
TRANSFERTS THERMIQUE



Georges GAUTHIER
Laboratoire FAST
Bât 530 Bureau F116



georges.gauthier@universite-paris-saclay.fr

Chapitre I Introduction : Énergie thermique

1- Énergie thermique

Système thermodynamique à l'équilibre

$$E^{tot} = E_{m\acute{e}canique} + E_{interne}$$

$$E^{tot} = E_p + E_c + U$$

$$\Delta U = W + Q$$

$$Q_{max} = mCT$$

Solides et Liquides
incompressibles

$$Q_{max} = mCT$$

Gaz

$$Q_{max} = mC_v T$$

$$Q_{max} = mC_p T$$

Quelques exemples

Matériaux	$C(J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1})$
Asphalte	1021
Béton	880
Verre	720
Bois	1200-2700
eau liquide	4185

Matériaux	$C_p(J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1})$
Air	1004
Diazote	1025
Argon	520
Dioxygene	920
Vapeur d'eau	2010

Transfert d'énergie thermique

Q Chaleur

$$[Q] = ML^2T^{-2} \quad (\text{Joules})$$

$$\text{Flux d'énergie : } [\dot{Q}] = ML^2T^{-3} \quad (\text{Watt})$$

Plusieurs mode de transport:

- **Diffusif** (proche en proche) : **conduction**
- **Convectif** (emporter par le milieu)
- **Radiatif** (photons)

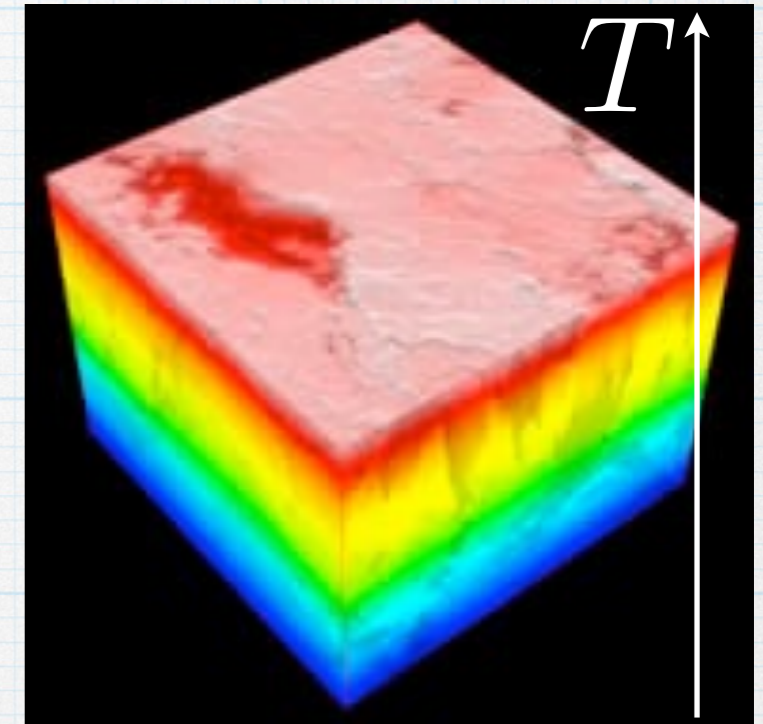
Transport de l'énergie thermique

Chaleur \dot{Q}

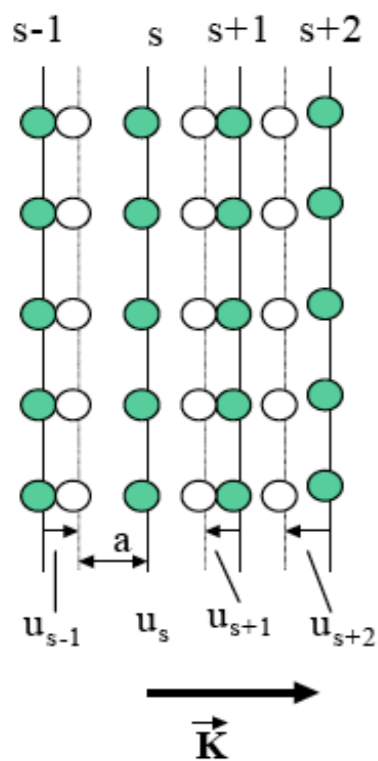
- Dans les solides :

Les électrons dans les métaux

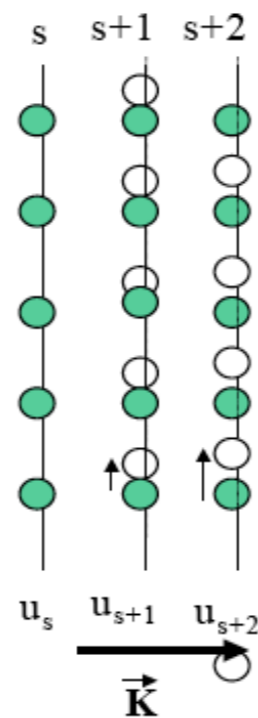
Les phonons dans les isolants et semi-conducteurs



Onde longitudinale



Onde transversale



Phonons : Mode de vibration de la maille cristalline. Cf Ch. Kittel (Physique de l'état solide, 5e édition Dunod Université 1983)

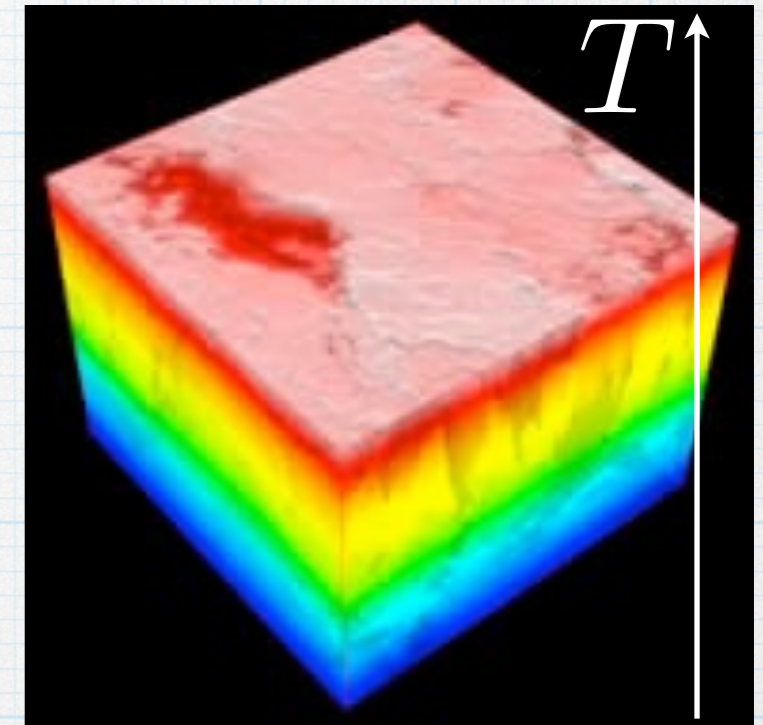
Transport de l'énergie thermique

Chaleur \dot{Q}

- Dans les solides :

Les électrons dans les métaux

Les phonons dans les isolants et semi-conducteurs

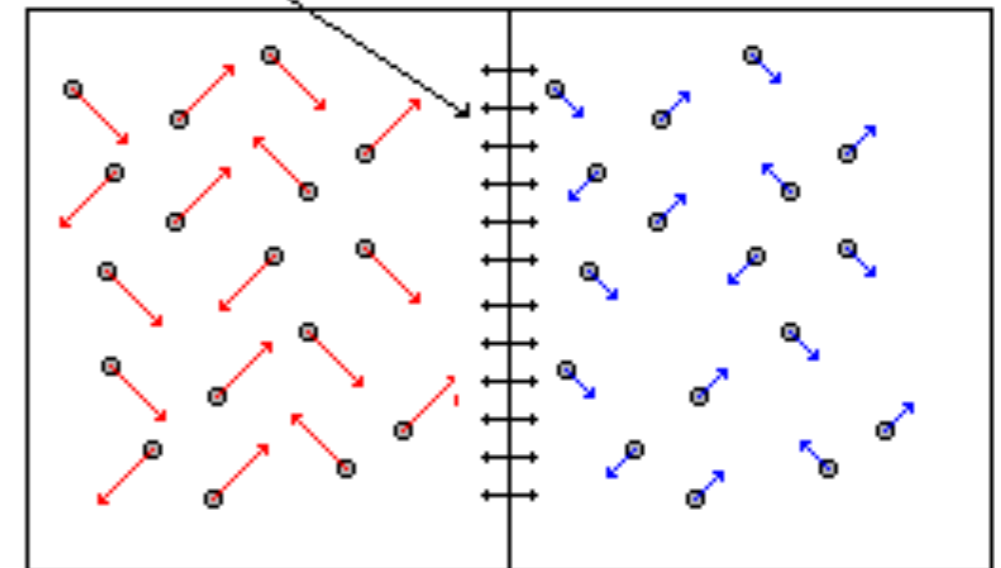


- Dans les fluides:

Collisions entre les molécules

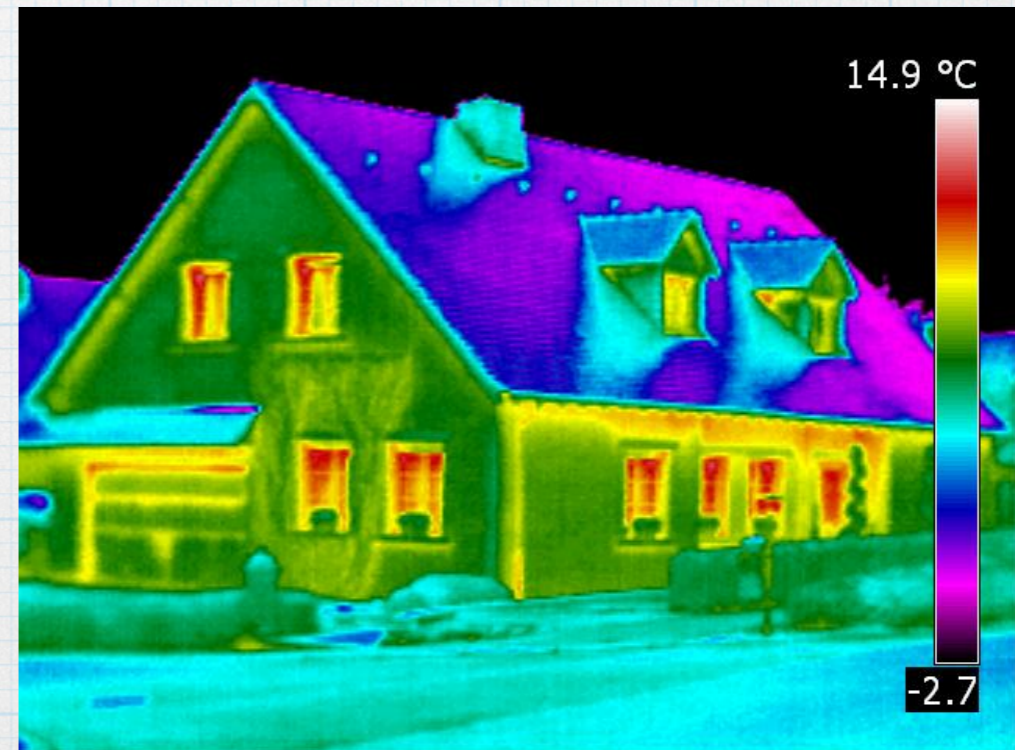
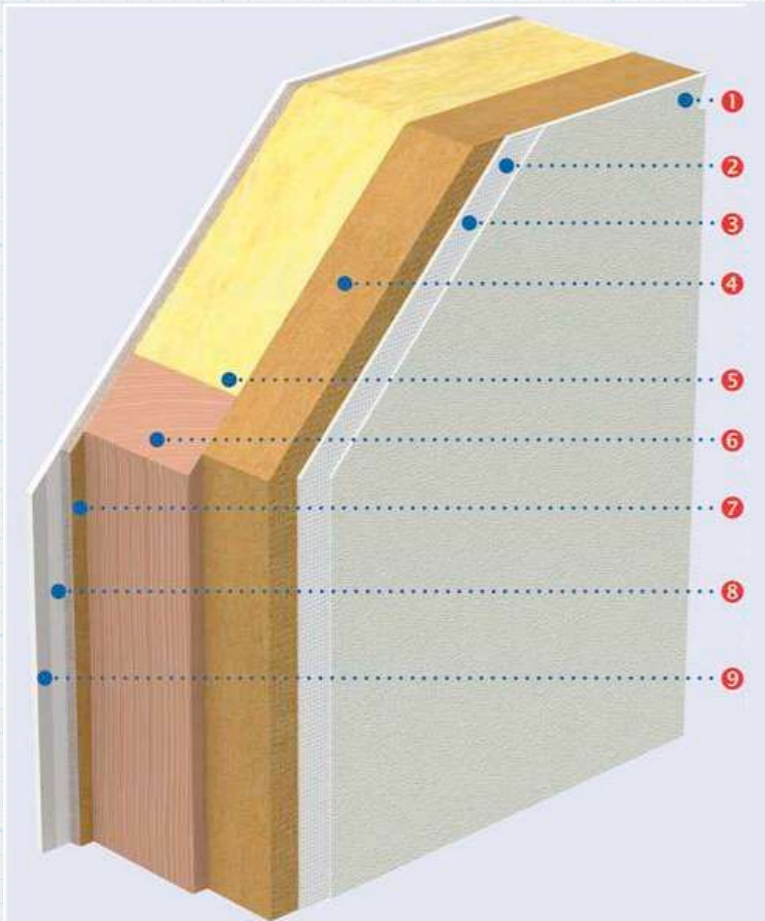
Mouvement des molécules

