Université Paris Saclay – Magistère – LDD – ENS

Mécanique Analytique
Travaux Dirigés
2024 – 2025

TD 1 : Formulation lagrangienne

Exercice 1.1. Oscillateur unidimensionnel

L'objectif de cet exercice est de montrer que tout système conservatif à une dimension est formellement intégrable (soluble). Ici nous allons considérer le calcul de la période d'un oscillateur.

On considère une particule de masse m astreinte à se déplacer le long d'une droite Ox et subissant une force dérivant d'une énergie potentielle $V(x)$ possédant un minimum pris comme origine du repère et que nous supposerons symétrique $V(-x) = V(x)$. La masse oscille autour de cette position d'équilibre stable.

1. Rappeler le principe fondamental de la dynamique et l'expression de l'énergie mécanique E du système. Montrer que E est une constante du mouvement.

2. A partir de l'expression de l'énergie, montrer que quelque soit la forme du potentiel il est possible d'exprimer la période d'oscillation de la masse sous la forme d'une quadrature (intégrale)

$$T = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{E - V(x')}}$$

où $x_0 \geqslant 0$ est défini par $E = V(x_0)$.

3. Dans le cas d'un potentiel de la forme $V(x) = m\alpha|x|^n$ où $n > 0$ et $\alpha > 0$, exprimer la période d'oscillation T_n en fonction de l'énergie E, de la masse m, du paramètre α et de l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^n}}$ que l'on ne cherchera pas a calculer. [1]

4. Dans le cas d'un potentiel harmonique $n = 2$, calculer la période d'oscillation T_2 et montrer que l'oscillateur harmonique est isochrone. On notera $\alpha = \omega^2/2$ et on donne également la valeur de l'intégrale $I_2 = \pi/2$.

Exercice 1.2. Problème à N-corps – Potentiel d'interaction de paires

L'objectif de cet exercice est de manipuler le concept de potentiel de paires

On considère un ensemble de N particules de masse m et de positions $\mathbf{r}_i$, $i = 1, \ldots, N$ qui interagissent entre elles via un potentiel d'interaction de paires, [2] c'est-à-dire que chaque paire de particules interagit entre elle via un potentiel $\Phi(r)$ qui ne dépend que de la distance entre les deux particules. Par exemple dans le cas de 3 particules le potentiel s'écrit

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \Phi(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) + \Phi(|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|) + \Phi(|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|).$$

On peut généraliser cette équation pour N particules en effectuant une somme sur les paires, l'énergie potentielle totale s'écrit donc

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i<j} \Phi(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|)$$

où $\sum_{i<j} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N$ est une somme sur l'ensemble des $N(N-1)/2$ paires de particules.

1. I_n peut s'exprimer en fonction de la fonction d'Euler $\Gamma(z)$ selon l'équation $I_n = \sqrt{\pi}\Gamma(1 + 1/n)/\Gamma(1/2 + 1/n)$

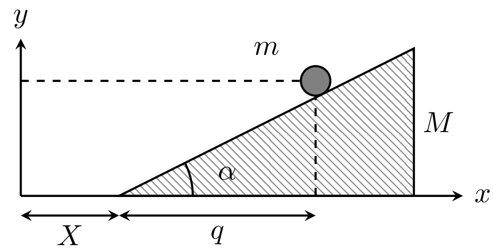
2. L'interaction électrostatique et l'interaction gravitationnelle sont des exemples de potentiel de paires.

1. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système

2. Vérifier que les forces entre particules sont additives, c'est-à-dire que la force s'appliquant sur la particule k s'écrit sous la forme $\mathbf{F}_k = \sum_{i\neq k} \mathbf{F}_{i/k}$. Donner l'expression de la force $\mathbf{F}_{i/k}$ en fonction de $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}r$, $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{r}_k$.

Exercice 1.3. Le plan incliné mobile

Soit un plan incliné d'angle α et de masse M glissant sans frottement le long de l'axe horizontal Ox. La position du plan incliné est repérée par la coordonnée X de son sommet. Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur ce plan incliné dans le plan Oxy. La masse m est repérée par son abscisse x et son ordonnée y. On considère la coordonnée généralisée $q = x - X$.



1. Etablir l'expression de l'énergie cinétique T en fonction des coordonnées cartésiennes des deux masses puis en fonction des vitesses généralisées $\dot{q}$ et $\dot{X}$.

2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle U en fonction des coordonnées cartésiennes puis en fonction de q.

3. Donner l'expression du Lagrangien $\mathscr{L}(q, \dot{q}, \dot{X})$.

4. Ecrire les équations d'Euler-Lagrange.

5. Résoudre les équations d'Euler-Lagrange et décrire le mouvement ainsi identifié.

Exercice 1.4. Mouvement sur une surface de révolution

Soit une masse m ponctuelle astreinte à se déplacer sur une surface de révolution autour de l'axe Oz et passant par l'origine du repère. La masse subie le champ de pesanteur uniforme vertical $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. On utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, z). La surface est caractérisée par une fonction $z = h(r)$, strictement croissante, continue et dérivable sur l'intervalle $]0, \infty[$ dont la forme exacte ne sera pas spécifiée.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté ? Ecrire le Lagrangien en fonction des coordonnées (r, θ).

