayon moyen de l'orbite r_{ave}, de la masse de la boule M, et de la densité massique surfacique $\sigma_0 \equiv d$.

25. **[1]** La Figure 2 présente des mesures expérimentales de la relation entre la période et le rayon de révolution dans le régime de faible déformation. En déduire une valeur approximative du paramètre K.