Chocs multiples qui provoquent la propagation de l'énergie du corps chaud vers le corps froid



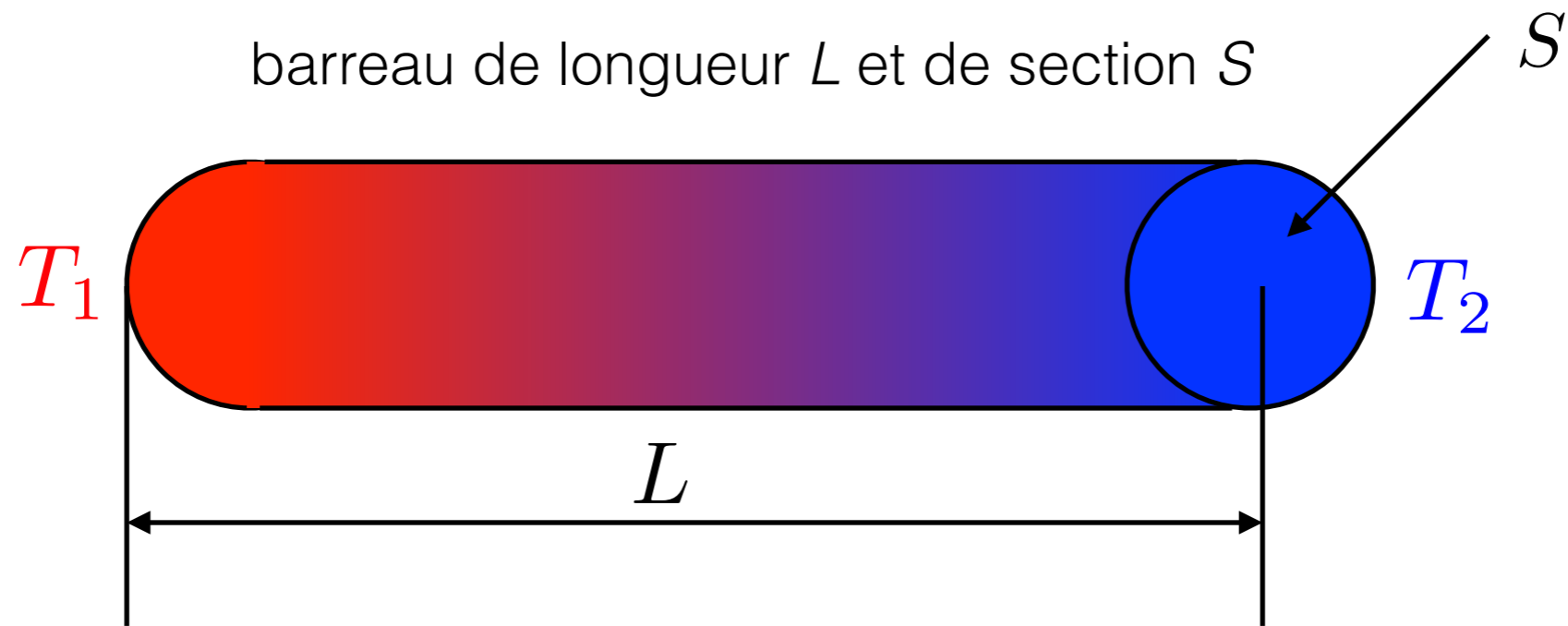
Corps chaud
(E_{mic} importante)

Corps froid
(E_{mic} faible)



2- Conduction

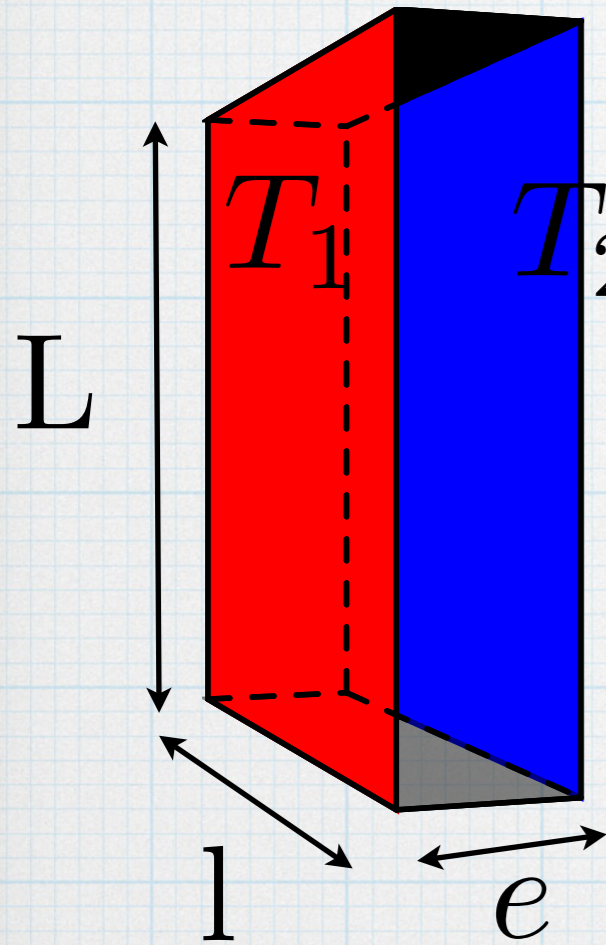
Loi de Fourier



$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = -\lambda(T_2 - T_1) \times \frac{S}{L}$$

λ : conductivité thermique $(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$

Version locale



On définit la densité de flux

$$\dot{q} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial S}$$

Le vecteur densité de flux

$\vec{\dot{q}}$ qui explicite le sens du flux

Si on se rappelle de la microscopie :
Conduction : phénomène diffusif
 \Rightarrow Loi de Fick

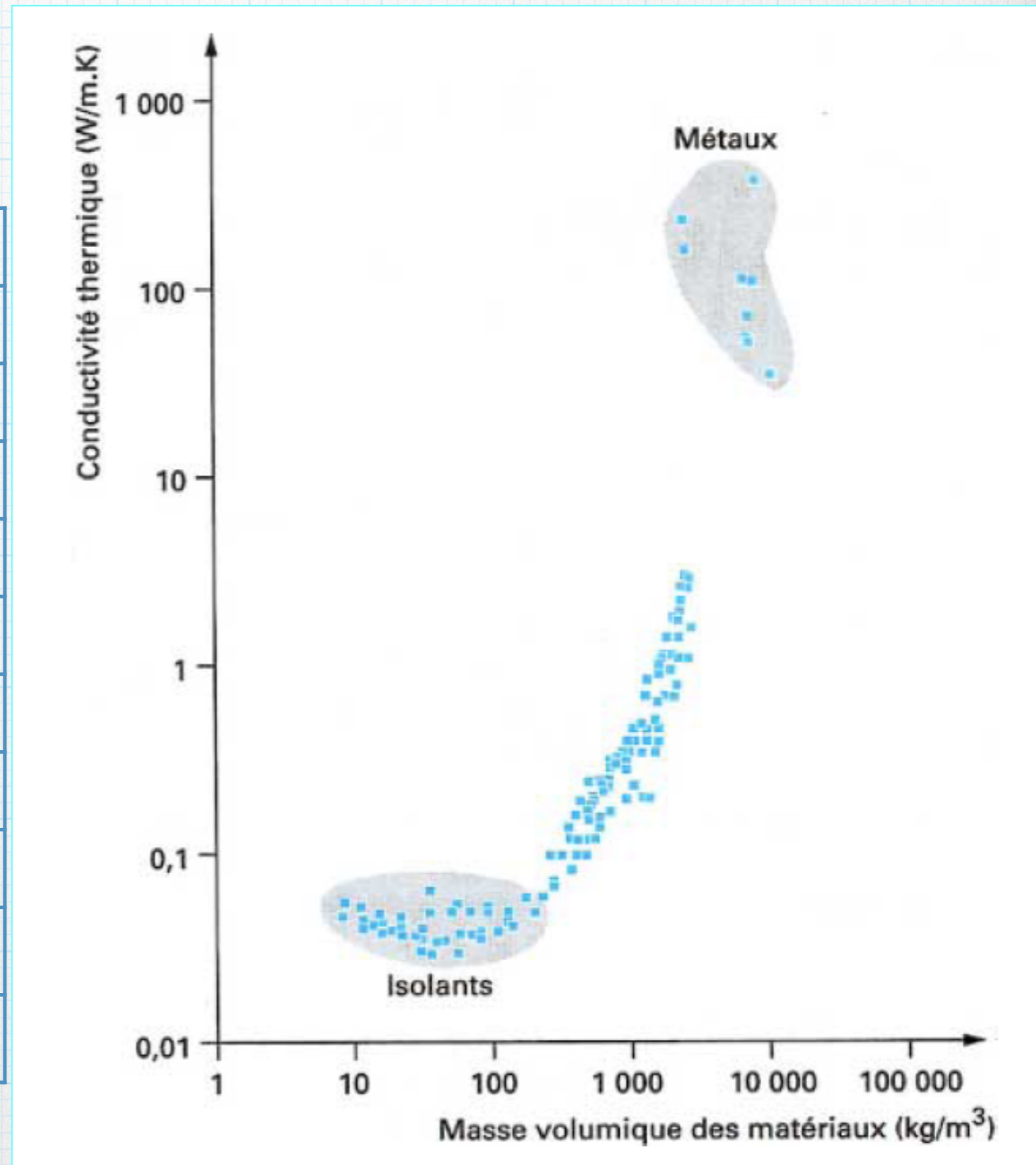
$$\vec{\dot{q}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$$

λ Conductivité Thermique $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Dépend du matériau

$$\dot{Q} = \int_S \vec{\dot{q}} \cdot \vec{dS}$$

Quelques exemples de conductivité λ

		λ (W/m/K)
Gaz	Air	$2,5 \times 10^{-2}$
	Argon	$1,7 \times 10^{-2}$
Liquides	Eau	0,6
	Glycérine	0,29
	Mercure	8
Solides	Acier	46
	Aluminium	200
	Argent	418
	Bois	0,13
	Polystyrène	0,045