2. Ecrire les équations de Lagrange et montrer que $\ell = r^2\dot{\theta}$ est une intégrale première du mouvement. A quoi correspond cette quantité ?

3. Éliminer la variable θ de l'équation pour r.

Nous allons considérer le cas d'un cone défini par l'équation $z = \tan\alpha\ r$.

4. Écrire l'équation du mouvement pour r sous la forme $\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ et donner l'expression de $V(r)$ en fonction de r, g, α et ℓ.

5. Faites une analyse graphique du mouvement grâce au potentiel effectif $V(r)$.

Exercice 1.5. Optimisation

1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. Trouver le minimum de cette fonction

2. Chercher les extrema de la fonction $F(x, y)$ en imposant la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 1.6. Catenoïde

Un film de savon entre deux cerceaux de rayon R centrés autour de l'axe Oz et distant de a forme la surface catenoïde qui est la surface minimum. Dans un repère cylindrique, la surface est définit par une courbe $r = r(z)$. En symétrie cylindrique, l'élement de surface s'écrit $\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}\ell = 2\pi r\sqrt{1 + r'^2}\mathrm{d}z$ où $r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}z$. La surface totale s'écrit donc

$$S[r(z)] = 2\pi \int_{-a/2}^{a/2} F(r, r')\mathrm{d}z$$

où $F(r, r') = r(z)\sqrt{1 + r'(z)^2}$. Les conditions aux limites de la courbe $r(z)$ sont $r(\pm a/2) = R$.

1. Ecrire sans chercher à la résoudre l'équation d'Euler pour cette fonctionnelle.

2. Il est plus simple ici de considérer l'identité de Beltrami. Soit $C = F - r'\dfrac{\partial F}{\partial r'}$, montrer que C est independant de z.

3. Sachant que la courbe doit être symétrique par rapport au plan xOy, trouver l'expression de la courbe catenoïde $r(z)$ en fonction de C et déterminer l'équation reliant C, a et R.

Exercice 1.7. Champ magnétique inhomogène

Nous allons considérer dans ce problème le mouvement d'une charge q de masse m dans un champ magnétique inhomogène, indépendant du temps et de direction fixe. On introduit un repère orthonormée $Oxyz$ ainsi que les vecteurs unitaires $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. On supposera que la configuration du champ magnétique soit telle que $\mathbf{B}(x) = B(x)\mathbf{e}_y$. Le mouvement d'une particule chargée dans la direction du champ magnétique est une translation uniforme et nous ne nous intéresserons ici qu'au mouvement dans le plan (xOz).
Le champ magnétique $\mathbf{B}(x)$ s'exprime en fonction du potentiel vecteur $\mathbf{A}(x)$ suivant la relation $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$. On rappelle également que le lagrangien d'une particule chargée dans un champ magnétique indépendant du temps est donné par

$$\mathscr{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

1. Montrer que le potentiel vecteur peut-s'écrire $\mathbf{A}(x) = A(x)\mathbf{e}_z$ et donner la relation entre $B(x)$ et $A(x)$.

2. Ecrire l'expression du Lagrangien $\mathscr{L}(x, \dot{x}, \dot{z})$ en fonction de $A(x)$ et des coordonnées et vitesses cartésiennes de la particule dans le plan (xOz).

3. Définir et donner l'expression des moments conjugués p_x et p_z en fonction des positions et vitesses cartésiennes.

4. Ecrire les équations d'Euler-Lagrange et montrer que p_z est une constante. Que peut-on dire sur la variable z ?

5. En déduire que le mouvement de la particule selon l'axe Ox peut-être décrit par l'équation suivante :

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_{\mathrm{eff}}(x),$$

et donner l'expression de $V_{\mathrm{eff}}(x)$ en fonction de $A(x)$ et p_z. On choisira l'origine du potentiel effectif tel que pour x_0 défini par $qA(x_0) = p_z$ nous ayons $V_{\mathrm{eff}}(x_0) = 0$.

6. Donner l'expression de l'énergie E et montrer que l'énergie est une constante du mouvement.

Nous allons considérer ici le cas d'une charge venant d'une zone sans champ magnétique et se dirigeant vers une zone de fort champ magnétique. Ainsi nous allons supposer que l'intensité du champ magnétique croit exponentiellement avec la distance x, formant ainsi un "mur". Le champ peut donc s'écrire

$$B(x) = Be^{-ax},$$

où $a > 0$ est un paramètre qui contrôle la croissance du champ magnétique en fonction de la distance x. La charge pourra venir des $x = +\infty$ mais ne pourra pas traverser le "mur" et rejoindre l'espace $x \to -\infty$.

