Partiel – Mécanique Analytique

2 Novembre 2020

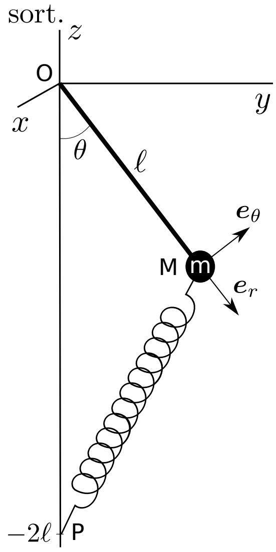
Ce partiel d'une durée de 1h45 comporte deux exercices indépendants, l'un portant sur un pendule simple relié à un ressort et l'autre sur la dynamique d'ions piégés.

---

1 Pendule simple relié à un ressort

Une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable est mobile autour de l'une de ses extrémités fixée en un point O. A l'autre extrémité M est attachée une masse m. Cette même masse est reliée par l'intermédaire d'un ressort de masse négligeable et de raideur k à un point P situé sur la même verticale que celle passant par O, à la distance 2ℓ en dessous de ce point (voir figure). La longueur au repos d du ressort est telle que $0 < d \leq \ell$. Les frottements sont négligés. On choisira comme coordonnées généralisées θ l'angle que fait **OM** avec la verticale descendante **OP**. L'accélération de la pesenteur est $-g\boldsymbol{e}_z$.

Figure 1 – Pendule simple relié à un ressort.



1) Exprimer l'énergie cinétique du pendule en fonction de la vitesse généralisée $\dot{\theta}$ et des données du problème.
2) Exprimer l'énergie potentielle totale U du pendule, composée de l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle élastique, en fonction de la coordonnée généralisée θ et des données du problème.
3) En déduire la fonction de Lagrange $L(\theta, \dot{\theta})$ du système.
4) Donner le développement harmonique de la fonction de Lagrange dans l'approximation des petits angles.
5) Écrire l'équation du mouvement dans cette approximation.
6) Résoudre cette équation et préciser la pulsation du pendule en fonction des données du problème.

---

2 Dynamique d'ions piégés

On considère un piège à ions (par exemple un piège de Paul) linéaire qui permet de confiner le mouvement de particules, de masse m et de charge q, le long d'une seule dimension de l'espace que l'on notera x. On suppose que les ions sont identiques et que chacun d'eux est soumis à une force extérieur de piégeage qui dérive de l'énergie potentielle $U_{\text{ext}}(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ (où ω_0 est une caractéristique du piège) ainsi qu'à la force de répulsion électrostatique exercée par les autres ions. La force de pesanteur est négligée.

On analysera la situation où trois ions seulement sont piégés. On choisira comme coordonnées généralisées les coordonnées cartésiennes de ces ions x_1, x_2 et x_3 avec $x_1 < x_2 < x_3$. Pour alléger les calculs on ne prendra en compte que les interactions électrostatiques entre les voisins les plus proches, l'interaction électrostatique entre les particules 1 et 3 sera donc négligée. On notera $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$, où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide.

7) Exprimer l'énergie potentielle totale du système $U(x_1, x_2, x_3)$ en fonction de m, ω_0 et e.
8) Donner l'expression du Lagrangien $\mathscr{L}(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$.

9) Trouver les positions d'équilibre $x_{i,e}$ $(i = 1, 2, 3)$ des trois ions en utilisant du fait de la symétrie du problème $x_{1,e} = -x_{3,e}$ et $x_{2,e} = 0$. On introduit la longueur a définie par $a^3 = \frac{e^2}{m\omega_0^2}$. Exprimer ces positions d'équilibre en fonction de a.

10) On se propose d'étudier les petites oscillations autour de l'équilibre. Pour cela on pose $x_i(t) = x_{i,e} + q_i(t)$ avec $|q_i(t)| \ll a$. Donner l'expression de l'énergie potentielle $U(q_1, q_2, q_3)$ dans l'approximation harmonique en fonction de m, ω_0 et a. On rappelle : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$

11) Montrer que le Lagrangien *approché* peut s'écrire

$$\mathscr{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right) - \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(3q_1^2 + 5q_2^2 + 3q_3^2 - 4q_1q_2 - 4q_2q_3\right)$$

12) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange à partir du Lagrangien *approché*. Chercher une solution sous la forme $q_i(t) = a_i e^{\mathrm{i}\omega t}$ et exprimer les pulsations propres ω_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ en fonction de ω_0.

13) Pour chaque fréquence propre, déterminer les relations entre les a_i qui définissent les modes propres. Représenter le mouvement associé à chaque mode et donner une interprétation physique.

14) On peut montrer et on admettra ici que le rapport de fréquences des deux modes propres de plus basse fréquence est indépendant du nombre d'ions piégés. La figure 2 montre deux séries d'images, prises à intervalles de temps réguliers, d'une chaîne linéaire (verticale sur la figure) de sept ions de calcium éclairés par des faisceaux lasers et dont on observe la fluorescence (chacune des deux images sur la figure correspond à une fréquence excitatrice). Identifier la correspondance entre ces deux modes excités (qui sont les modes propres de plus basse fréquence) et les modes que vous avez trouvés dans le cas des trois ions piégés. Montrer que le rapport des fréquences de ces modes observés expérimentalement est en accord avec les résultats établis précédemment.

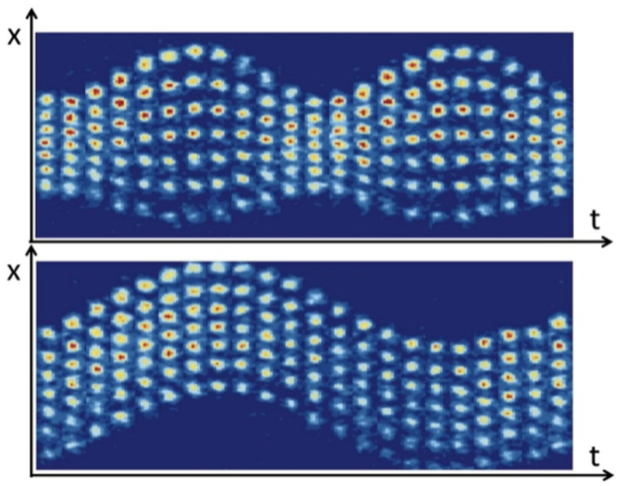


FIGURE 2 – Modes d'oscillation d'une chaîne de sept ions (H.C. Nägerl et al., Opt. Exp. **3**, 89–96 (1998))