Université Paris Saclay
Année 2023–2024

L3, Magistère, DL, ENS, D2PFO

Partiel de Mécanique Analytique
Durée : 2 heures
Les documents et la calculatrice sont interdits

*Cet examen partiel de deux heures comporte deux exercices indépendants.*
*La qualité de la rédaction sera prise en compte.*

# 1 Questions de cours et théorème du Viriel

On considère un système, pour lequel toutes les forces dérivent d'un potentiel et qui est décrit par un lagrangien noté $\mathscr{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$, où l'on rappelle que la notation $(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) \equiv (\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha\})$ pour les coordonnées et vitesses généralisées, $\alpha = 1, \ldots, n$.

1. Donner les équations d'Euler-Lagrange pour $\mathscr{L}$.
2. Définir l'énergie lagrangienne $E(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$. Que vaut $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ ? Montrer le résultat par le calcul.
3. Définir les moments généralisés $p_\alpha$.

Pour une fonction de $n$ variables $F(x_1, \ldots, x_n)$, on dit qu'elle est homogène de degré $k$ si elle satisfait à la relation

$$\forall\lambda > 0, \quad F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k F(x_1, \ldots, x_n)\ . \tag{1}$$

4. Montrer la relation d'Euler

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = kF(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

5. Sans faire de calcul, donner en le justifiant le degré $k$ de la fonction énergie cinétique $T(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ par rapport aux variables $\dot{q}_\alpha$ dans le cas où la transformation des coordonnées cartésiennes aux $q_\alpha$ est indépendante du temps. En déduire la relation d'Euler satisfaite par $T$.

On fait maintenant les hypothèses suivantes :

— toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle $U(q_\alpha)$, indépendante des $\dot{q}_\alpha$,
— l'énergie potentielle $U$ est une fonction homogène de degré $k$ pour les variables $q_\alpha$,
— l'énergie cinétique ne dépend que des vitesses généralisées $\dot{q}_\alpha$ et le mouvement est borné.

6. Montrer que

$$2T - kU = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha q_\alpha p_\alpha\right) \tag{3}$$

7. On définit la moyenne temporelle de la grandeur $A$ par

$$\overline{A} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{d}t \, A(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t)) \ . \tag{4}$$

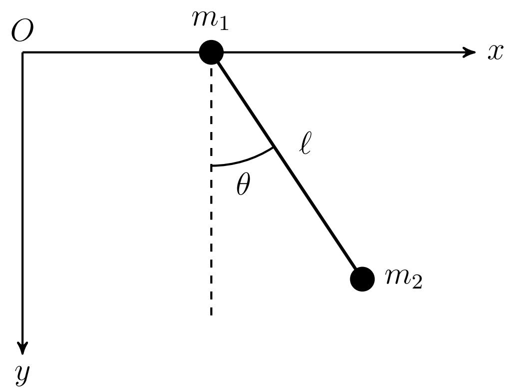
Montrer le théorème du Viriel : $2\overline{T} = k\overline{U}$.

On considère un ensemble de $N$ masses $m_i$ en interaction gravitationnelle et paramétrées par des coordonnées cartésiennes $\mathbf{r}_i$. On cherche à déterminer des lois d'échelles qui relient les grandeurs caractéristiques. Soient $m$ la masse typique d'un objet, $M = Nm$ la masse totale, $R$ sa taille typique et $V$ la vitesse typique des objets. On rappelle que la constante gravitationnelle vaut $G \simeq 6.7 \times 10^{-11}$ m$^3$.kg$^{-1}$.s$^{-2}$, l'année-lumière $9.5 \times 10^{15}$ m et la masse solaire $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

8. Écrire le potentiel d'interaction entre les $N$ masses. Est-ce une fonction homogène et, si oui, donner son degré ?
9. Trouver une relation d'échelle exprimant $V$ en fonction de $G$, $M$ et $R$.
10. Pour la galaxie Andromède, on a typiquement $M = 4 \times 10^{11} M_\odot$ et $R = 125\,000$ années-lumière. Estimer $V$ en km.s$^{-1}$.