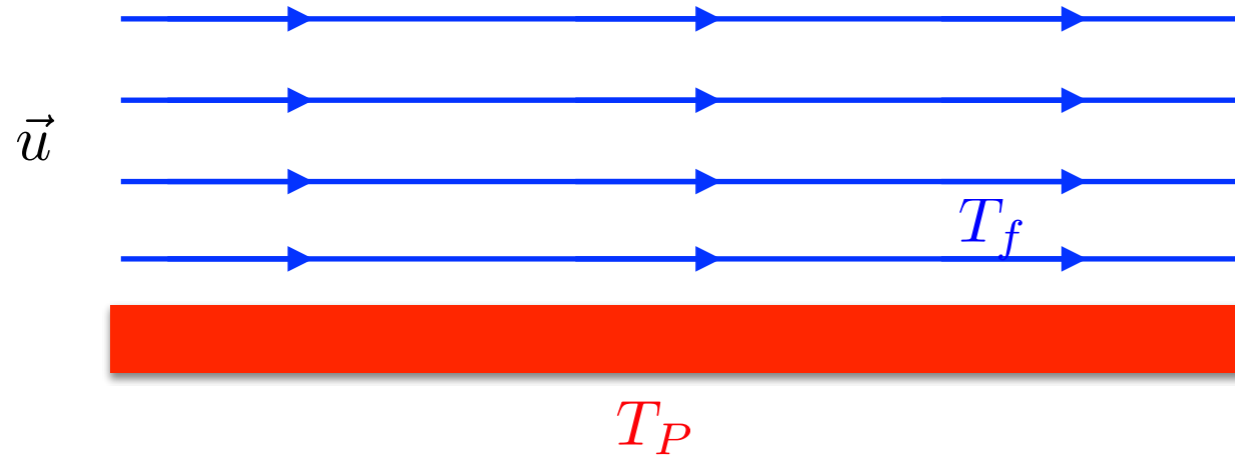


Lié au procédé de transport de l'énergie

3- Convection

Loi de Newton

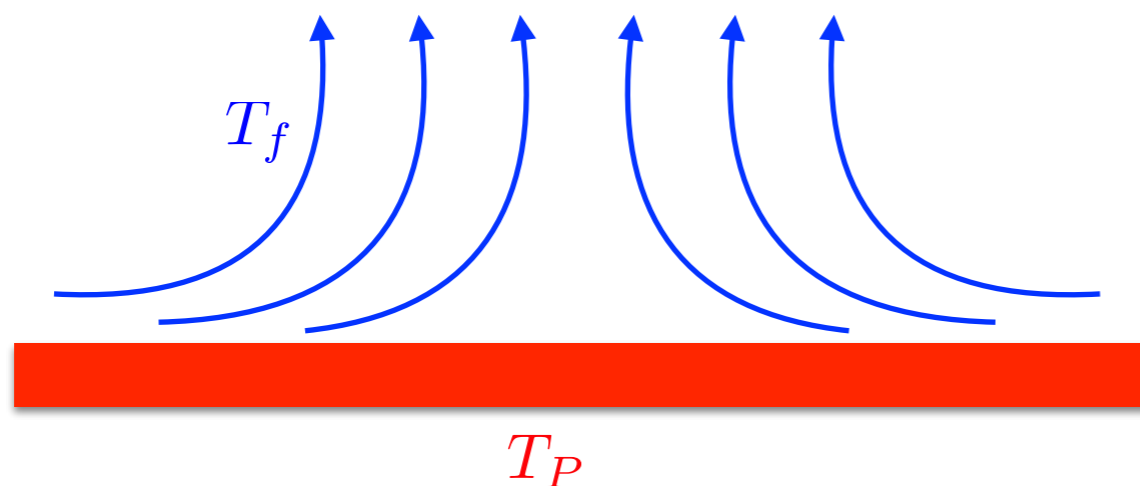
convection forcée



densité de flux thermique de la paroi vers le fluide

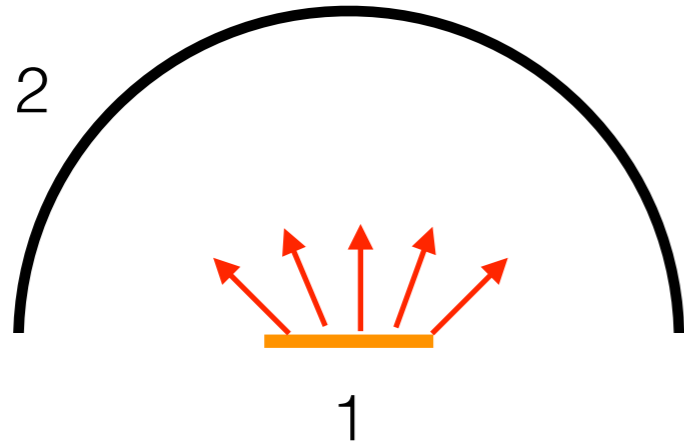
$$\dot{q}_{P \rightarrow f} = h(T_P - T_f)$$

convection libre



$$h(x, T, u)$$

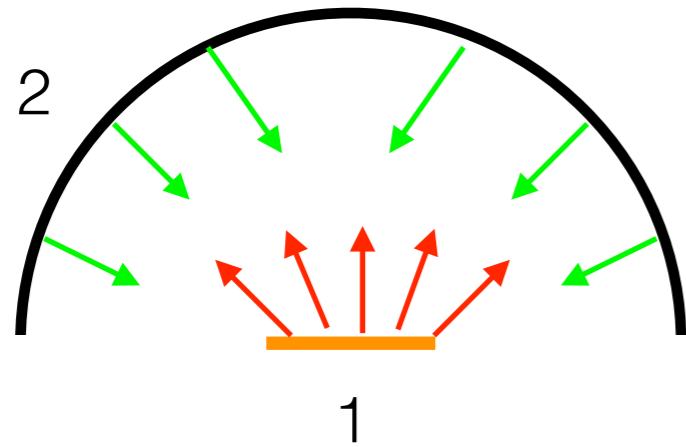
4- Rayonnement



Loi de Stephan

$$\dot{q}_1 = \epsilon \sigma T_1^4$$

4- Rayonnement



Loi de Stephan

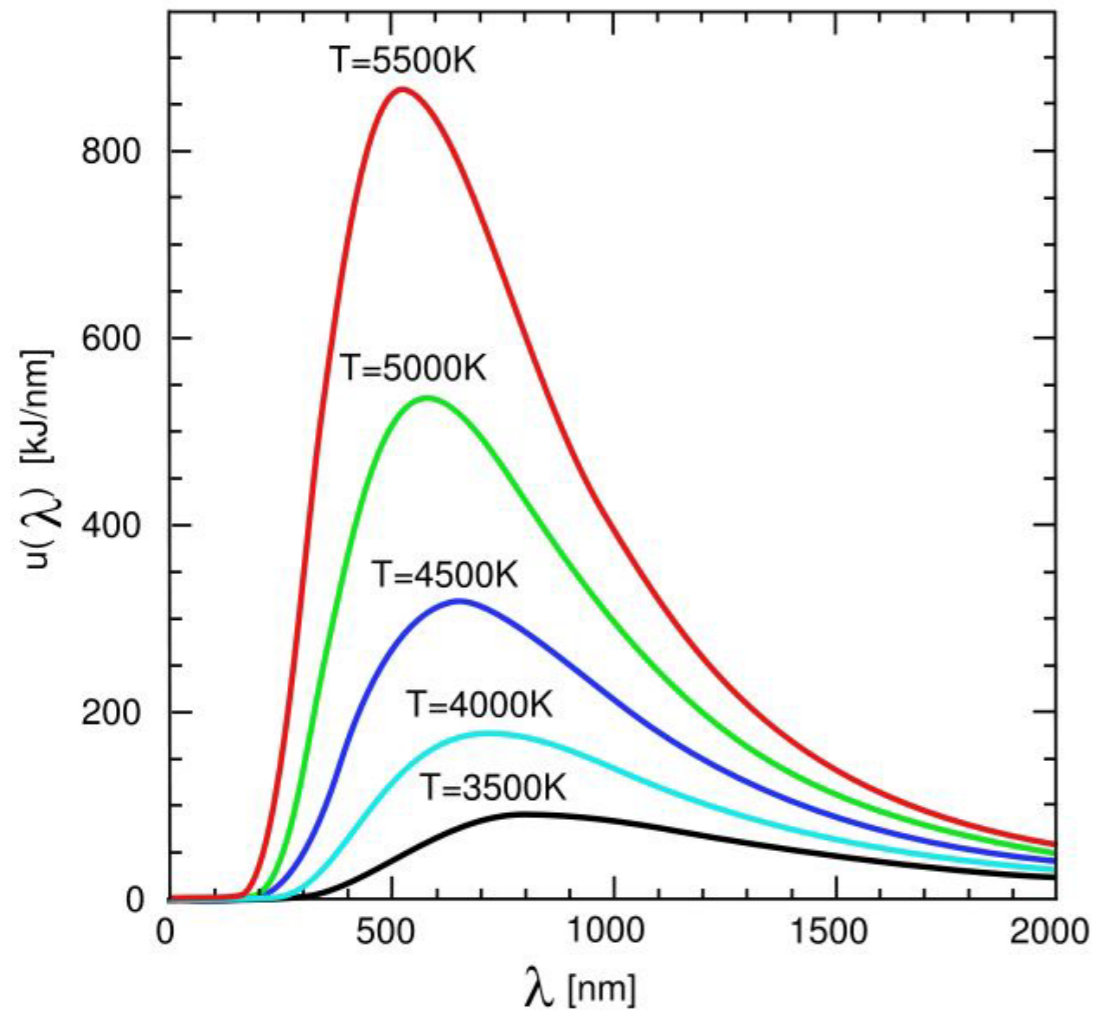
$$\dot{q}_1 = \epsilon\sigma T_1^4$$

$$\dot{q}_2 = \epsilon\sigma T_2^4$$

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = \epsilon\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

↓

$$\epsilon(\lambda)$$

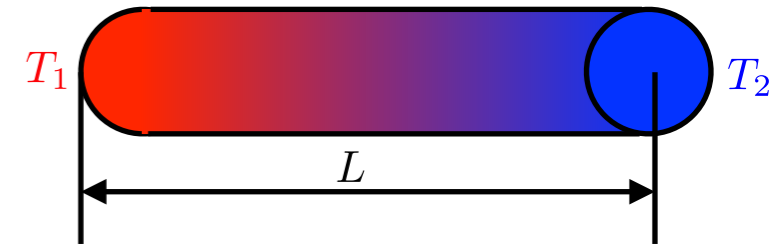


Résumé

Conduction

Loi de Fourier

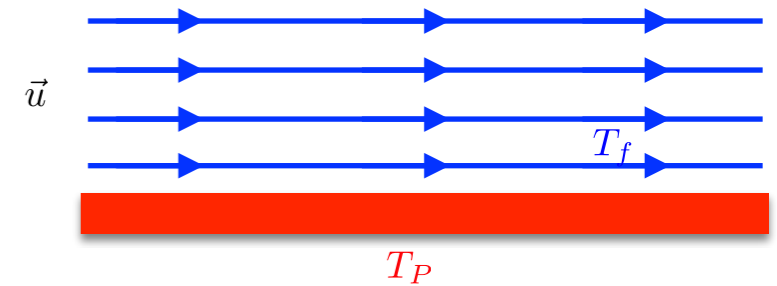
$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}$$



Convection

Loi de Newton

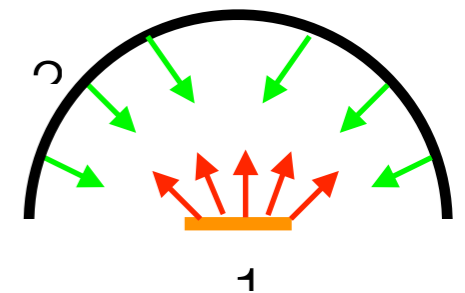
$$\dot{q}_{P \rightarrow f} = h(T_P - T_f)$$



Rayonnement

Loi de Stephan

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = \epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$



CONDUCTION

Chaleur \dot{Q}

- Dans les solides :

Les électrons dans les métaux

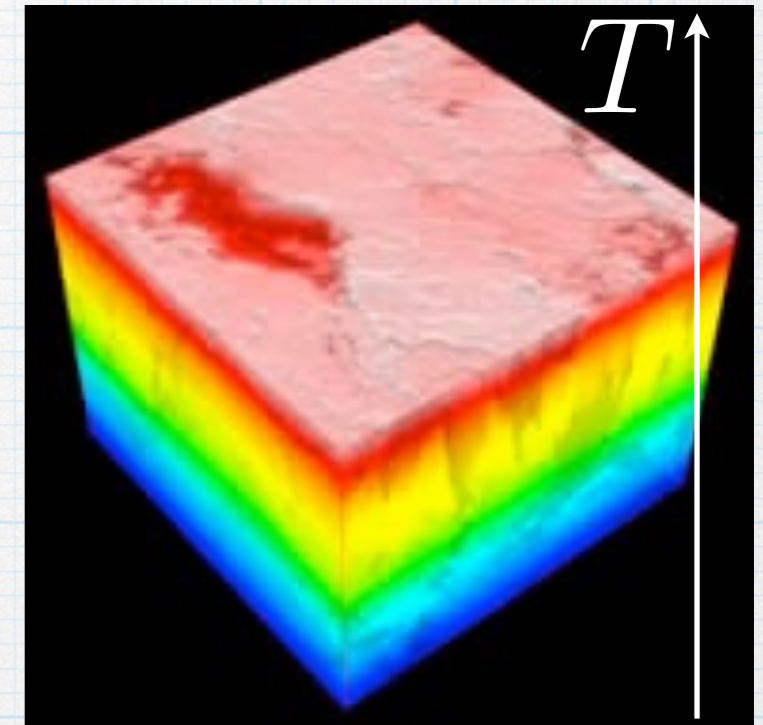
Les phonons dans les isolants et semi-conducteurs

- Dans les fluides:

