Université Paris Saclay
Année universitaire 2022–2023

L3, Magistère, DL, ENS, D2PFO

Partiel de Mécanique Analytique
Durée : 2 heures
Les documents et la calculatrice sont interdits.

Cet examen d'une durée de deux heures comporte deux questions de cours suivies de deux exercices indépendants. Le premier exercice porte sur le pendule simple et l'intégrale de Painlevé, le second concerne le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique constant.

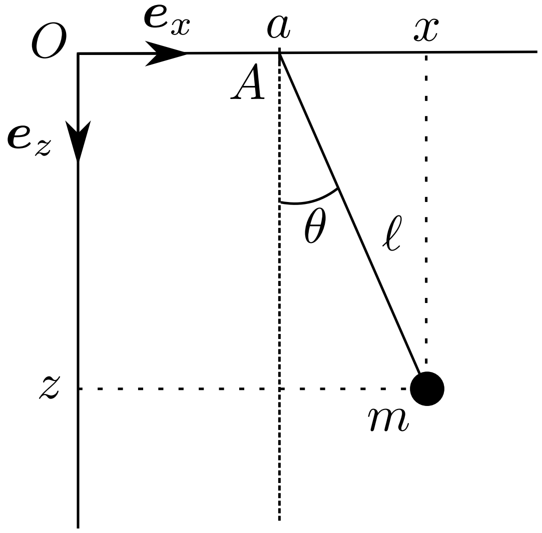
1 Questions de cours

1. Expliquer la technique de résolution par quadrature d'un problème de mécanique comportant un unique degré de liberté.
2. Pour un problème mécanique pour lequel les forces dérivent d'un potentiel non linéaire, confinant, dépendant des coordonnées généralisée uniquement et indépendant du temps, quelle approximation doit-on faire sur le Lagrangien pour obtenir des équations du mouvement linéaires. Expliquer brièvement la méthode de résolution d'un tel problème.

---

2 Pendule simple et intégrale de Painlevé

Ce problème considère le mouvement d'un pendule simple dont le point de fixation A est uniformément accéléré par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0$ de centre O, d'axe horizontal (Ox) dirigé vers la droite, et d'axe verticale (Oz) dirigé vers la bas, de sorte que l'accélération de la pesanteur est $\boldsymbol{g} = g\boldsymbol{e}_z$ avec $g = 9,81$ m.s^{-2}.



Le pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle m située au point M et d'une tige rigide de longueur ℓ sans masse et fixée au point A par une liaison pivot d'axe perpendiculaire au plan (xOz). Ainsi, le pendule est libre d'osciller dans ce plan. Le point d'attache A du pendule se déplace sur l'axe (Ox) : sa position est donnée par $\boldsymbol{OA} = a\boldsymbol{e}_x$ avec $a = a(t)$ une fonction du temps uniquement. L'angle que fait le pendule avec la verticale descendante est notée θ.

3. Indiquer le nombre de degrés de liberté indépendant du système mécanique décrit ci-dessus. Exprimer mathématiquement la contrainte reliant les coordonnées cartésiennes x et z en fonction des données du problème. Cette contrainte est-elle dépendante du temps ?
4. Calculer la position $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ et la vitesse $\dot{\boldsymbol{r}}$ du pendule dans le référentiel $\mathcal{R}_0$. Exprimer le résultat en fonction de θ, $\dot{\theta}$, a et $\dot{a}$ et ℓ.
5. Calculer l'énergie cinétique T du pendule en fonction de $\theta, \dot{\theta}, \ell, \dot{a}, m$.
6. Calculer l'énergie potentielle V du pendule en fonction de θ, g, ℓ, m. Cette énergie potentielle est-elle une fonction croissante de z ?
7. Donner l'expression du Lagrangien du système $L(\theta, \dot{\theta}, t)$ en fonction des paramètres m, $\dot{a}$, g, ℓ.
8. Pour chaque degré de liberté identifié à la question 3, fournir l'équation d'Euler-Lagrange correspondante. On pensera à simplifier les expressions autant que possible et à introduire la pulsation caractéristique $\omega = \sqrt{g/\ell}$.
9. Calculer explicitement la dérivée partielle $\partial L/\partial t$. Dans le cas où l'accélération $\ddot{a}$ est constante dans le temps, trouver la fonction $W(\theta, t)$ telle que