# 2 Le pendule simple sur un rail

Dans ce problème nous allons considérer un système composé de deux masses $m_1$ et $m_2$. La masse $m_1$ se déplace sans frottement le long d'un rail horizontal. La masse $m_2$ est attachée à la masse $m_1$ par une tige rigide de masse négligeable et de longueur $\ell$. On introduit le repère $Oxyz$ (voir figure ci-dessous) dans lequel on note $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$ les coordonnées des masses. $Ox$ est l'axe horizontal dans la direction du rail de vecteur unitaire $\mathbf{e}_x$ et l'axe $Oy$ est l'axe vertical orienté vers le bas de vecteur unitaire $\mathbf{e}_y$. Le champ de pesanteur est supposé constant $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_y$. On note $\theta$ l'angle de la tige rigide avec l'axe vertical et $u = x_1/\ell$ une variable adimensionnée décrivant la position de $m_1$ le long de $Ox$.



## 2.1 Préliminaire

Pour l'instant nous allons supposer que la masse $m_1$ se déplace librement sur le rail.

11. Quelles sont les contraintes reliant les coordonnées, s'agit-il de contraintes holonomes ? Quel est le nombre de degrés de liberté.
12. Donner l'expression des coordonnées cartésiennes des masses $m_1$ et $m_2$ en fonction des variables $u$ et $\theta$. En déduire l'expression de l'énergie cinétique $T(\theta, \dot{\theta}, u, \dot{u})$.
13. Donner l'expression du potentiel $U(\theta)$.
14. Montrer que le Lagrangien $\mathscr{L}(\theta, \dot{\theta}, u, \dot{u})$ du système s'écrit

$$\mathscr{L}(\theta, \dot{\theta}, u, \dot{u}) = \mathcal{I}\left[\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}^2 + \alpha\cos\theta\dot{u}\dot{\theta} + \alpha\omega_0^2\cos\theta\right] . \tag{5}$$

    Donner l'expression de $\alpha$, $\mathcal{I}$ et $\omega_0$ en fonction de $m_1$, $m_2$, $\ell$ et $g$. Quelle condition doit satisfaire $\alpha$ ?

15. Dériver les équations de Euler-Lagrange pour ce système.

## 2.2 Petites oscillations

On considère tout d'abord le cas d'un mouvement de petits angles $\theta \ll 1$ autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

16. Linéariser les équations du mouvement.
17. Donner la solution générale de ce problème pour les conditions initiales $\dot{u}(t = 0) = 0$, $u(t = 0) = 0$, $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$ et décrire le mouvement.
18. Discuter le cas limite $m_1 \gg m_2$.

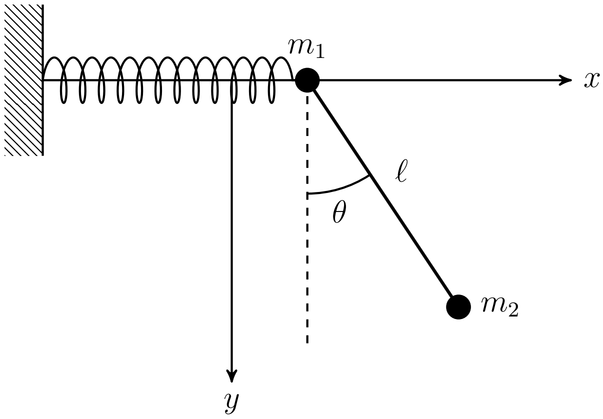
## 2.3 Mouvement d'amplitude quelconque

Nous allons maintenant considérer le cas d'un mouvement d'amplitude quelconque du pendule.

19. Déterminer l'expression des moments conjugués $p_u$ et $p_\theta$.
20. Montrer que $p_u$ est une constante. On note cette constante $p_u = \mathcal{I} \times P$. À quelle symétrie cette conservation fait-elle référence ?
21. Donner l'expression de l'énergie du système.
22. Donner l'expression de $E$ en fonction de $P$, $\alpha$, $\omega_0$ et des variables $\theta$ et $\dot{\theta}$.
23. On considère les conditions initiales $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$. Donner la valeur minimale de $|\dot{\theta}_0|$ pour que le pendule puisse faire un tour complet.

## 2.4 Masse attachée par un ressort

Nous allons maintenant supposer que la masse $m_1$ est attaché à un ressort de constante de force $k$. On choisit la position d'équilibre du sytème tel que $u = 0$.




24. Donner l'expression du Lagrangian en incluant l'effet du ressort. On utilisera pour cela la constante
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \tag{6}$$
25. Donner l'expression du Lagrangian dans l'approximation harmonique autour de la position d'équilibre $u = 0$ et $\theta = 0$.
26. En déduire les équations du mouvement.
27. Dans le cas simple $\omega_0 = \omega_1$, donner l'expression des fréquences propres du système en fonction de $\omega_0$ et $\alpha$.