7. Donner l'expression de $A(x)$ pour cette configuration du champ magnétique. On pourra choisir $A(x) = 0$ pour $x \to +\infty$.

8. Nous allons supposer que $p_z/qB > 0$. Montrer que le potentiel effectif peut s'écrire sous la forme

$$V_{\mathrm{eff}}(x) = D\left(1 - e^{-a(x-x_0)}\right)^2,$$

Donner l'expression de D et x_0 en fonction de q, B, a et p_z.

9. Tracer l'allure de la fonction $V_{\mathrm{eff}}(x)$ et montrer qu'il existe des orbites liées pour $0 \leqslant E < D$ et des orbites libres pour $E \geqslant D$.

10. Tracer l'allure des orbites $0 \leqslant E < D$ et $E \geqslant D$ dans le plan (xOz).

11. Nous allons considérer les orbites liées telles que $0 \leqslant E < D$. On introduit le paramètre θ défini par $\cos^2\theta = E/D$. En utilisant les variables $u = e^{a(x-x_0)}$ et $\tau = \sqrt{2Da^2/m}t$ trouver une relation entre $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}\tau$, u et θ.

12. En déduire les valeurs $u_\pm$ des points de rebroussements $u' = 0$ de la trajectoire.

13. Trouver une transformation affine des coordonnées $v = \alpha\,(u - \beta)$ tel que l'on est la relation

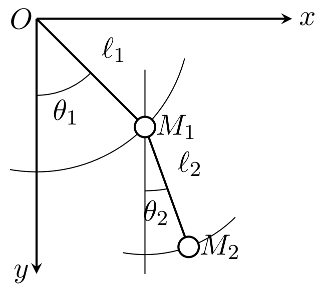
$$v'^2 - \sin^2\theta\left(1 - v^2\right) = 0.$$

Donner l'expression de α et β en fonction de θ.

14. Sachant que $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$, en déduire l'expression de $v(\tau)$ en fonction de τ et θ. On pourra choisir par exemple l'origine des temps tel que $v(\tau = 0) = 0$.

15. Donner l'expression de la position $x(\tau)$ en fonction de τ et de θ.

Exercice 1.8. Le pendule double



On considère un pendule double constitué de deux masses m_1 et m_2. La masse m_1 est reliée au point fixe O par une tige rigide de longueur ℓ_1, la masse m_2 est reliée à la masse m_1 par une tige rigide de longueur ℓ_2. Les positions des masses sont repérées par les angles θ_1 et θ_2 entre les tiges OM_1 et M_1M_2 et la verticale. Les deux masses sont plongées dans le champ de pesanteur $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_y$.

1. Etablir l'expression de l'énergie cinétique $T(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$.

2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle $U(\theta_1, \theta_2)$.

3. Donner l'expression du Lagrangien $\mathscr{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ en fonction des paramètres

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \beta = \frac{\ell_2}{\ell_1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_1}}, \quad I = (m_1 + m_2)\ell_1^2$$

4. Formuler les équations d'Euler-Lagrange.

5. Formuler les équations d'Euler-Lagrange sous l'hypothèse des petites oscillations $\theta \ll 1$.

6. Effectuer un développement harmonique du Lagrangien sous l'hypothèse des petites oscillations et vérifier que vous obtenez le même jeu d'équations obtenu à la question précédente.

7. Rechercher une solution de la forme $\theta_i(t) = \mathrm{Re}(a_i e^{\mathrm{i}\omega t})$. Quelle sont les valeurs des pulsations propres ω ?

8. On considère le cas particulier $\ell_1 = \ell_2$ et $m_1 = 3m_2$. Déterminer les pulsations propres et vérifier que les coordonnées

$$q_+ = \theta_1 - \theta_2/2, \quad q_- = \theta_1 + \theta_2/2$$

sont bien des coordonnées normales

9. Donner l'expression du Lagrangien approché en fonction des coordonnées normales q_+ et q_-

TD 2 : Formulation hamiltonienne

Exercice 2.1. Hamiltoniens

L'objectif de cet exercice est de se familiariser avec la transformée de Legendre et la construction d'un Hamiltonien à partir d'un Lagrangien donné.

1. On considère une particule chargée classique qui interagit avec le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et le potential scalaire $\phi(\mathbf{r}, t)$. Dans le cadre classique le Lagrangien de cette particule s'écrit :

$$\mathscr{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v} - q\phi(\mathbf{r}, t).$$

Exprimer l'impulsion $\mathbf{p}$ de la particule, puis le Hamiltonien $\mathscr{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$.

2. On considère une particule chargée relativiste qui interagit avec le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et le potential scalaire $\phi(\mathbf{r}, t)$. On admettra que dans un cadre relativiste le Lagrangien s'écrit

$$\mathscr{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{mc^2}{\gamma(\mathbf{v})} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v} - q\phi(\mathbf{r}, t),$$

où $\gamma(\mathbf{v}) = \left(1 - \mathbf{v}^2/c^2\right)^{-1/2}$. Exprimer l'impulsion $\mathbf{p}$ de la particule, puis le Hamiltonien $\mathscr{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$.

