Université Paris Saclay | L3, Magistère, DL, ENS, D2PFO
Année universitaire 2021–2022

Partiel de Mécanique Analytique
Durée : 2 heures
Les documents et la calculatrice sont interdits

Ce partiel d'une durée de deux heures comporte deux questions de cours suivies de deux exercices indépendants, l'un portant sur un pendule souple et l'autre sur le disque d'Euler.

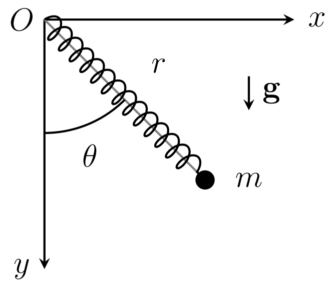
1 Questions de cours

1. Énoncer le théorème de Noether.
2. Énoncer le principe de Maupertuis, puis formuler l'analogie entre la mécanique et l'optique découlant de ce principe.

---

2 Le pendule souple

On considère dans cet exercice un pendule souple constitué d'une masse m attachée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k. Le pendule peut osciller dans le plan xOy. On va considérer que le ressort formera toujours une ligne droite mais de longueur variable r. La masse m subit le champ de pesanteur $\mathbf{g}$. Nous allons repérer les coordonnées de la masse m dans un repère polaire (r, θ), où θ est l'angle que fait le ressort par rapport à la verticale. On notera également la pulsation propre du ressort $\omega = \sqrt{k/m}$.



3. Déterminer l'énergie cinétique de la masse m en fonction de r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$.
4. Déterminer l'énergie potentielle du système due au champ de pesanteur et à la force de rappel du ressort en fonction de r et θ et des paramètres m, g, ω et ℓ_0.
5. Donner l'expression du Lagrangien $\mathscr{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ du système.
6. Déterminer les équations d'Euler-Lagrange pour ce système.
7. Déterminer l'ensemble des positions d'équilibre r_0 et θ_0 du système. Sans faire de calcul expliquer laquelle d'entre-elles est une position d'équilibre stable.
8. On cherche à étudier le mouvement autour de la position d'équilibre stable $r = r_0 + x$ et $\theta = \theta_0 + \varphi$. On supposera que x et φ restent petits. Linéariser les équations d'Euler-Lagrange permettant de décrire les coordonnées x et φ.
9. Dans cette approximation harmonique est-ce que les mouvements d'oscillation du pendule et du ressort sont couplés ? Que doit-on faire si l'on veut décrire le couplage entre ces deux mouvements ? Quels sont alors les termes du lagrangien responsable du couplage ?

---

3 Disque roulant sur un cercle

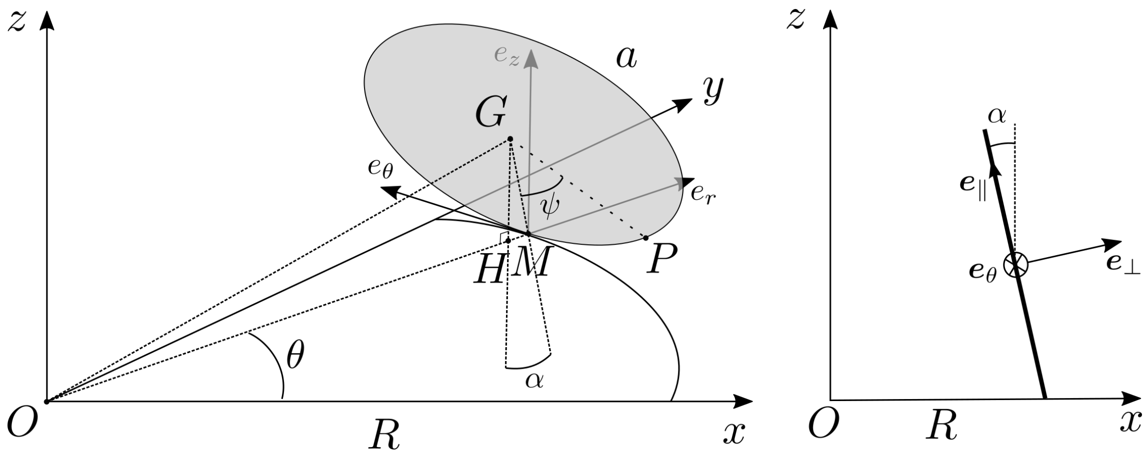


FIGURE 1 – (Gauche) Disque (grisé) de rayon a en roulement sans glissement sur un cercle de rayon R. L'angle $(HGM) = \alpha$ correspond à l'inclinaison de la pièce par rapport à la verticale. (Droite) Disque vu de côté (configuration à $\theta = 0$) muni des axes principaux d'inertie $(\mathbf{e}_\perp, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\parallel)$.

Dans cet exercice on considère le mouvement d'un disque se déplaçant sur un cercle. Ce problème correspond par exemple au cas d'une pièce de monnaie que l'on fait tourner sur elle même. Le disque de rayon a, de masse m et d'épaisseur négligeable est astreint à rouler sans glissement sur un cercle de rayon R appartenant au plan horizontal (xOy). Le champ de pesanteur $\boldsymbol{g} = -g\mathbf{e}_z$ est dirigé vers le bas dans la direction de l'axe (Oz).