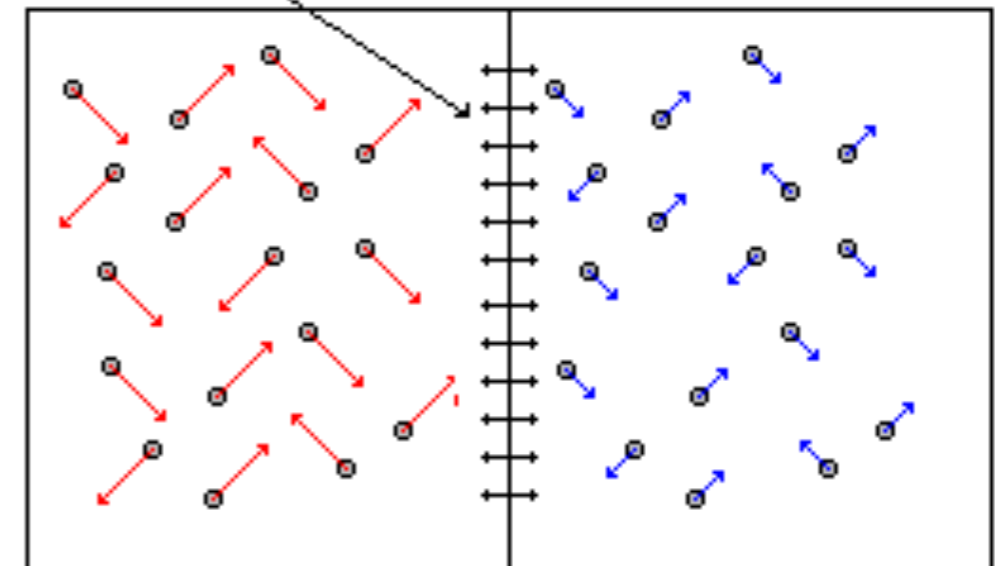
Collisions entre les molécules

Mouvement des molécules

gaz piégé = isolant

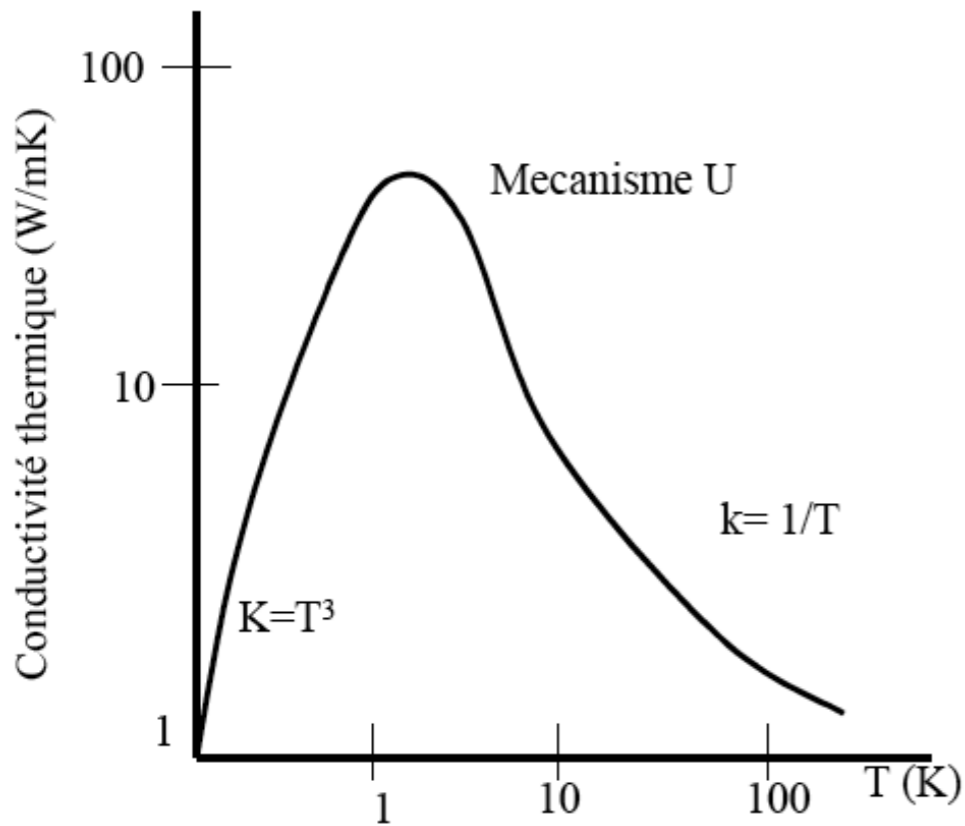


Chocs multiples qui provoquent la propagation de l'énergie du corps chaud vers le corps froid



Corps chaud
(E_{mic} importante)

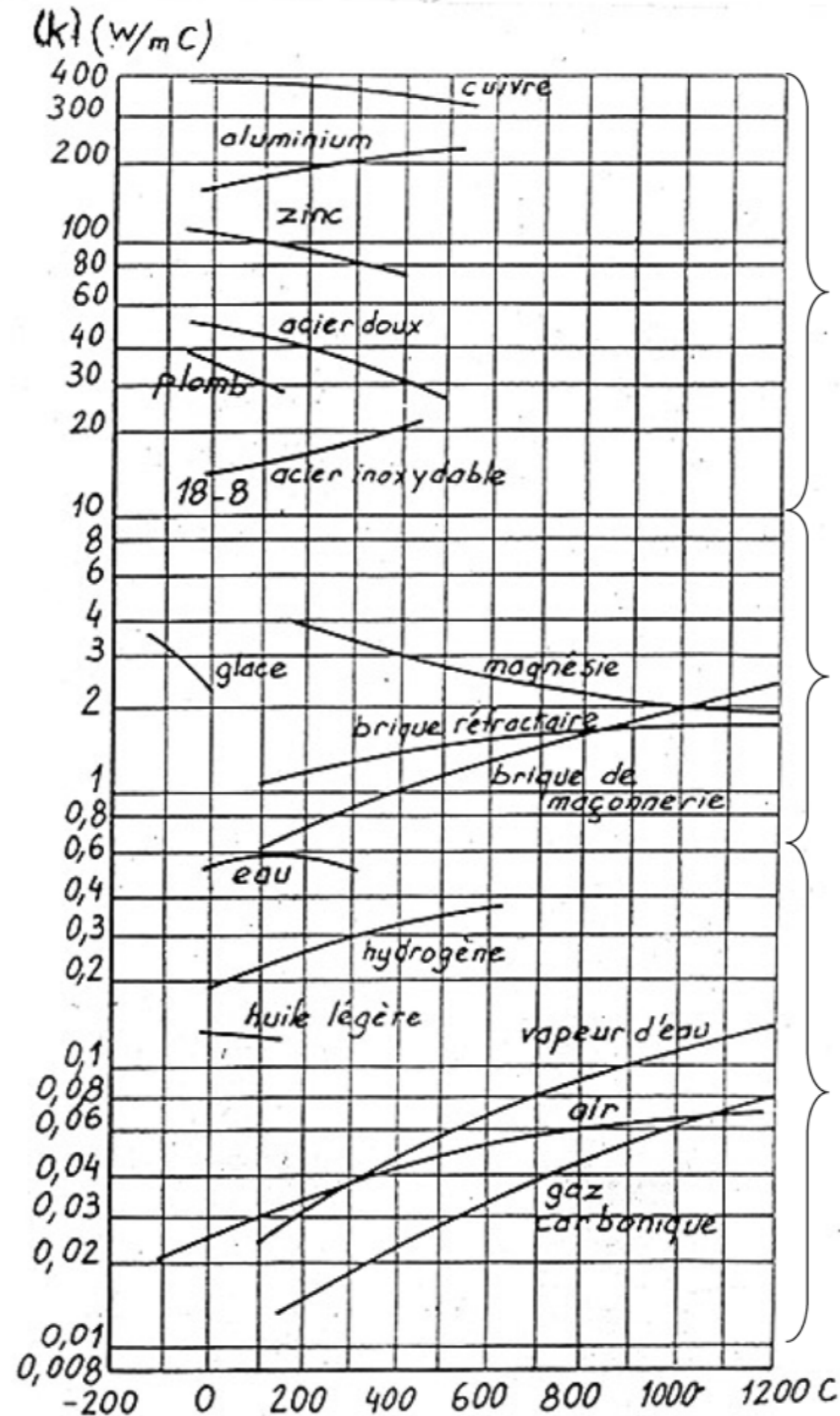
Corps froid
(E_{mic} faible)



Théorie phonons

Mesures

Détermination empirique



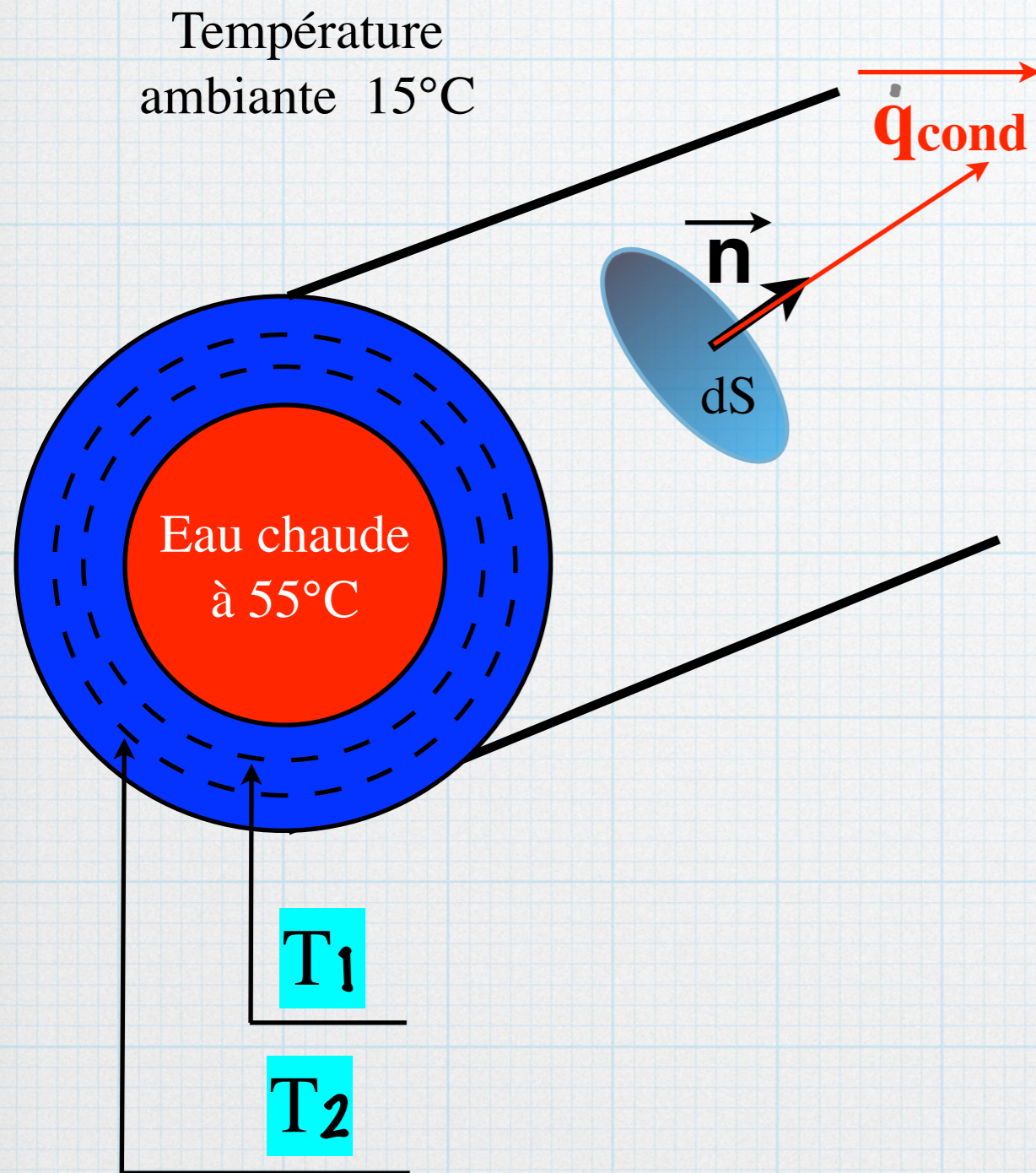
Conducteur
Mode principal de transmission de la chaleur: électrons

Di-électrique
Mode principal de transmission de la chaleur: phonons
Rayonnement (dans les pores)

Gaz
Mode principal de transmission de la chaleur: Rayonnement
Mouvement Brownien

Généralisation et Équation de la chaleur

Généralisation



Pour un solide homogène isotrope

- * Le flux est normal aux isothermes
- * Le flux est proportionnel au gradient de température
- * Le flux va du plus chaud au plus froid

Loi de Fourier

$$\vec{\dot{q}}_{cond} = -\lambda(\vec{r}, t) \vec{\nabla} T$$

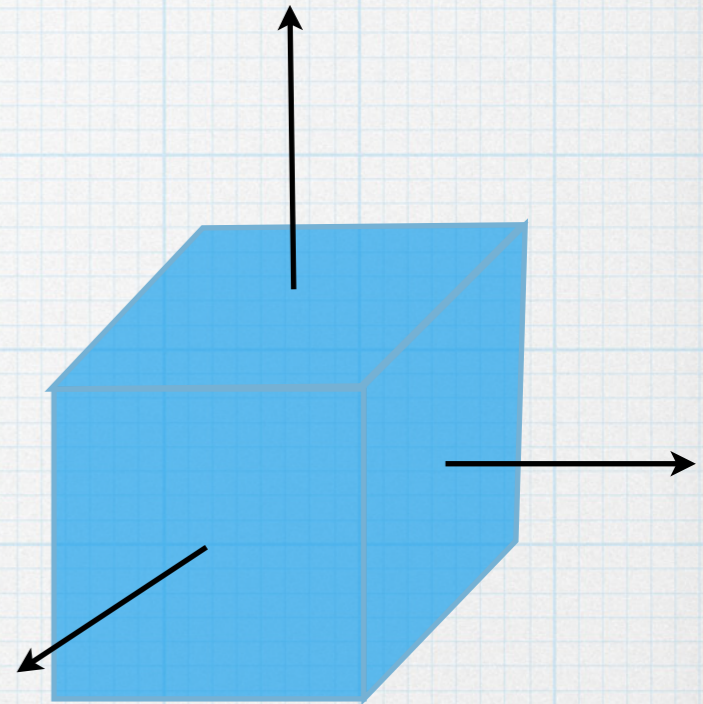
$\vec{\dot{q}}_{cond}$ Densité de flux d'énergie (W/m²)