3. Le Lagrangien du pendule double s'écrit

$$\mathscr{L}(\theta_1, \theta_2, \dot\theta_1, \dot\theta_2)/I = \frac{1}{2}\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta^2\dot\theta_2^2 + \alpha\beta\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \omega_0^2\cos\theta_1 + \alpha\beta\omega_0^2\cos\theta_2,$$

où $\alpha = m_2/(m_1 + m_2)$, $\beta = \ell_2/\ell_1$, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ et $I = (m_1 + m_2)\ell_1^2$. Quelle est l'expression du Hamiltonien $\mathscr{H}(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2})$?

Exercice 2.2. Hamiltonien dépendant du temps

On considère le Lagrangien suivant

$$\mathscr{L}(x, \dot x, t) = \frac{1}{2} m \left(\dot x^2 - \omega^2 x^2\right) e^{\gamma t}$$

où les constantes m, ω^2 et γ sont positives.

1. Calculer le Hamiltonien de ce système, est-ce qu'il est indépendant du temps ?

2. Dériver les équations de Hamilton

3. Quel problème physique cet Hamiltonien représente t'il ?

Exercice 2.3. Espace des phases

On considère un système à un degré de liberté de coordonnée q et de moment conjugué p. L'Hamiltonien du système est donné par

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q)$$

où $V(q)$ est l'énergie potentielle du système. Donner une interpretation physique de chacun des potentiels suivants qui dépendent d'un paramètre $\alpha > 0$ et tracer les portraits de phases correspondants

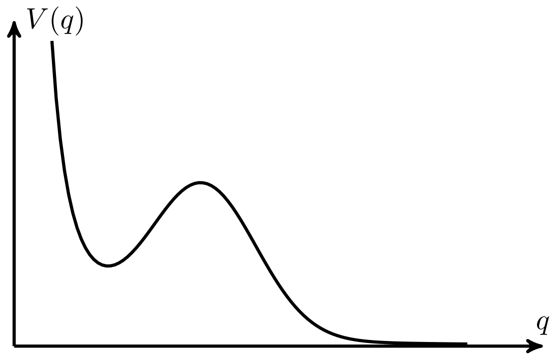
$$\begin{array}{ll} V_1(q) = \frac{\alpha}{2}q^2 & V_2(q) = -\frac{\alpha}{2}q^2 \\ V_3(q) = \alpha q & V_4(q) = \alpha e^{q} \\ V_5(q) = \alpha e^{-q^2/2} & V_6(q) = -\alpha e^{-q^2/2} \end{array}$$

Exercice 2.4. Portrait de phase

On considère un système à un degré de liberté de coordonnée q et de moment conjugué p. L'Hamiltonien du système est donné par

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + V(q).$$

Tracer l'allure du portrait de phase pour un potentiel $V(q)$ ayant la forme suivante



Exercice 2.5. Propriétés des crochets de Poisson

On considère le crochet de Poisson $\{A, B\}$ de deux fonctions $A(q_k, p_k, t)$ et $B(q_k, p_k, t)$ des coordonnées généralisées q_k et moments conjuguées p_k et du temps t. Vérifier les propriétés suivantes :

1. $\{A, B\} = -\{B, A\}$

2. $\{A_1 + A_2, B\} = \{A_1, B\} + \{A_2, B\}$

3. $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B$

4. $\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

5. $\{q_i, A\} = \dfrac{\partial A}{\partial p_i}, \quad \{p_i, A\} = -\dfrac{\partial A}{\partial q_i}$

6. $\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$

7. $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}$

8. (optionnel) identité de Jacobi : $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$

On considère maintenant un point matériel de coordonnées cartésiennes $\mathbf{r}$ et de moment $\mathbf{p}$. Vérifier les propriétés suivantes :

9. $\{L_\alpha, L_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma$ où $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ est le moment cinétique (on pourra considérer le cas $\alpha = x$, $\beta = y$ et généraliser).

10. $\{L_\alpha, \mathbf{L}^2\} = 0$

Exercice 2.6. Transformations canoniques

On considère un ensemble de transformation $(q, p) \to (Q, P)$.

1. Montrer que la transformation suivante est une transformation canonique :

$$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$$
$$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$$

Donner la fonction génératrice de première espèce $F_1(q, Q)$ qui permet de trouver cette transformation

2. Verifier que la transformation suivante est une transformation canonique :

$$Q = \log\left(\frac{1}{q}\sin p\right)$$
$$P = q\cot p$$

3. (optionel) Donner la fonction génératrice de cette transformation

4. Trouver les valeurs de α et β telle que la transformation suivante soit canonique

$$Q = q^\alpha \cos\beta p$$
$$P = q^\alpha \sin\beta p$$

Exercice 2.7. Chute libre

On considère le problème de la chute libre dans un référentiel non-galliéen (par exemple dans un ascenseur). Soit $\mathscr{R}_0$ le référentiel terrestre considéré comme galiléen et $\mathscr{R}$ un référentiel non galiléen en translation rectiligne verticale (non-uniforme) On considère une masse m repérée dans $\mathscr{R}_0$ par sa coordonnée verticale q et dans $\mathscr{R}$ par $Q = q - h(t)$, où $h(t)$ repère la position de $\mathscr{R}$ par rapport à $\mathscr{R}_0$. Les moment conjugués dans $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}$ sont notés p et $P = p - m\dot{h}(t)$.