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dW}{dt}. \tag{7}$$

   L'expression de W attendue dépend uniquement des paramètres m, $\ddot{a}$, a, ℓ et θ.
10. Rappeler la définition de l'énergie E d'un système mécanique en fonction du lagrangien, de ces dérivées partielles et des vitesses généralisées. Exprimer E pour le système mécanique considéré.
11. L'énergie est-elle égale à l'énergie mécanique pour ce problème ?
12. Le lagrangien $L(\theta, \dot{\theta}, t)$ dépend explicitement du temps, l'énergie E n'est donc pas conservée. Relier la dérivée totale de l'énergie par rapport au temps à la dérivée partielle par rapport au temps du Lagrangien (énoncer le résultat du cours sans nécessairement le démontrer).
13. Lorsque $\ddot{a} = cte$, déduire des questions 9 et 12 l'existence d'une intégrale première du mouvement I, appelée intégrale de Painlevé. Donner l'expression de cette quantité conservée dans le temps.

On cherche à présent à retrouver l'intégrale première de Painlevé par une autre méthode. Pour cela, on se place dans le référentiel non galiléen liée au point A et en translation rectiligne dans la direction de l'axe (Ox). Dans ce référentiel, nous allons trouver un nouveau lagrangien $\mathscr{L}$ indépendant du temps, intégrant les forces d'inertie, et permettant de décrire correctement le mouvement du système.

14. Montrer que le Lagrangien $L(\theta, \dot{\theta}, t)$ peut s'exprimer sous la forme

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \mathscr{L}(\theta, \dot{\theta}) + \frac{d}{dt}\left(m\dot{a}\ell \sin\theta\right) + \frac{1}{2}m\dot{a}^2 \tag{13}$$

où vous préciserez l'expression de $\mathscr{L}(\theta, \dot{\theta})$ et vérifierez que cette fonction est indépendante du temps quand l'accélération $\ddot{a}$ est constante.

15. Justifier pourquoi la fonction $\mathscr{L}(\theta, \dot{\theta})$ décrit correctement la dynamique du système considéré.
16. Calculer l'énergie $\mathscr{E}(\theta, \dot{\theta})$ associée au lagrangien $\mathscr{L}(\theta, \dot{\theta})$. Est-elle reliée à l'intégrale première I trouvée précédemment ?

---

3 Particule dans un champ électromagnétique constant

Une particule de charge q et de masse m évolue dans un champ électromagnétique constant et uniforme dans le repère $\mathcal{R}$, avec $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x$ le champ électrique et $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ le champ magnétique. La position $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ de la particule est repérée par rapport à l'origine O du repère $\mathcal{R}$ à l'aide des coordonnées cartésiennes (x, y, z) associées à la base orthonormée directe $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$, soit $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$. On notera la vitesse $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$. Le gradient dans l'espace des positions sera noté ∇, et celui dans l'espace des vitesses $\nabla_{\boldsymbol{v}}$.

On rappelle l'expression du potentiel généralisé pour le champ électromagnétique

$$U(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = q\Phi(\boldsymbol{r}) - q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{19}$$

en terme du potentiel scalaire Φ et du potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$. On rappelle que le fait que la force de Lorentz $\boldsymbol{F}$ dérive de ce potentiel généralisé se traduit par

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\nabla_{\boldsymbol{v}} U}{dt} - \nabla U. \tag{20}$$

17. Vérifier que les potentiels $\Phi(\boldsymbol{r}) = -Ex$ et $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (xB/2)\boldsymbol{e}_y - (yB/2)\boldsymbol{e}_x$ conduisent à l'expression attendue de la force de Lorentz.
18. Écrire le Lagrangien $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ pour la particule en mouvement dans ce champ électromagnétique constant et uniforme. On utilisera les coordonnées et vitesses cartésiennes, ainsi que les paramètres m, q, E et B. Préciser l'existence (ou non) de coordonnées cycliques.
19. Donner les équations d'Euler Lagrange et les éventuels moments généralisés conservés. On introduira la pulsation cyclotron $\omega \equiv qB/m$.
20. Résoudre le mouvement dans la direction (Oz) pour une condition initiale (i.e. temps $t = 0$) correspondant à la particule située en $\boldsymbol{r}(0) = 0$ avec une vitesse $\boldsymbol{v}(0) = V_z\boldsymbol{e}_z$.
21. On définit la variable complexe $Z \equiv x + \imath y$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps $V = \dot{Z}$. Trouver l'équation du mouvement pour V sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre.
22. Avec les conditions initiales de la question 20, intégrer sur le temps l'équation du mouvement pour V.
23. Déduire de $V(t)$ l'expression de la fonction $Z(t)$ et conclure sur l'allure des trajectoires.