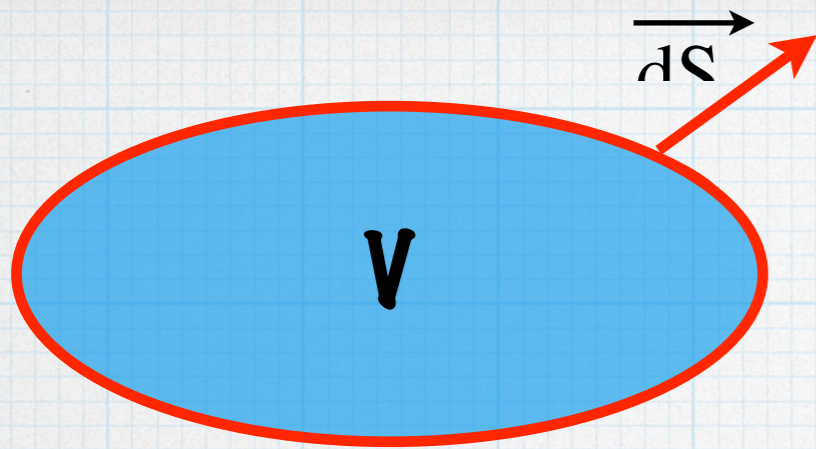
$$\dot{Q} = \int_S \vec{\dot{q}}_{cond} \cdot \vec{dS} \quad (\text{W})$$

Pour un matériaux homogène et isotrope

$$\vec{n}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q_x = -\lambda \int_{S_x} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{dS}$$

$$Q_x = -\lambda \int_{S_x} \frac{\partial T}{\partial x} dS$$





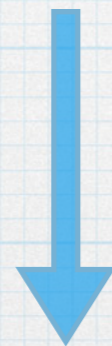
Surface fermée

$$\underbrace{\int \int \int_V \rho C_m \frac{\partial T}{\partial t} dV}_{\text{Variation temporelle de la chaleur dans le volume V}} = \underbrace{\oint_{S(V)} - \left(\vec{q}_{cond} \cdot \vec{n} \right) d\vec{S}}_{\text{Flux de chaleur à travers la surface S}} + \underbrace{\int \int \int_V \dot{w} \cdot dV}_{\text{Puissance des sources dans le volume V}}$$

Variation temporelle de la chaleur dans le volume V

Flux de chaleur à travers la surface S

Puissance des sources dans le volume V



Green

$$\int \int \int_V \text{div} \left(\vec{q}_{cond} \right) dV$$

Équation locale

$$\rho C_m \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \right) + \dot{w} (M, t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta (T) + \frac{\dot{w}}{\rho C_m}$$

avec $\kappa = \frac{\lambda}{\rho C_m}$

Diffusivité thermique

Approximation d'usage

λ , ρ et C_m sont indépendants de T : $\frac{d\lambda}{dT} = 0$ $\Delta T = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{dt}$

- Coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{dt}$$

- Coordonnées cylindriques

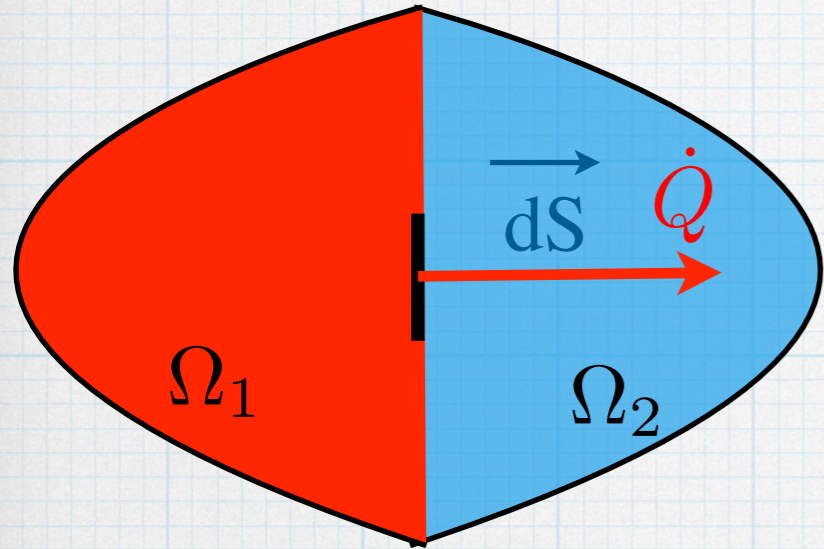
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{dt} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{dt} \end{array} \right.$$

Axisymétrique

Contact entre 2 solides

$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ Système isolé



Équation de l'énergie

$$\int \int \int_{\Omega} \rho C_m \frac{\partial T}{\partial t} dV + \oint_{S_{\Omega}} \left(\vec{q}_{cond} \cdot \vec{n} \right) d\vec{S} = 0$$

$$\int \int \int_{\Omega} \rho C_m \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \left(\vec{q}_{cond} \right) dV = 0$$

$$\int \int \int_{\Omega_1} \rho C_m \frac{\partial T_1}{\partial t} + \text{div} \left(\vec{q}_1 \right) dV + \int \int \int_{\Omega_2} \rho C_m \frac{\partial T_2}{\partial t} + \text{div} \left(\vec{q}_2 \right) dV = 0$$

Comme Ω est isolé $\int \int \int_{\Omega_1} \rho C_m \frac{\partial T_1}{\partial t} dV = - \int \int \int_{\Omega_2} \rho C_m \frac{\partial T_2}{\partial t} dV = 0$

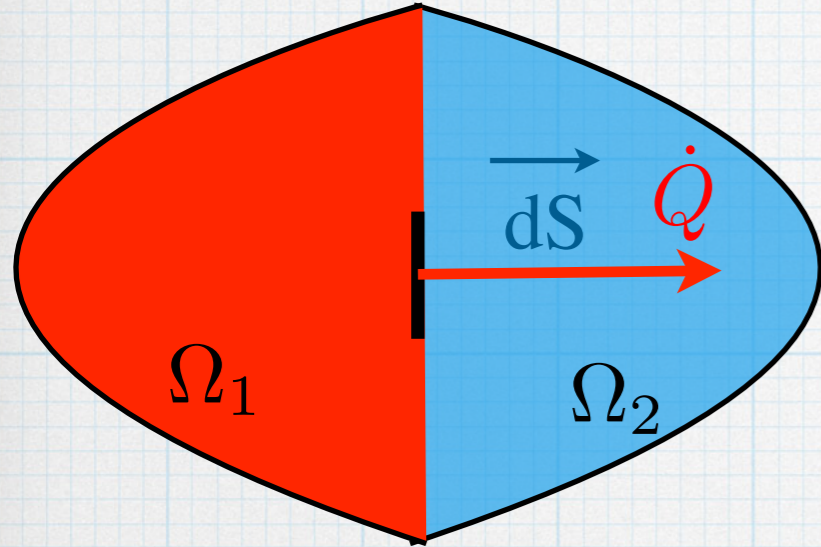
d'où $\int \int \int_{\Omega_1} \text{div} \left(\vec{q}_1 \right) dV + \int \int \int_{\Omega_2} \text{div} \left(\vec{q}_2 \right) dV = 0$

$\int_{S_1} \vec{q}_1 \cdot \vec{dS}_1 = - \int_{S_2} \vec{q}_2 \cdot \vec{dS}_2$ comme $\vec{dS}_1 = -\vec{dS}_2$ on a $\vec{q}_1 = \vec{q}_2$

On a un problème linéaire donc la solution est la superposition de plusieurs problèmes plus simples

Contact entre 2 solides

$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ Système isolé

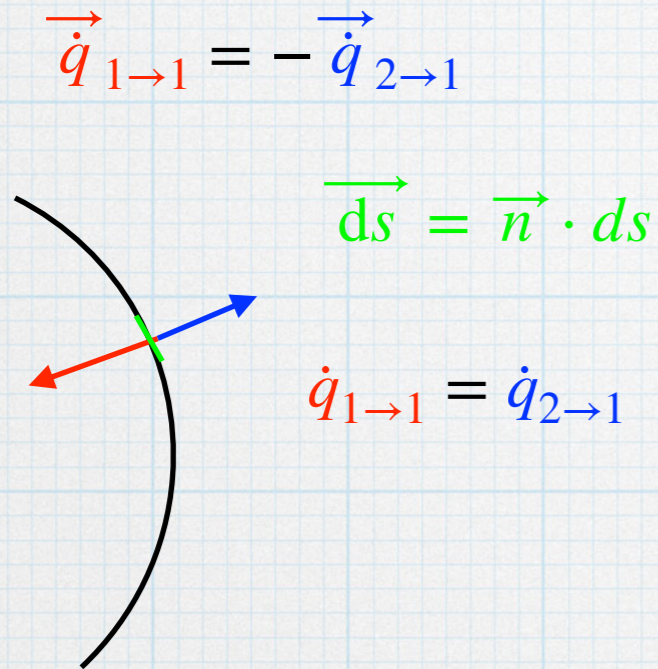


Égalité des flux à la paroi $\vec{q}_1 = \vec{q}_2$

Égalité des température à la paroi $T_1 = T_2$

Conditions de frontière

Il y a conservation du flux de chaleur à la frontière : Conservation de l'énergie



Frontière extérieure

milieu 1 solide $\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = -\lambda_1 \overrightarrow{\text{grad}T}|_p \cdot \overrightarrow{ds}_{1 \rightarrow 2}$

milieu 2 fluide $\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = [h(T_p - T_{ext}) + \cancel{\epsilon\sigma(T_p^4 - T_{ext}^4)}] \times ds_{1 \rightarrow 2}$

Si h est très grand alors $T_p = T_{ext}$ la température imposée

Condition de Dirichlet

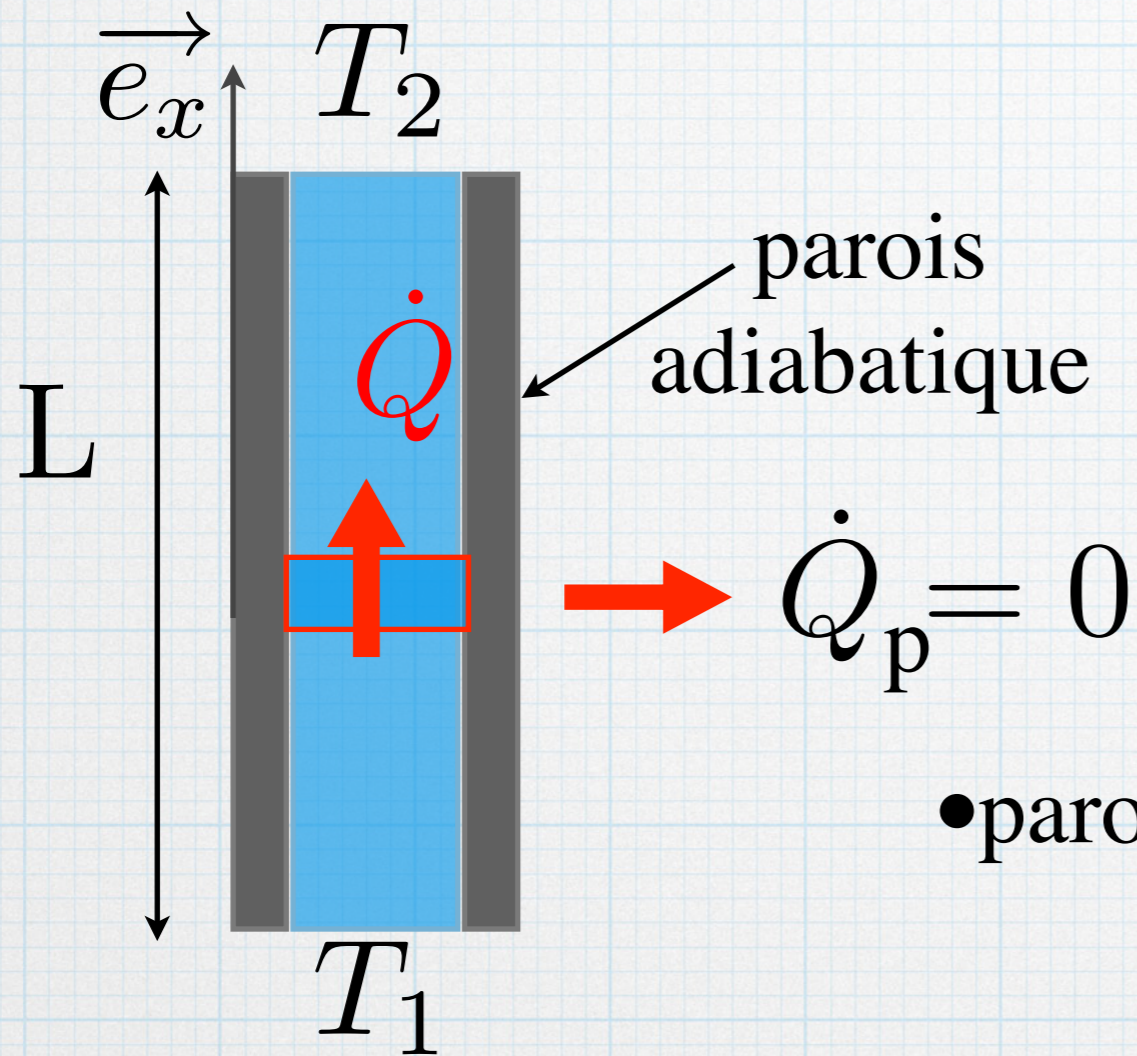
Flux imposé à la paroi : Condition de Neumann

$$\vec{q}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \dot{q}_0 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p$$

Frontière entre 2 solides

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}$$

Intégrale de Conductivité



$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$$

λ dépend de T .