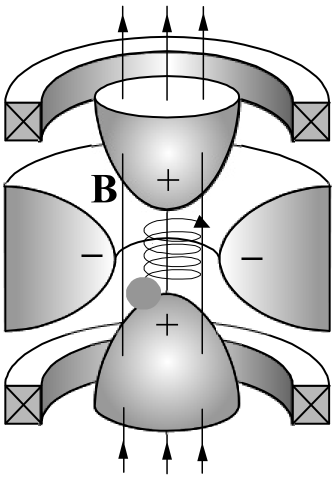
1. Donner l'expression du Hamiltonien $H(q, p, t)$.

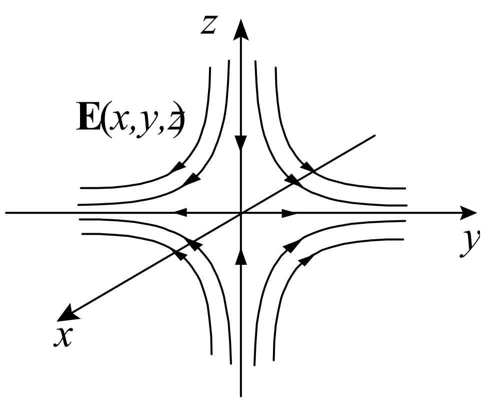
2. Pour montrer que la transformation $(q, p) \to (Q, P)$ est canonique, trouver une fonction génératrice de 2ème espèce $F_2(q, P)$ permettant de la générer

3. En déduire le nouvel Hamiltonien du système $K(Q, P, t)$. Discuter chaque terme de K et identifier le terme responsable de la force d'inertie dans le référentiel $\mathscr{R}$.

Exercice 2.8. Transformation canonique : le piège de Penning

L'objectif de ce problème est d'étudier les pièges de Penning. Ces pièges constitués d'une combinaison de champs électrique et magnétique permettent de confiner des ions ou des électrons et sont utilisés pour des expériences de physique fondamentale et de métrologie.





Soit une particule chargée de charge q et de masse m. La position et le moment conjugué de cette particule sont repérés par les vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$ exprimés dans un repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. On rappelle que le Hamiltonien d'une particule chargée plongée dans un champ électromagnétique est donné par

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m} + q\Phi(\mathbf{r})$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est le potentiel vecteur et $\Phi(\mathbf{r})$ et le potentiel scalaire. Au voisinage du centre d'un piège de Penning, on pourra considérer que le champ magnétique est uniforme et aligné le long de l'axe Oz, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ et que le potentiel dont dérive le champ électrique est quadrupolaire. Les potentiels vecteur et scalaire s'écrivent donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{m\omega}{2q}(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x), \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{m\Omega^2}{4q}\left(2z^2 - x^2 - y^2\right),$$

où $\omega = qB/m$ et Ω sont deux pulsations caractéristiques du piège.

1. Donner l'expression de $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ et montrer que dans le plan Oxy le piège de Penning ne fonctionne que si $\Omega_0^2 = \omega^2 - 2\Omega^2 > 0$.

Nous supposerons que la condition précédente est vérifiée. Pour simplifier les calculs, on utilisera un système d'unité tel que $m = 1$ et $\Omega_0 = 1$. On effectue une première transformation canonique $(x, y, p_x, p_y,) \to (q_+, q_-, p_+, p_-)$ générée par la fonction génératrice

$$S(p_x, y, q_+, q_-) = -p_x(q_+ + q_-) - \frac{y}{2}(q_+ - q_-).$$

Ce type de fonction génératrice suit les formules de génération

$$x = -\frac{\partial S}{\partial p_x}, \quad p_+ = -\frac{\partial S}{\partial q_+}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_- = -\frac{\partial S}{\partial q_-}$$

2. Exprimer x, y, p_x et p_y en fonction de q_+ et q_-, p_+ et p_-.

3. On introduit les fréquences cyclotron et magnétron modifiées $\Omega_\pm = (\omega \pm 1)/2$. Exprimer H en fonction de Ω_+, Ω_-, q_+, q_-, p_+, p_-, p_z et z.

