Feuille 1* : séries numériques

Exercice 1. [**Aspects pratiques**]
Donner la nature des séries de terme général:

1. $u_n = 1 - \tanh(n)$ où $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,
2. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n^\kappa}\right)^n$ où $\kappa > 0$,
3. $u_n = \exp(\lambda(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}))$ où $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$,
4. $u_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)\cdot\ldots\cdot(1+a^n)}$ où $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (*) On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \arctan u_n$. Quelle est nature de $\sum u_n^\alpha$, $\alpha > 0$?

Exercice 3. Soit (u_n) une suite réelle positive

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge et si $\alpha \geq 1$ alors $\sum u_n^\alpha$ converge.
2. Si $\sum u_n^2$ converge que dire de $\sum \frac{u_n}{n}$?
3. Si $\sum u_n^2$ converge que dire de $\sum \frac{u_n \log u_n}{\log n}$?

Exercice 4. Montrer que si u_n décroit vers 0 et $\sum u_n$ converge, alors nu_n tend vers 0. Que dire de la série de terme général $v_n = \min(u_n, 1/n)$? Et sans l'hypothèse de décroissance?

Exercice 5. Soit $\sigma : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une bijection. Quelle est nature de $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 6. Soient $\sum u_n$ et $\sum |u_{n+1} - u_n|$ convergentes. Est-ce que $\sum u_n^2$ est convergente?

Exercice 7. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 = 1$, $\sum u_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{2n} + u_{2n+1}$. Calculer $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 8. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles positives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n + b_n$ et $\sum b_n$ converge. Montrer que $\lim a_n$ existe et est finie.

Exercice 9. (**) [**Critère de Cauchy**]
Soit (u_n) une suite strictement positive. On note $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer successivement:

1. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum \frac{u_n}{U_n}$ diverge.
2. Montrer que pour $n \geq 1$, $\frac{u_n}{(U_n)^2} \leq \frac{1}{U_{n-1}} - \frac{1}{U_n}$. En déduire, la convergence de $\sum \frac{u_n}{(U_n)^2}$.
3. Finalement, montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum \frac{u_n}{(U_n)^\alpha}$ converge.

Exercice 10. (***) [**Inégalité de Carlemann**]
Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs. On pose $b_n = (a_1 \cdot ... \cdot a_n)^{1/n}$, (b_n) est donc une suite des moyennes géométriques de n premiers termes de la suite $(a_n)_{n>0}$.

1. Utiliser Exercice 10 de TD1 pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq \frac{e}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k a_k$ puis que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k a_k$ converge.
3. Montrer que la série $\sum b_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.