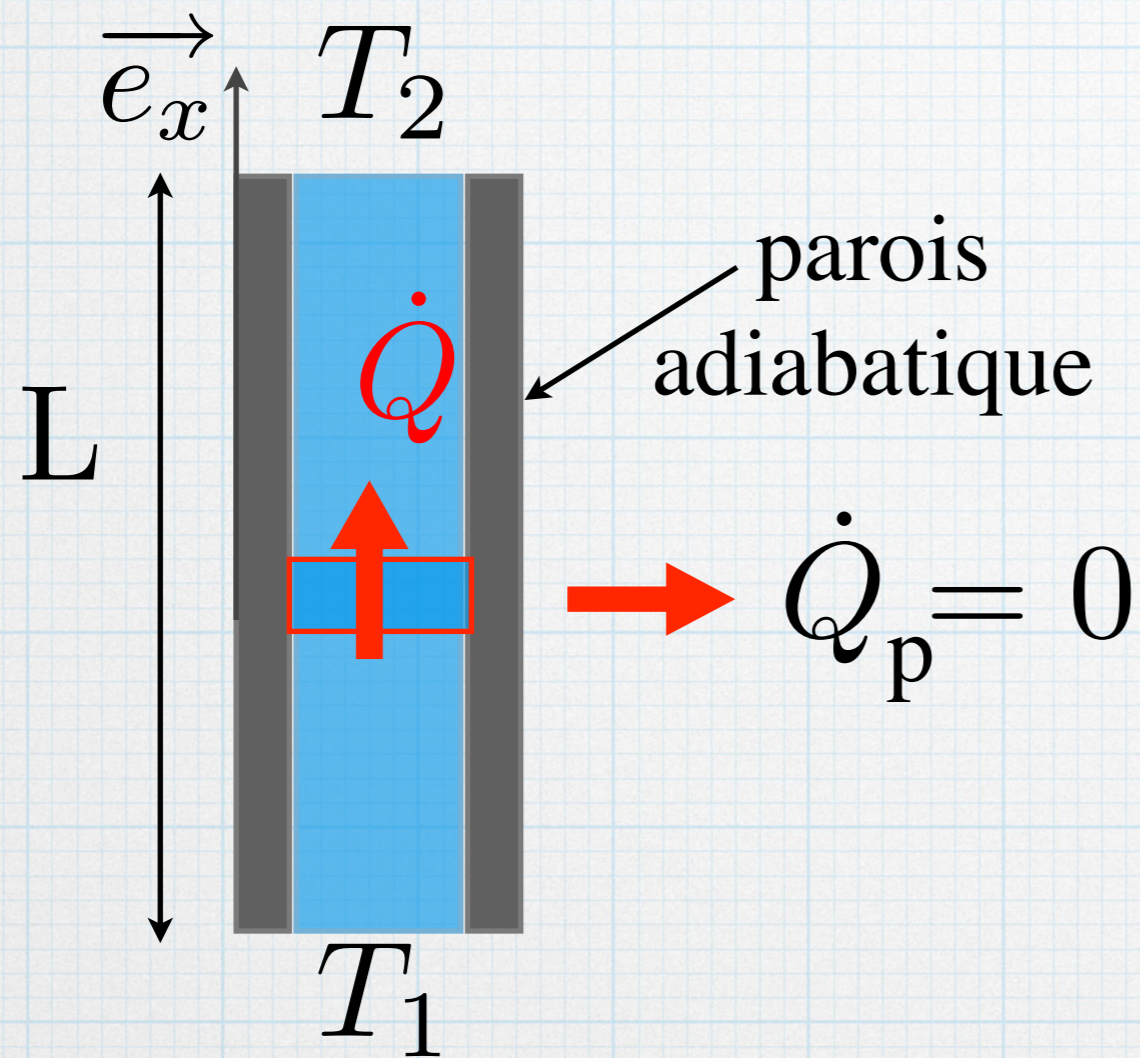
• parois adiabatiques $\Rightarrow \dot{Q} = C^{\text{te}}$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{Q}}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^L d\dot{Q} dx = \int_S \int_0^L -\lambda(T) \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \vec{dS} dx$$

$$\dot{Q} \times L = S \int_0^L -\lambda(T) \frac{dT}{dx} dx = S \int_{T_1}^{T_2} -\lambda(T) dT$$

Intégrale de Conductivité



λ dépend de T .

$$\dot{Q} = \frac{S}{L} \int_{T_1}^{T_2} -\lambda(T) dT$$

• parois adiabatiques

$$\Rightarrow \dot{Q} = C^{\text{te}}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT$$

Intégrale de
conductivité

Intégrale de Conductivité

$$\int_{4,2 K}^T \lambda(T) dT$$

Matériau \ T (K)	6	8	10	15	20	60	80	300
Conducteurs (en W/cm)								
Cuivre extra-pur	166	382	636	1270	1790	2960	3090	4000
Cuivre électroéroui	8,0	19,1	33,2	80,2	140	587	707	1620
Argent	320	670	990	1610	1980	2570	2670	3570
Aluminium extra-pur	73	168	280	600	907	1740	1840	2390
Aluminium du commerce	1,38	3,42	6,07	15,2	27,6	170	232	728
Or	41	93	149	274	364	612	682	1370
Laiton	0,0531	0,129	0,229	0,594	1,12	10,4	17,7	172
Plomb (normal)	27,0	37,3	42,4	49,0	52,5	73,8	81,3	160
Titane	0,115	0,277	0,488	1,21	2,20	15,5	22,6	99,6
Monel	0,0235	0,0605	0,112	0,315	0,618	5,23	8,24	52,5
Acier inoxydable	0,0063	0,0159	0,0293	0,0816	0,163	1,98	3,49	30,6
Isolants (en mW/cm)								
Verre	2,11	4,43	6,81	13,1	20,0	115	194	1990
Téflon	1,13	2,62	4,4	9,85	16,4	93,6	139	702
Plexiglas	1,18	2,38	3,59	6,69	10,1	68,3	110	630
Nylon	0,321	0,807	1,48	4,10	8,23	85,9	142	895

Loi de Fourier

$$\vec{q}_{cond} = -\lambda(\vec{r}, t) \vec{\nabla} T \quad \vec{q}_{cond} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z \right)$$

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q}_{cond} \cdot \vec{dS}$$

Pour un matériaux hétérogène λ est une matrice 3*3

$$\vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{xy} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{xz} & \lambda_{yz} & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \quad \vec{n}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_{cond} = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} \vec{\nabla}_x T + \lambda_{xy} \vec{\nabla}_y T + \lambda_{xz} \vec{\nabla}_z T \\ \lambda_{yx} \vec{\nabla}_x T + \lambda_{yy} \vec{\nabla}_y T + \lambda_{yz} \vec{\nabla}_z T \\ \lambda_{xz} \vec{\nabla}_x T + \lambda_{zy} \vec{\nabla}_y T + \lambda_{zz} \vec{\nabla}_z T \end{pmatrix} \cdot \vec{dS}$$

Analogie électrique

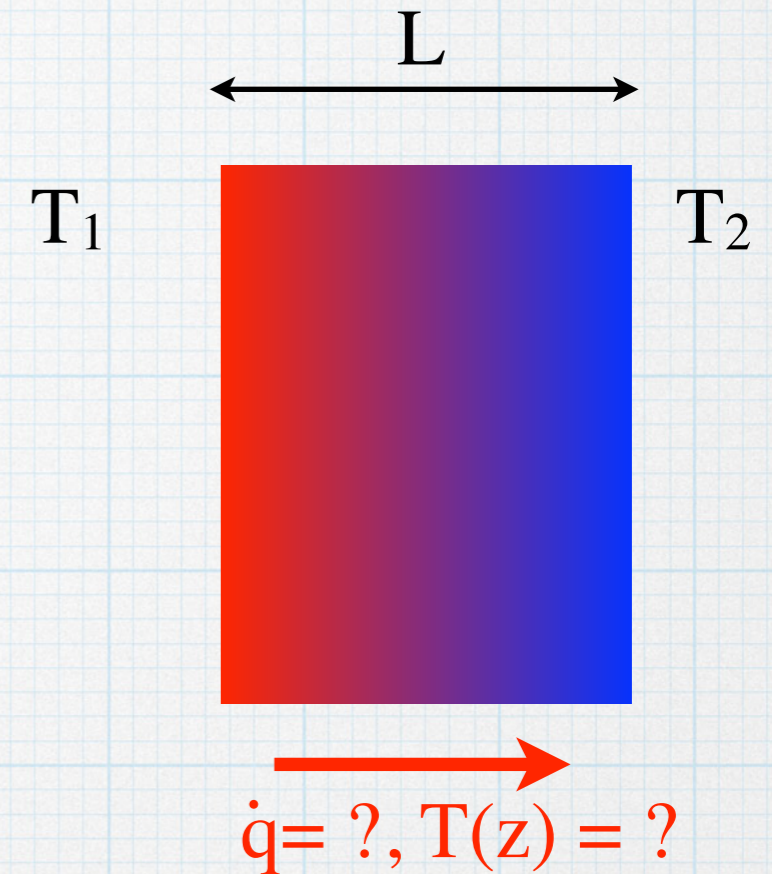
- Phénomène stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Pas de source : $S = 0$
- Matériau homogène isotrope $\frac{d\lambda}{dT} = 0$
- Problème 1D $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$

L'équation devient $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

$$\Rightarrow T(z) = az + b \quad b = T(0) \quad a = \frac{T(L) - T(0)}{L}$$

Profil de température linéaire

Les surfaces isothermes sont des plans perpendiculaires à Oz



Analogie électrique

$$T(z) = az + b \quad b = T(0) \quad a = \frac{T(e) - T(0)}{e} \quad T_1$$

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z$$

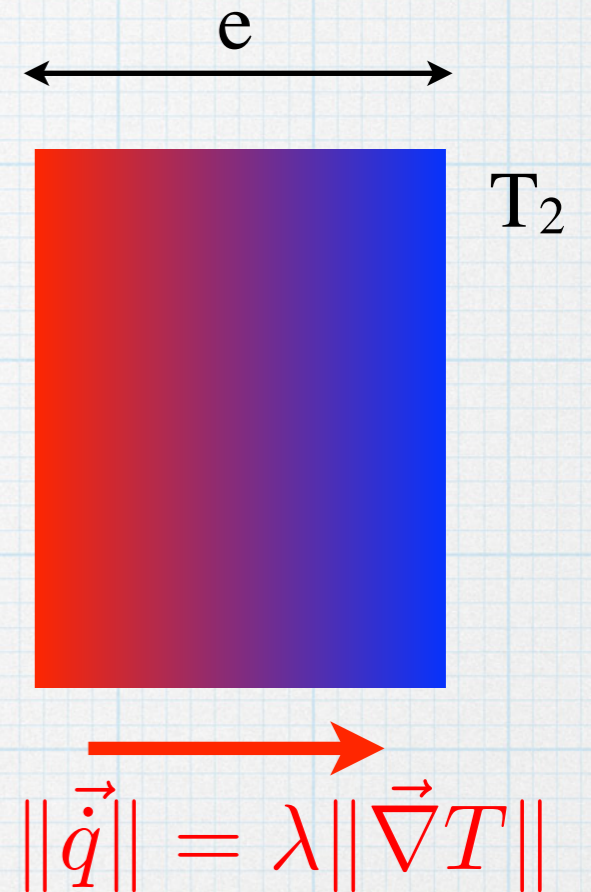
$$\vec{q} = -\frac{\lambda}{e} (T(e) - T(0)) \hat{e}_z$$

$$\|\vec{q}\| = \frac{\lambda}{e} \delta T \quad \delta T = \frac{e}{\lambda} \|\vec{q}\|$$

$$\Rightarrow \delta T = \frac{e}{\lambda \cdot S} \dot{Q} \quad \Leftrightarrow \quad U = RI$$