On effectue une deuxième transformation canonique $q_+, q_-, z, p_+, p_-, p_z \to \theta, \varphi, \phi, J, D, I$ où J, D et I sont des actions et où θ, φ et ϕ sont des angles, associée à la fonction génératrice

$$F(q_+, q_-, z, \theta, \varphi, \phi) = \frac{q_+^2}{2}\cot(\theta) + \frac{q_-^2}{2}\cot(\varphi) + \frac{\Omega z^2}{2}\cot(\phi).$$

Cette transformation suit les règles de génération suivantes :

$$p_+ = \frac{\partial F_1}{\partial q_+}, \quad J = -\frac{\partial F_1}{\partial \theta}, \quad p_- = \frac{\partial F_1}{\partial q_-}$$
$$D = -\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}, \quad p_z = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad I = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi}$$

4. Exprimer q_+, q_-, z, p_+, p_-, et p_z en fonction des nouveaux angles et actions.

5. Exprimer H en fonction des nouvelles actions.

Exercice 2.9. Transformation infinitésimale

Soit un point matériel décrit par un ensemble de coordonnées q_i et moments conjugués p_i. On définit une transformation infinitésimale sous la forme

$$\begin{aligned} q_i' &= q_i + \delta q_i, \\ p_i' &= p_i + \delta p_i, \end{aligned}$$

1. Chercher une fonction génératrice de 2ème espèce $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}')$ qui permet d'obtenir une telle transformation. On utilisera la forme suivante :

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}') = \sum_i q_i p_i' + \epsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

   où ϵ est un petit paramètre qui permet de s'assurer que la transformation est infinitésimale et où $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est une fonction de q_k et p_k. Donner les relations qui relient $\delta q_i, \delta p_i$ et les dérivées partielles de $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

2. Soit une fonction $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ des coordonnées et moments. Montrer que la variation infinitésimale δA due à la transformation infinitésimale peut s'écrire

$$\delta A = \epsilon \{A, G\}$$

3. Dans le cas où le paramètre de variation de la transformation est le temps $\epsilon = \delta t$ quelle est l'expression de G ?

Nous allons considérer la transformation infinitésimale de rotation autour de l'axe Oz d'angle angle $\delta\theta$ ($\epsilon = \delta\theta$).

4. Donnez l'expression de δx, δy, δp_x and δp_y.
5. Donnez l'expression de $G(x, y, p_x, p_y)$
6. Généraliser au cas d'une rotation autour d'un axe quelconque et de vecteur directeur $\mathbf{n}$.

TD 3 : Équation de Hamilton-Jacobi

Exercice 3.1. Limite classique de l'équation de Schrödinger

On considère un système quantique décrit par un ensemble de coordonnées $\mathbf{x}$ et une fonction d'onde $\psi(\mathbf{x},t)$. Le système est en interaction avec potentiel $V(\mathbf{x},t)$ qui dépend du temps. L'évolution de la fonction d'onde est donnée par l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t)$$

On peut toujours exprimer la fonction d'onde sous la forme

$$\psi(\mathbf{x},t) = R(\mathbf{x},t)e^{\mathrm{i}S(\mathbf{x},t)/\hbar},$$

où $R(\mathbf{x},t)$ et $S(\mathbf{x},t)$ sont deux fonctions réelles. L'utilisation de ces variables est à la base de la formulation hydrodynamique de la mécanique quantique selon de Broglie (1892-1987) et Bohm(1917-1992).

1. A partir de l'équation de Schrödinger, en déduire le système d'équations aux dérivées partielles pour les fonctions $\rho(\mathbf{x},t) = R^2(\mathbf{x},t)$ et $S(\mathbf{x},t)$.
2. Prendre la limite $\hbar \to 0$ et en déduire une interpretation classique de la fonction $S(\mathbf{x},t)$.

Exercice 3.2. Chute libre

On considère le problème d'un corps en chute libre. L'Hamiltonien du système s'écrit

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

Écrire et résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi pour ce problème.

Exercice 3.3. Oscillateur harmonique

Soit un oscillateur harmonique décrit par les variables (q,p). L'hamiltonien s'écrit

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

1. Exprimer l'équation de Hamilton-Jacobi.
2. Montrer que l'action peut s'exprimer sous la forme

   $$S(q,\alpha,t) = \sqrt{2m}\int^q \mathrm{d}u\sqrt{\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2u^2} - \alpha t,$$

   où α est une constante d'intégration.
3. Que représente la constante α ?
4. On définit $\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$. Dans un cadre général, sachant que $S(q,\alpha,t)$ est une fonction de q, α et du temps t (en supposant q et α indépendants) et en utilisant les équations de Hamilton, montrer que β est une constante du mouvement.

5. Démontrer la même chose en utilisant le fait que $S(q, \alpha, t)$ peut-être vu comme une fonction génératrice de 2ème espèce de la transformation canonique $(q, p) \to (\beta, \alpha)$.