Le centre de masse du disque est noté G. Le point de contact entre le disque et le plan horizontal est noté M. La projection du centre de gravité du disque dans le plan horizontal est notée H. Le point P est fixe dans le repère lié au disque. A l'intant initial, l'angle $\psi = (MGP)$ est nul et le point P appartient à l'axe (Ox). On utilise le repère orthonormé direct de la base cylindrique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Dans le plan (xOy), le point M est repéré par l'angle θ entre l'axe (Ox) et le vecteur $\mathbf{e}_r$. L'inclinaison du disque par rapport au plan horizontal est donné par l'angle $\alpha = (HGM)$ que fait la verticale $\mathbf{e}_z$ avec la droite (GM). Les angles α et θ sont utilisés comme coordonnées généralisées.

Le théorème de Koenig indique que l'énergie cinétique du disque T peut se décomposer en T_g l'énergie cinétique du centre de masse affecté de toute la masse du disque et T^* l'énergie cinétique du disque associée à son mouvement de rotation dans le référentiel du centre de masse.

10. Donner le vecteur position du centre de masse $\mathbf{r}_G$ dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$.
11. Donner le vecteur vitesse du centre de masse $\dot{\mathbf{r}}_G$. On exprimera le résultat dans la base $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_\perp = \cos(\alpha)\mathbf{e}_r + \sin(\alpha)\mathbf{e}_z$ qui est le vecteur unitaire orthogonal au disque.
12. Calculer l'énergie cinétique $T_g = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_G^2$ associée au mouvement du centre de masse.
13. Donner l'énergie potentielle de pesanteur du disque. On admettra que cette énergie potentielle s'applique au centre de masse G affecté de toute la masse.

Le vecteur vitesse angulaire du disque est $\mathbf{\Omega} = -\dot{\psi}\mathbf{e}_\perp + \dot{\alpha}\mathbf{e}_\theta + \dot{\theta}\mathbf{e}_z$ avec $\dot{\psi} > 0$ lorsque $\dot{\theta} > 0$. On peut décomposer cette vitesse angulaire selon les axes principaux d'inertie du disque : $\mathbf{\Omega} = (-\dot{\psi} + \dot{\theta}\sin\alpha)\mathbf{e}_\perp + \dot{\alpha}\mathbf{e}_\theta + \dot{\theta}\cos\alpha\mathbf{e}_\parallel$. On peut montrer que l'énergie cinétique associée à la rotation du disque s'écrit

$$T^* = \frac{1}{2}\left[2I(\dot{\psi} - \dot{\theta}\sin\alpha)^2 + I\dot{\alpha}^2 + I(\dot{\theta}\cos\alpha)^2\right] \tag{1}$$

où les moments d'inertie calculés en G pour les axes dirigés selon $\mathbf{e}_\perp$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_\parallel$ sont respectivement $2I$, I et I. Pour un disque, on a $I = ma^2/2$.

14. On introduit le paramètre $\beta = R/a$, exprimer l'énergie cinétique totale du disque $T = T_g + T^*$ en fonction des variables α, $\dot{\alpha}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ et des paramètres m, a et β.
15. Justifier la relation $a\dot{\psi} = R\dot{\theta}$. A quelle type de contrainte cette relation correspond-elle ?
16. Exprimer le lagrangien $\mathscr{L}$ du système en fonction de $\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\theta}$ et des paramètres g, m, a et β.
17. Montrer que $L = ma^2\dot{\theta}\,(2(\beta - \sin\alpha)^2 + (1/2)\cos^2\alpha)$ est une constante du mouvement. Expliquer comment on trouve imédiatement une telle constante du mouvement.
18. A partir du Lagrangien $\mathscr{L}$, écrire l'équation du mouvement pour la variable α.
19. On cherche une solution en régime permanent $\alpha = \alpha_0$ ($\dot{\alpha} = 0$) et $\dot{\theta} = \text{cste}$. Donner l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de g, a, β et α_0.
20. A cause des frottements (qui n'ont pas été inclus dans cette description), le système perd de l'énergie et finit par s'immobiliser avec $\alpha = \pi/2$. Juste avant d'être complètement immobile, le disque continue de tourner sur lui même alors que son centre de masse est immobile. Donner l'expression de β en fonction de α_0 pour que le centre de masse du disque soit immobile en régime permanent.
21. En déduire alors l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de α_0, g et a dans ce cas.
22. Déterminer la limite $\dot{\theta}$ pour $\alpha_0 \to \pi/2$. Est-ce que ce résultat correspond à ce qui se passe lorsque vous faites tourner une pièce de monnaie sur elle-même ?
23. Dans le cas du régime non permanent, montrer que grâce à la constante L on peut décrire la dynamique selon α grâce à un Lagrangien réduit $\mathscr{L}'(\alpha, \dot{\alpha})$ pour la coordonnée α.
$$\mathscr{L}'(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{3}{4}ma^2\dot{\alpha}^2 - V_{\text{eff}}(\alpha)$$
Donner l'expression de $V_{\text{eff}}(\alpha)$ en fonction de L, g, m, a et β.
24. A partir de ce Lagrangien réduit, déterminer sans la résoudre l'équation du mouvement pour α.