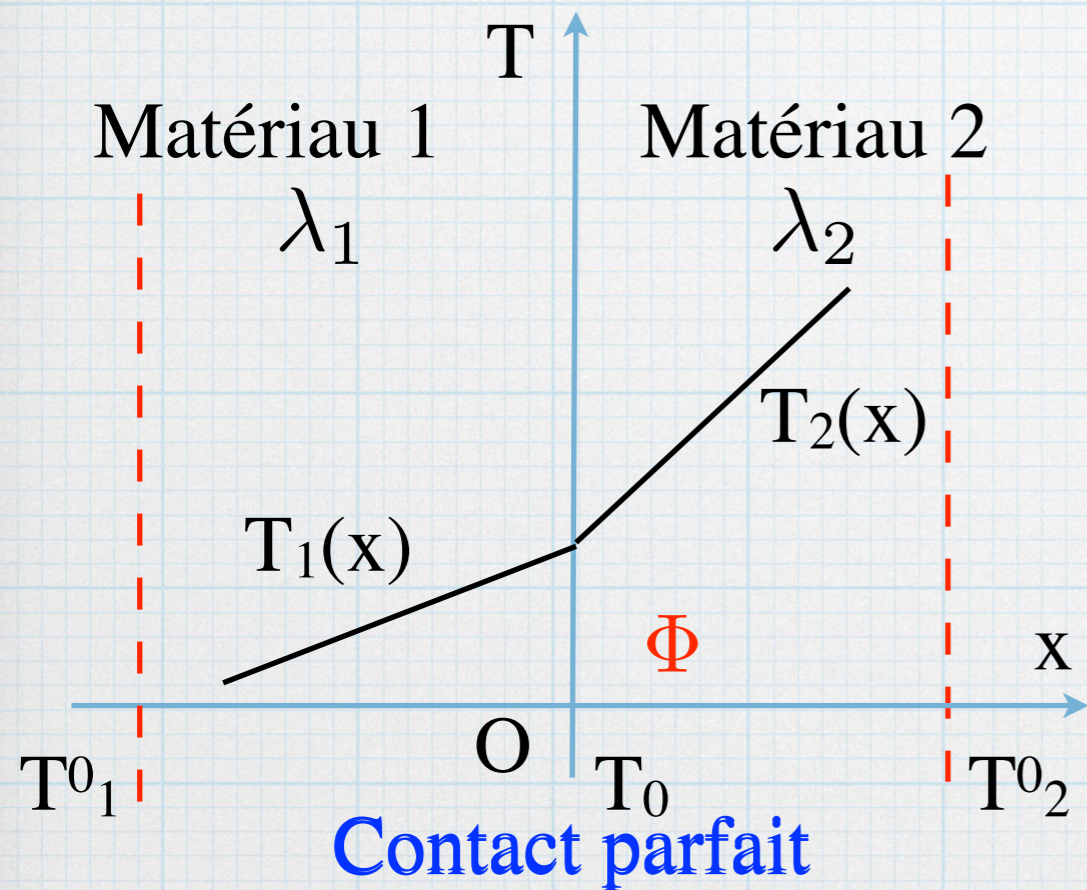
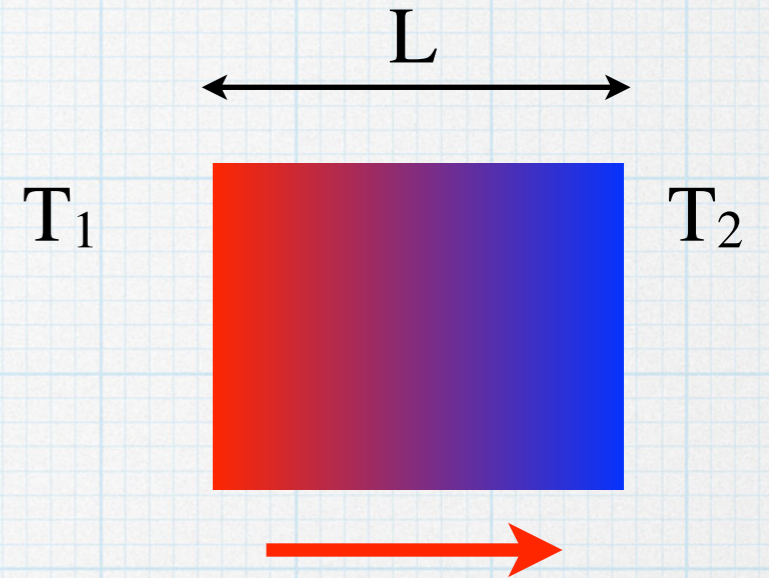
Résistance thermique $\frac{e}{S \times \lambda} = R_T \quad (^\circ\text{K}/\text{W})$

$$\dot{Q} = \frac{\delta T}{R_T}$$



Analogie électrique

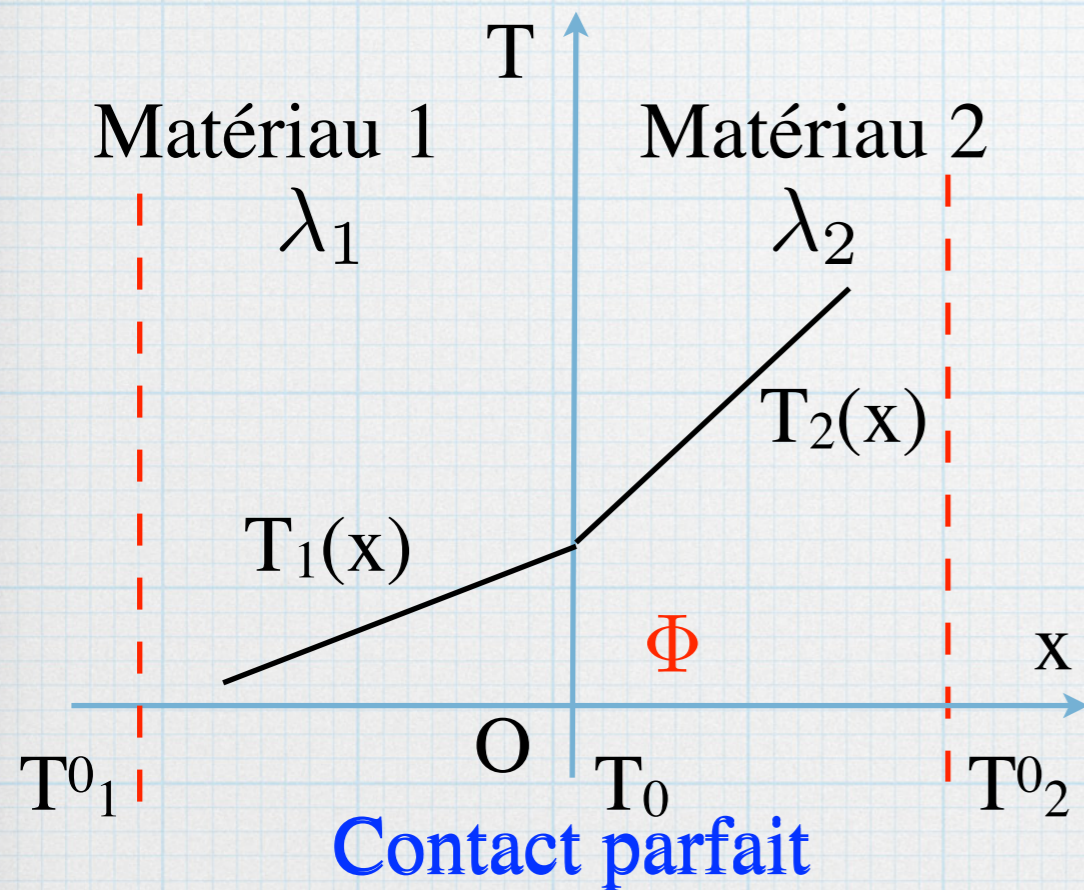
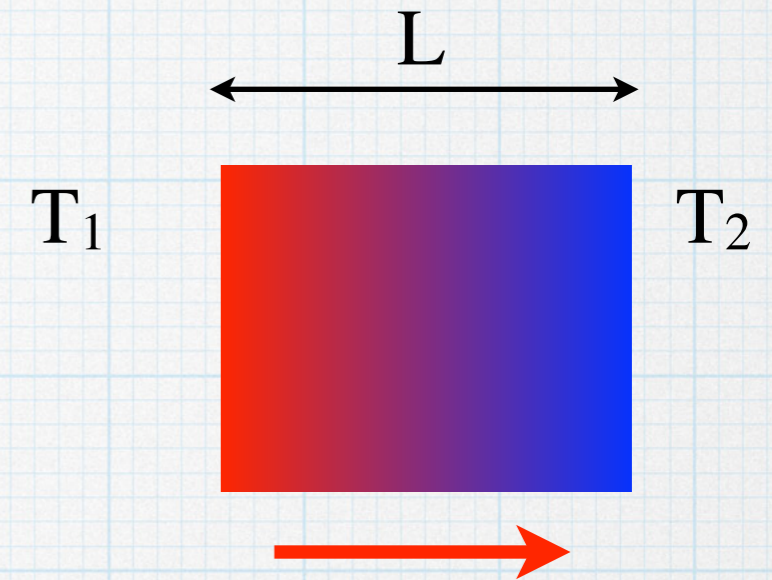
- Phénomène stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Pas de source : $S = 0$
- Matériau homogène isotrope $\vec{\nabla} T = \frac{T_2 - T_1}{L} \hat{e}_x$



Systeme d'équations et résolution

Analogie électrique

- Phénomène stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Pas de source : $S = 0$
- Matériau homogène isotrope $\vec{\nabla} T = \frac{T_2 - T_1}{L} \hat{e}_x$



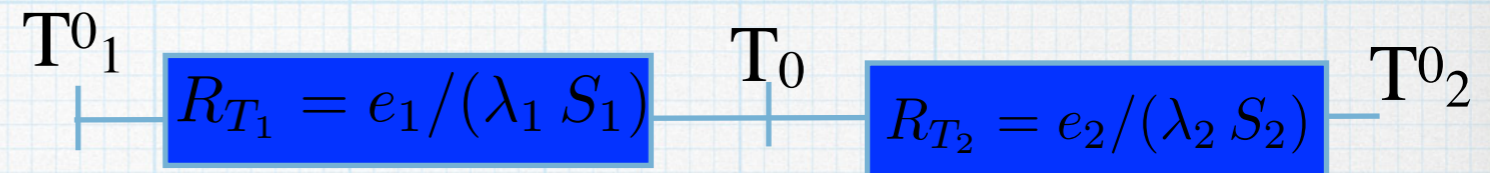
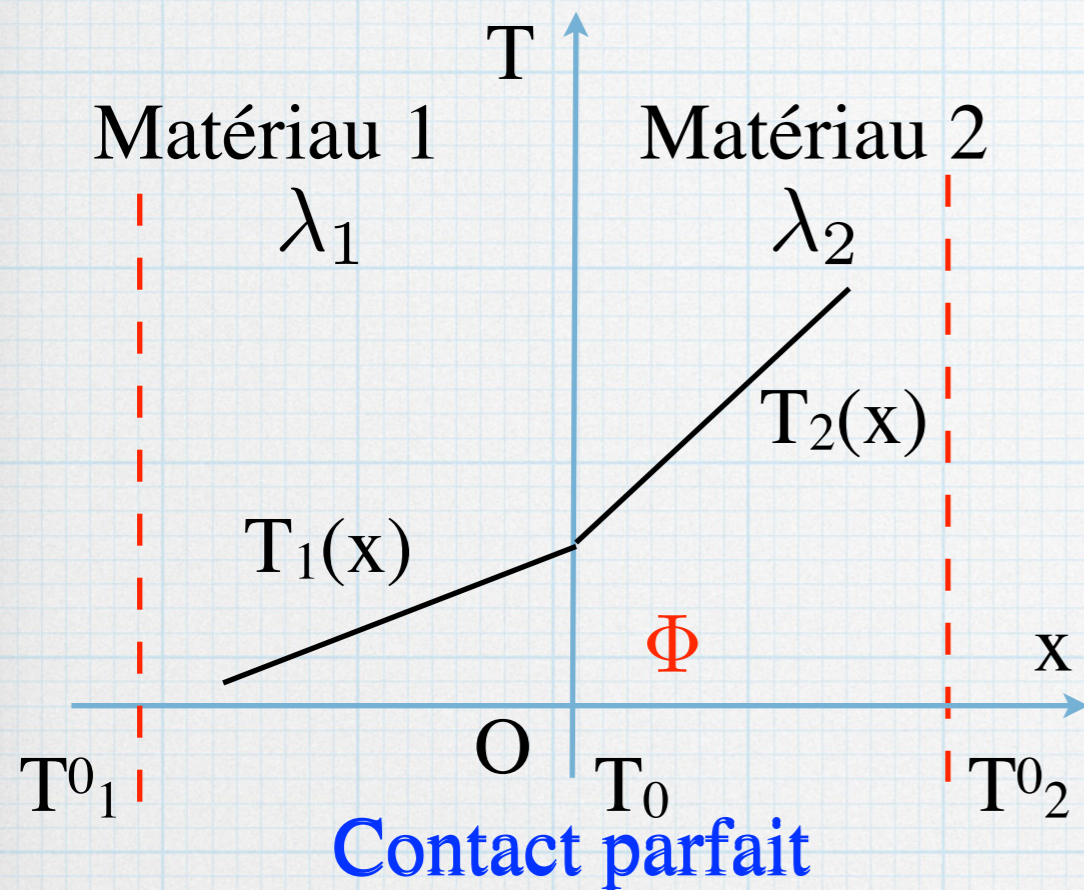
Analogie électrique

Résistance thermique en série

Circuit diagram showing two thermal resistances in series. The first resistance is $R_{T_1} = e_1 / (\lambda_1 S_1)$ and the second is $R_{T_2} = e_2 / (\lambda_2 S_2)$. The heat flux $\dot{Q}_1 = \frac{1}{R_{T_1}} (T_0 - T_1)$ is equal to $\dot{Q}_2 = \frac{1}{R_{T_2}} (T_2 - T_0)$.