6. En déduire l'expression de $q(t)$.

Exercice 3.4. Oscillateur de Duffing

L'oscillateur de Duffing est un problème introduit par Georg Duffing (1861–1944) pour décrire les oscillateurs anharmoniques, amortis et forcés. L'effet de l'anharmonicité peut changer radicalement la dynamique. Dans le cas d'un oscillateur harmonique non amorti, il est bien connu qu'une force extérieure à la résonance induit un accroissement linéaire de l'amplitude des oscillations. Nous allons étudier ici le cas anharmonique où l'amplitude des oscillations devient périodique.
Nous allons considérer le cas d'un oscillateur anharmonique représenté par la coordonnée q et de moment conjugué p sujet à une force extérieure de pulsation Ω. L'hamiltonien du système s'écrit

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + \frac{\Phi}{4} q^4 - F q \sin(\Omega t), \tag{1}$$

où ω est la fréquence harmonique de l'oscillateur et où Φ est un paramètre caractérisant l'anharmonicité du potentiel. Le paramètre F caractérise l'intensité de la force extérieure. Nous allons dans ce problème considérer le cas où Φ et F joue le rôle de faibles perturbations.

1. Écrire les équations de Hamilton et donner l'équation différentielle d'ordre deux permettant de décrire le mouvement de $q(t)$.

2. Donner la solution générale de cette équation dans le cas harmonique $\Phi = 0$ en supposant $\omega \neq \Omega$.

3. Toujours dans le cas $\Phi = 0$, décrire *qualitativement* ce qui se passe lorsque $\omega = \Omega$.

Pour traiter le cas anharmonique ($\Phi \neq 0$), nous allons utiliser la transformation canonique de Van der Pol $(q, p) \to (u, v)$ qui dérive de la fonction génératrice de première espèce

$$F_1(q, u, t) = \left(\frac{\omega q^2 + u^2}{2}\right) \cot(\Omega t) - \frac{\sqrt{\omega} u q}{\sin(\Omega t)}, \tag{2}$$

où $\cot(\Omega t) = \frac{\cos \Omega t}{\sin \Omega t}$. On rappèle les règles de transformation des fonctions génératrices de première espèce

$$p = \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)_{u,t}, \quad v = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}\right)_{q,t}, \quad K = H + \left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{q,u}.$$

4. Exprimer q et p en fonction de u, v et t.

5. Montrer que la transformation de Van der Pol est une *rotation* dans le plan de l'espace des phases $(\sqrt{\omega} q, p/\sqrt{\omega})$. Préciser le sens de rotation et l'angle. En déduire qu'on a la relation $\omega q^2 + p^2/\omega = u^2 + v^2$.

6. Montrer qu'en fonction des variables de Van der Pol u et v, l'hamiltonien $K(u, v, t)$ s'écrit

$$K(u, v, t) = K_0(u, v) + K_\Phi(u, v, t) + K_F(u, v, t),$$

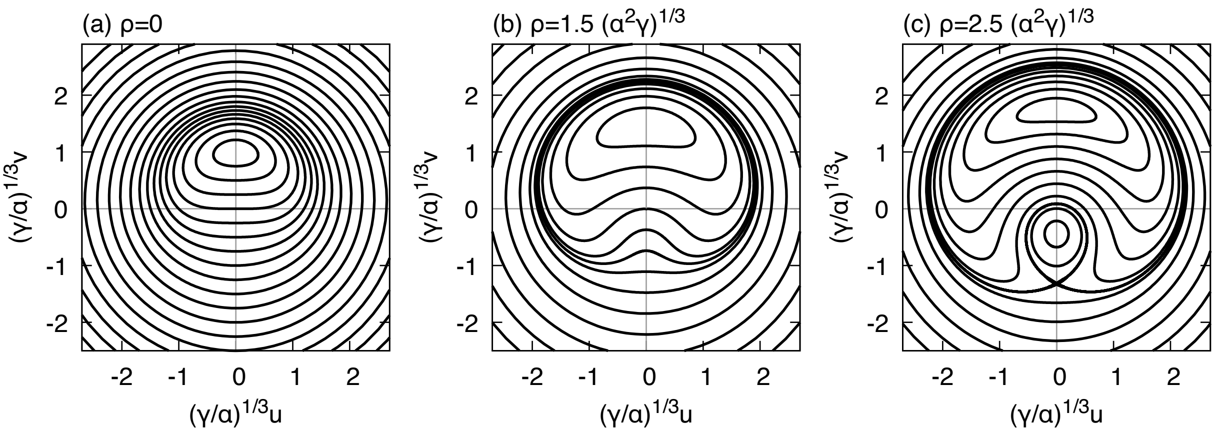


FIGURE 1 – Portraits de phase de l'hamiltonien $\overline{K}(u,v)$ (Eq. 3) pour $\rho = 0$ (a), $\rho = 1.5\,(\alpha^2\gamma)^{1/3}$ (b) et $\rho = 3.5\,(\alpha^2\gamma)^{1/3}$ (c).

où l'hamiltonien harmonique s'écrit sous la forme

$$K_0(u,v) = -\rho\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)$$

et où K_Φ et K_F sont des termes proportionnels respectivement aux paramètres Φ et F. Donner l'expression de ρ en fonction de ω et Ω et les expressions de K_Φ et K_F en fonction de u, v, t et des paramètres du problème.

