Université Paris Saclay
Année universitaire 2021–2022

L3, Magistère, DL, ENS, D2PFO

---

Examen de Mécanique Analytique
Durée : 2 heures
Les documents et la calculatrice sont interdits

---

*Cet examen d'une durée de deux heures comporte deux questions de cours suivies de deux exercices indépendants, l'un portant sur le portrait de phase associé au mouvement d'une perle glissant sur un cerceau et l'autre sur un électron confiné dans un champ magnétique.*

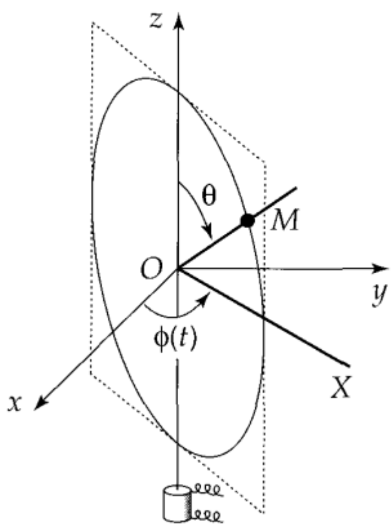
# 1 Questions de cours

1. Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi pour un système à deux degrés de liberté correspondant aux coordonnées généralisées $(q_1,q_2)$, moments généralisés $(p_1, p_2)$ et Hamiltonien $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Donner une définition précise de l'inconnu de cette équation dont vous préciserez le type.
2. Qu'est-ce qu'un changement de variable canonique ? Donner un exemple d'un tel changement de variable et un autre exemple qui n'est pas canonique.

---

# 2 Perle sur un cerceau : portrait de phase

Dans cet exercice, on cherche à tracer le portrait de phase associé au mouvement d'une perle de masse $m$ située au point M et glissant sans frottement sur un cerceau de rayon $R$ et de centre O. Le cerceau tourne sur lui même avec un vecteur vitesse angulaire $\mathbf{\Omega} = \omega \mathbf{e}_z$ porté par l'axe Oz dirigé vers le haut. Le champ de gravité est $\boldsymbol{g} = -g\mathbf{e}_z$. La position de la perle est repérée par l'angle $\theta$ entre la droite OM et le vecteur $\mathbf{e}_z$. On note $L$ le moment conjugué à la coordonnée généralisée $\theta$. Le Hamiltonien de ce problème est




$$H(\theta, L) = \frac{L^2}{2mR^2} + \frac{1}{2}mR^2(2\omega_0^2 \cos\theta - \omega^2 \sin^2\theta). \quad (1)$$

On identifie dans ce Hamiltonien le potentiel

$$V(\theta) = \frac{1}{2}mR^2(2\omega_0^2 \cos\theta - \omega^2 \sin^2\theta). \quad (2)$$

Dans l'ensemble de l'exercice, on choisit une vitesse angulaire elevée $\omega > \omega_0$.

3. Quelle est la période de la fonction $V(\theta)$ ? Calculer sa dérivée par rapport à $\theta$ et donner les positions des extrema dans $[0, 2\pi[$.

4. Donner la valeur de l'énergie potentielle en chacun des extrema. Exprimer les énergies trouvées à l'ordre 0 en $\omega_0/\omega \ll 1$.
5. Tracer la fonction $V(\theta)$ sur $[0, 2\pi]$ en faisant apparaître les positions des extrema et la valeur de $V$ pour chacun d'eux.
6. L'énergie $E = H(\theta, L)$ est-elle une constante du mouvement ? Justifier votre réponse par un calcul.
7. À l'aide des questions précédentes, distinguer trois intervalles d'énergie pour lesquels les orbites dans l'espace des phases seront qualitativement différentes.
8. Exprimer le moment $L$ en fonction de $E$, $m$, $R$ et du potentiel $V(\theta)$. Préciser les conditions de validité de l'expression trouvée en fonction de la valeur de l'énergie $E$.
9. Tracer le portrait de phase dans le plan $(\theta, L)$. Vous tracerez au moins une orbite par intervalle de la question précédente et les séparatrices correspondants aux énergies de transition entre ces différents types d'orbite. Préciser le sens de propagation le long de chaque ligne de l'espace des phases.
10. (Bonus) Dériver l'expression du Hamiltonien de l'équation (1) en précisant la valeur de la pulsation $\omega_0$ en fonction des données du problème. Ce Hamiltonien coïncide-t-il avec l'énergie mécanique de la perle ?

