Donner un équivalent en $+\infty$ de

$$f(x) = (x^3+x^2)^{1/3} - \sqrt{x^2+ax}$$

On a $f(x) = \left(x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - \left(x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\underset{\underset{x>0}{\uparrow}}{=} x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} - x\left(1+\frac{a}{x}\right)^{1/2}$$

$$= x\left(1+\frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) - 1 - \frac{a}{2x} + \frac{a^2}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + u^2\varepsilon(u)$

avec $\alpha = \frac{1}{3}$ puis $\alpha = \frac{1}{2}$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a^2}{8} - \frac{1}{9}\right)\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Conclusion : Si $a \neq \frac{2}{3}$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$

Si $a = \frac{2}{3}$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{18x}$