7. A quoi correspond le cas $\rho = 0$? Justifier que pour $\omega \sim \Omega$ et dans le cas d'un traitement perturbatif de Φ et F les coordonnées u et v sont lentement variables.

Pour la suite du problème nous allons considérer que $u(t)$ et $v(t)$ sont lentement variables. Pour cela nous allons négliger la dépendence temporelle de l'hamiltonien et réaliser l'approximation $K(u,v) \approx \overline{K}(u,v) = \langle K(u,v,t)\rangle_t$, où la moyenne temporelle s'effectue en gardant les coordonnées u et v *constantes*.

8. Montrer que la moyenne temporelle de l'hamiltonien s'écrit

$$\overline{K}(u,v) = -\rho\frac{u^2+v^2}{2} + \frac{\gamma}{4}\left(u^2+v^2\right)^2 - \alpha v, \tag{3}$$

où vous préciserez les expressions de γ et α en fonction de Φ, F et ω. On rappelle les moyennes suivantes :

$$\langle\cos^2 x\rangle_x = \langle\sin^2 x\rangle_x = \frac{1}{2}, \quad \langle\cos^4 x\rangle_x = \langle\sin^4 x\rangle_x = \frac{3}{8}, \quad \langle\cos^2 x\sin^2 x\rangle_x = \frac{1}{8}$$

9. Donner les équations de Hamilton à partir du hamiltonien moyenné $\overline{K}$ (Eq. 3).

En fonction de la valeur de ρ, la dynamique générée par l'hamiltonien moyenné $\overline{K}$ (Eq. 3) est caractérisée par différents types de portraits de phase. Sur la figure 1 est représenté le portrait de phase pour $\rho = 0$, $\rho = 1.5\,(\alpha^2\gamma)^{1/3}$ et pour $\rho = 2.5\,(\alpha^2\gamma)^{1/3}$.

10. Indiquer sur la figure 1 l'ensemble des positions d'équilibre stable et instable et également la séparatrice.

Nous considérons à présent et jusqu'à la fin du problème le cas $\rho = 0$ avec les conditions initiales $u(t=0) = 0$ et $v(t=0) = 0$. Nous supposerons également $\alpha > 0$ et $\gamma \geqslant 0$.

11. Pour ces conditions initiales, déterminer la valeur de $\overline{K}$, identifier sur la figure 1 la courbe correspondante et déterminer le sens de propagation le long de cette courbe.

12. A partir de la courbe de l'espace des phases correspondant à ces conditions intiales, faire un schéma donnant *qualitativement* l'évolution temporelle des variables $u(t)$ et $v(t)$. On rappelle qu'une courbe fermée dans l'espace des phases caractérise un mouvement périodique.

13. Pour les conditions initiales mentionnées précédemment et en supposant le cas harmonique $\gamma = 0$, déterminer les équations du mouvement pour u et v et la solution de ces équations.

14. Exprimer cette solution harmonique en terme des variables $q(t)$ et $p(t)$. Représenter la courbe $q(t)$ et la commenter.

Pour traiter le cas anharmonique $\gamma \neq 0$, nous allons utiliser la transformation (non-canonique) suivante :

$$u = -a\cos\psi, \quad v = a\sin\psi. \tag{4}$$

Les coordonnées a et ψ sont également lentement variables.

15. Exprimer q en fonction de a, ψ, t et des données du problème et donner une interprétation des variables a et ψ.

16. A partir des équations de Hamilton pour u et v dans le cas $\rho = 0$, exprimer $\dot{a} = \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$ en fonction de ψ et α et exprimer $a\dot{\psi} = a\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ en fonction de a, ψ, α et γ.

17. Pour $\rho = 0$, donner les valeurs de ψ pour lesquelles a est un extremum.

18. En utilisant la valeur obtenue de $\overline{K}$ pour les conditions initiales considérées, donner l'expression de a en fonction de ψ, α et γ. En déduire les valeurs extrémales de a. On rappèle que la fonction racine cubique $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction *impaire*.

19. En utilisant la valeur obtenue de $\overline{K}$ pour les conditions initiales considérées, donner l'expression de $\dot{\psi} = \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ en fonction de γ et a. En déduire que $\psi(t)$ est une fonction croissante du temps.

20. A partir des résultats des questions 18. et 19. tracer l'allure de la fonction $a(t)$.

21. Sachant que $a(t)$ et $\psi(t)$ sont lentement variables par rapport à la fréquence Ω. Tracer l'allure de $q(t)$ pour $\gamma \neq 0$.

22. A partir des résultats des questions 18. et 19., résoudre $t(\psi)$ par quadrature et donner l'expression de la période d'oscillation de la fonction $a(t)$. Vous utiliserez pour cela l'intégrale suivante définie pour $n > 2$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2/n} x} = 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1/2 - 1/n)}{\Gamma(1 - 1/n)},$$