---

# 3 Electron confiné dans un champ magnétique

On considère dans ce problème le mouvement d'un électron de masse $m$ et de charge $-e$ sous l'influence d'un champ magnétique uniforme. Nous allons considérer tout d'abord le mouvement de l'électron sans confinement puis nous allons considérer les effets d'un confinement par un potentiel extérieur. On introduit le repère $Oxyz$ associé à la base orthonormée $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et on suppose que le champ magnétique est orienté le long de l'axe $Oz$ $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Nous allons considérer le mouvement de l'électron dans le plan $Oxy$ orthogonal à cet axe.

Nous allons pour simplifier supposer que l'électron se déplace de manière libre et ne subit que le champ magnétique. La position de l'électron est donnée par le vecteur $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ et son moment conjugué est donné par $\mathbf{p} = p_x\mathbf{e}_x + p_y\mathbf{e}_y$. On rappelle que le Hamiltonien d'un électron classique en interaction avec un champ magnétique s'écrit

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m}$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est le potentiel vecteur. On utilisera la jauge de Landau $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = Bx\mathbf{e}_y = \left(\frac{m\omega_c}{e}\right) x\mathbf{e}_y$, où $\omega_c = eB/m$ est la fréquence cyclotron.

11. Donner l'expression de $H(x, p_x, p_y)$ en fonction de $x$, $p_x$, $p_y$, $m$ et $\omega_c$.

Nous allons procéder à une transformation canonique $(x, y, p_x, p_y) \to (\theta, Q, J, P)$ qui dérive de la fonction génératrice de première espace suivante

$$F_1(x, y, \theta, Q) = -\frac{m\omega_c}{2}(x - Q)^2 \tan\theta - m\omega_c yQ.$$

On rappelle qu'une fonction génératrice de première espèce d'une transformation canonique dépend des anciennes et nouvelles coordonnées selon

$$\mathrm{d}F_1(x, y, \theta, Q) = p_x\mathrm{d}x + p_y\mathrm{d}y - J\mathrm{d}\theta - P\mathrm{d}Q.$$

12. Déterminer l'expression de $x$, $y$, $p_x$ et $p_y$ en fonction de $\theta$, $Q$, $J$ et $P$, $m$ et $\omega_c$.
13. En déduire l'expression de $H$ en fonction des nouvelles variables $\theta$, $Q$, $J$ et $P$ et des paramètres du problème.
14. Ecrire les équations de Hamilton pour les nouvelles variables et donner la solution de ces équations.
15. Décrire et tracer la trajectoire de l'électron dans le plan $xOy$ et donner une interprétation physique aux variables $Q$, $P$, $\theta$ et $J$.

Nous allons supposer que l'électron est confiné à proximité de l'axe $Ox$ et subit également un potentiel $V(x)$ pair et coercif, i.e. $V(x \to \infty) = \infty$.

16. En l'absence de champ magnétique, décrire qualitativement l'effet du potentiel $V(x)$ et le type de mouvement qu'il induit.
17. Donner l'expression de l'Hamiltonien $H(\theta, J, Q, P)$ en incluant l'effet du potentiel et du champ magnétique en fonction des variables $\theta$, $J$, $Q$ et des données du problème.
18. En supposant que le potentiel $V(x)$ varie peu sur une échelle correspondant au rayon de Larmor $\sqrt{\frac{2J}{m\omega_c}}$, justifier que l'on peut effectuer un développement limité au premier ordre du potentiel en $x = Q$. Cette approximation est-elle plutôt valide pour un champ magnétique fort ou faible ?

En plus de l'approximation de la question précédente, nous allons utiliser la théorie des perturbations adiabatiques au premier ordre.

19. Déterminer l'expression de $H(Q, J)$ en fonction de $\omega_c$, $J$ et $V(Q)$, dans le cadre des approximations mentionnées ci-dessus.
20. Donner les équations de Hamilton pour les variables $\theta$, $J$, $Q$ et $P$.
21. Determiner la solution de ces équations.
22. Décrire le mouvement en terme des variables $x$ et $y$ dans une zone ou le potentiel $V(Q)$ est croissant.
23. En déduire le mouvement d'un gaz, constitué d'électrons n'interagissant pas entre eux, et sujet à un potentiel de la forme suivante :