Analogie électrique

Résistance thermique en série



$$\dot{Q}_1 = \frac{1}{R_{T_1}} (T_0 - T_1) = \dot{Q}_2 = \frac{1}{R_{T_2}} (T_2 - T_0)$$

$$S_1 = S_2 \quad \text{Contact total}$$

$$\dot{Q} R_{T_1} = (T_0 - T_1)$$

$$\dot{Q} R_{T_2} = (T_2 - T_0)$$

$$\dot{Q} (R_{T_2} + R_{T_1}) = (T_2 - T_1)$$

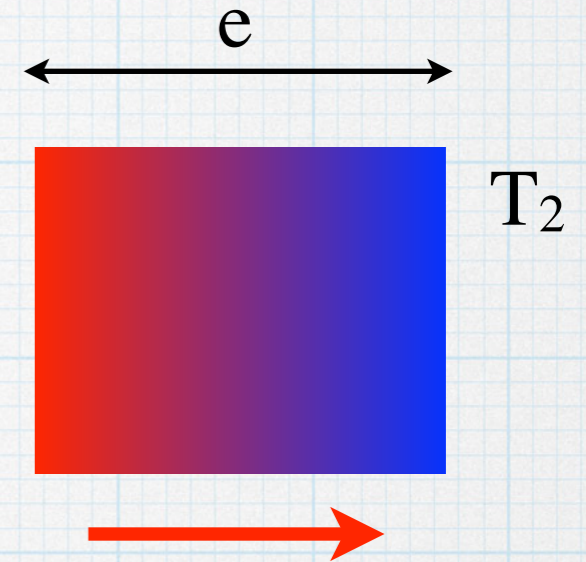
$$\Rightarrow R_T = R_{T_1} + R_{T_2}$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_T} (T_2 - T_1)$$

Analogie électrique

- Phénomène stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Pas de source : $S = 0$
- Matériaux homogènes isotropes

$$\vec{\nabla} T = \frac{T_2 - T_1}{e} \hat{e}_x$$

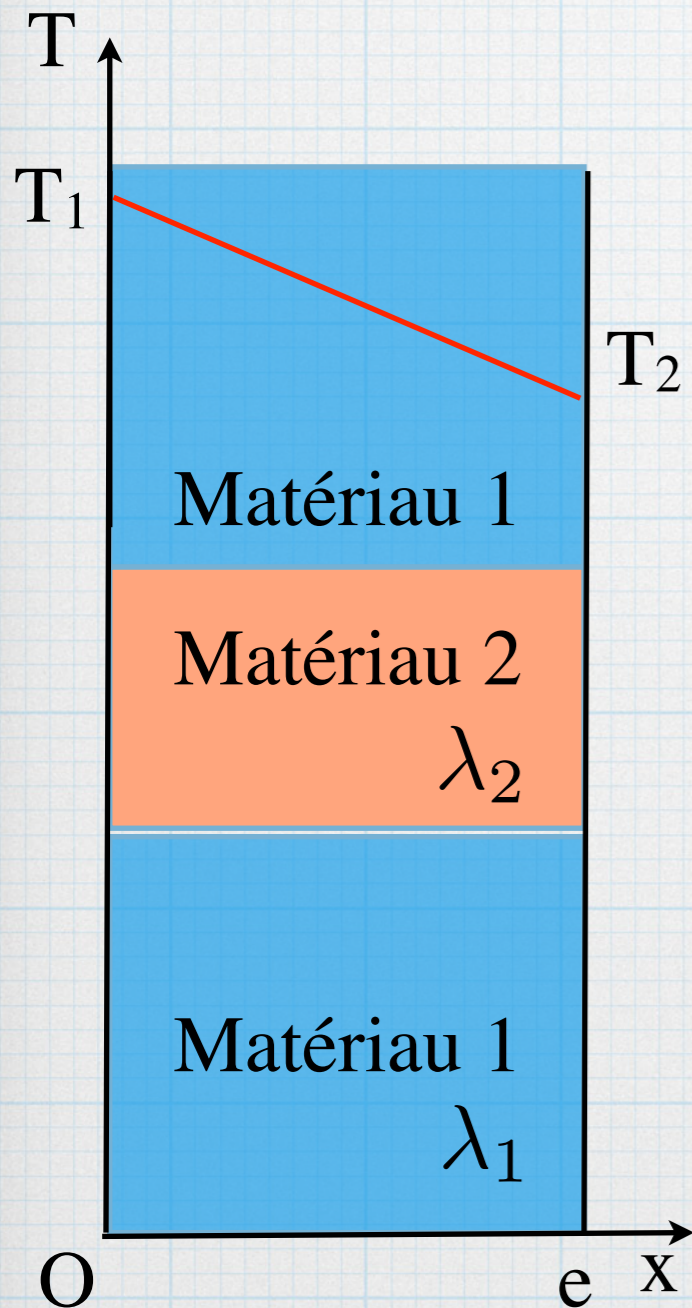


Systeme d'équations

$$\dot{Q}_1 = S_1 \lambda_1 \frac{T_2 - T_1}{e}$$

$$\dot{Q}_2 = S_2 \lambda_2 \frac{T_2 - T_1}{e}$$

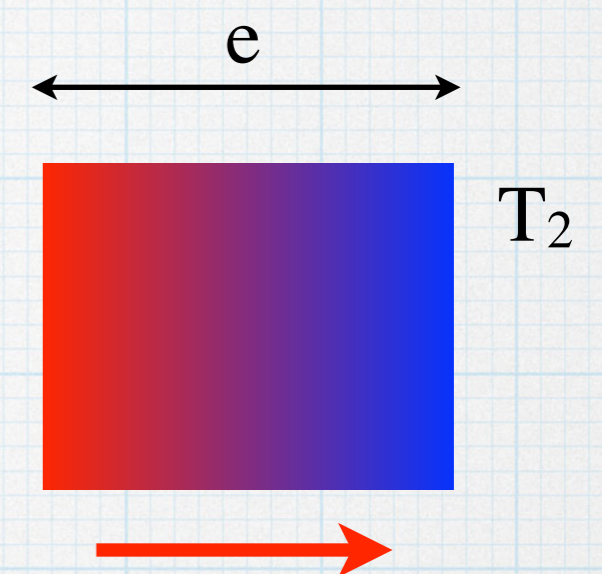
$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_1$$



Analogie électrique

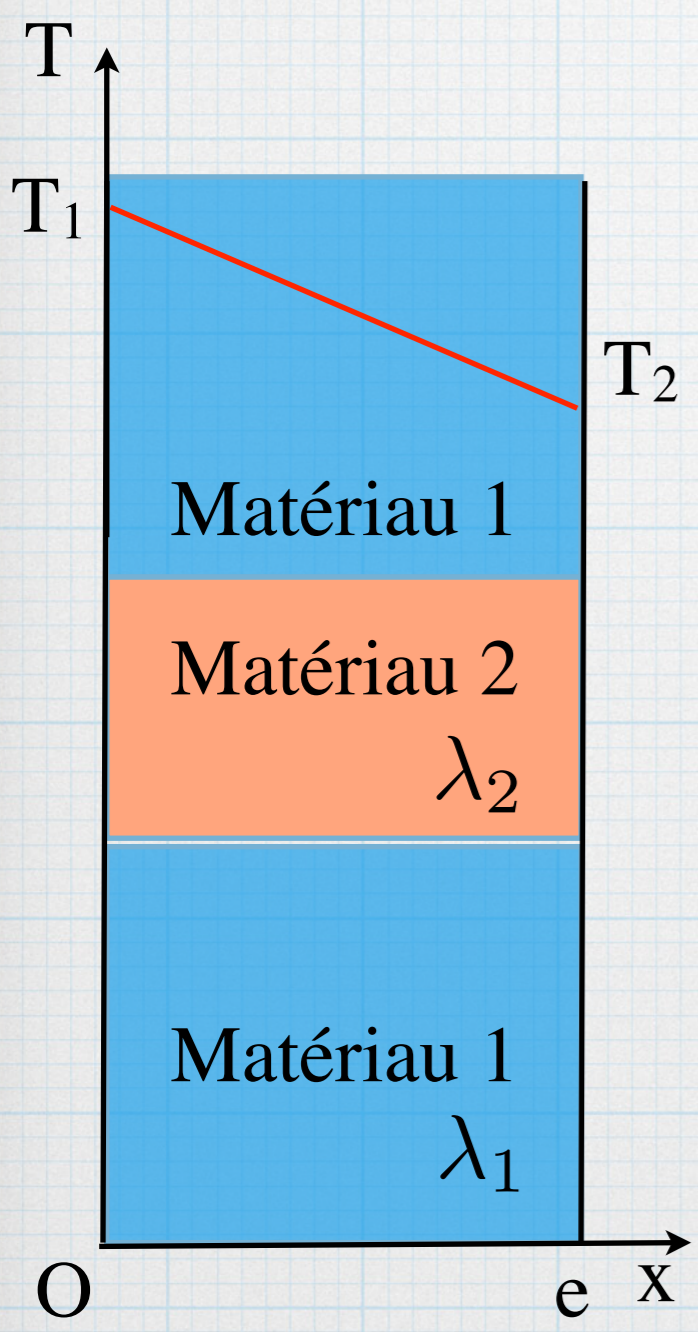
- Phénomène stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Pas de source : $S = 0$
- Matériaux homogènes isotropes

$$\vec{\nabla} T = \frac{T_2 - T_1}{e} \hat{e}_x$$



Analogie électrique

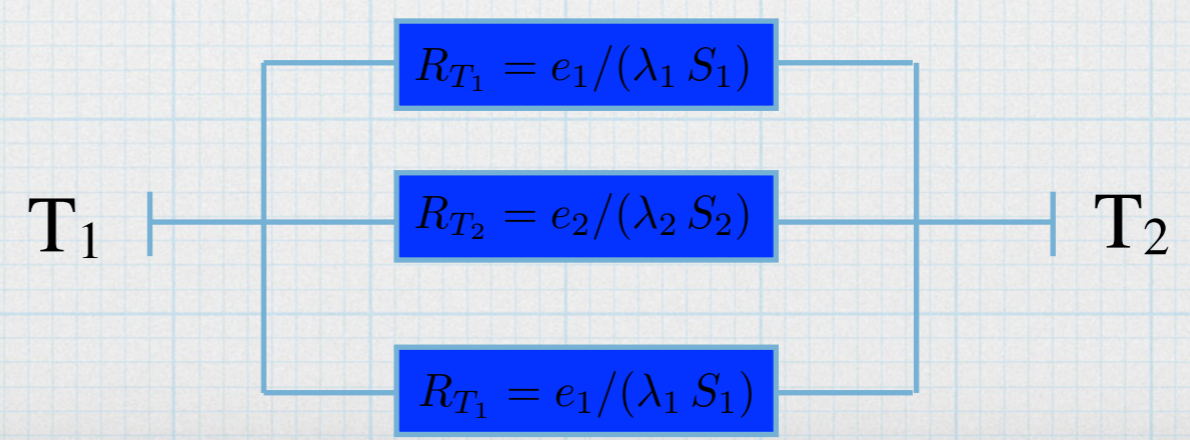
Résistance thermique en parallèle



$$\dot{Q}_1 = S_1 \lambda \frac{T_2 - T_1}{e}$$

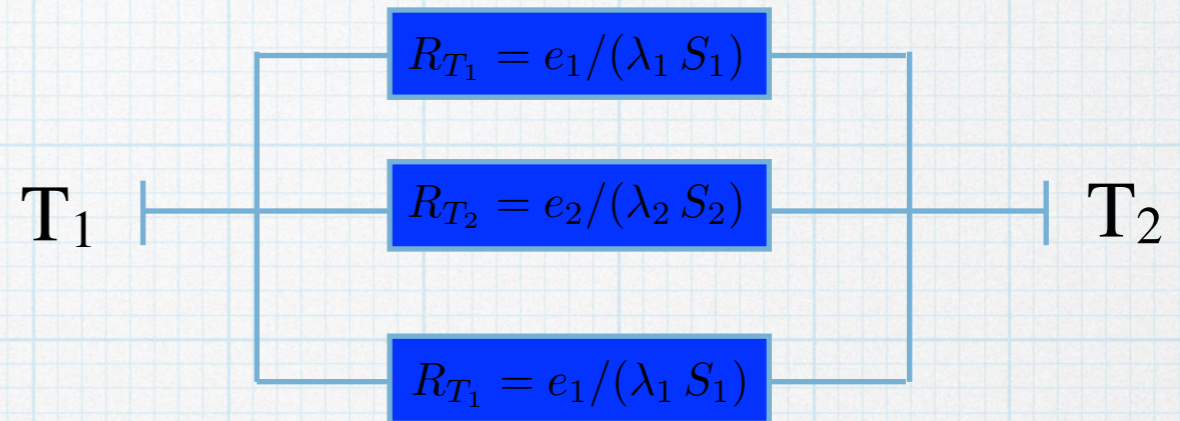
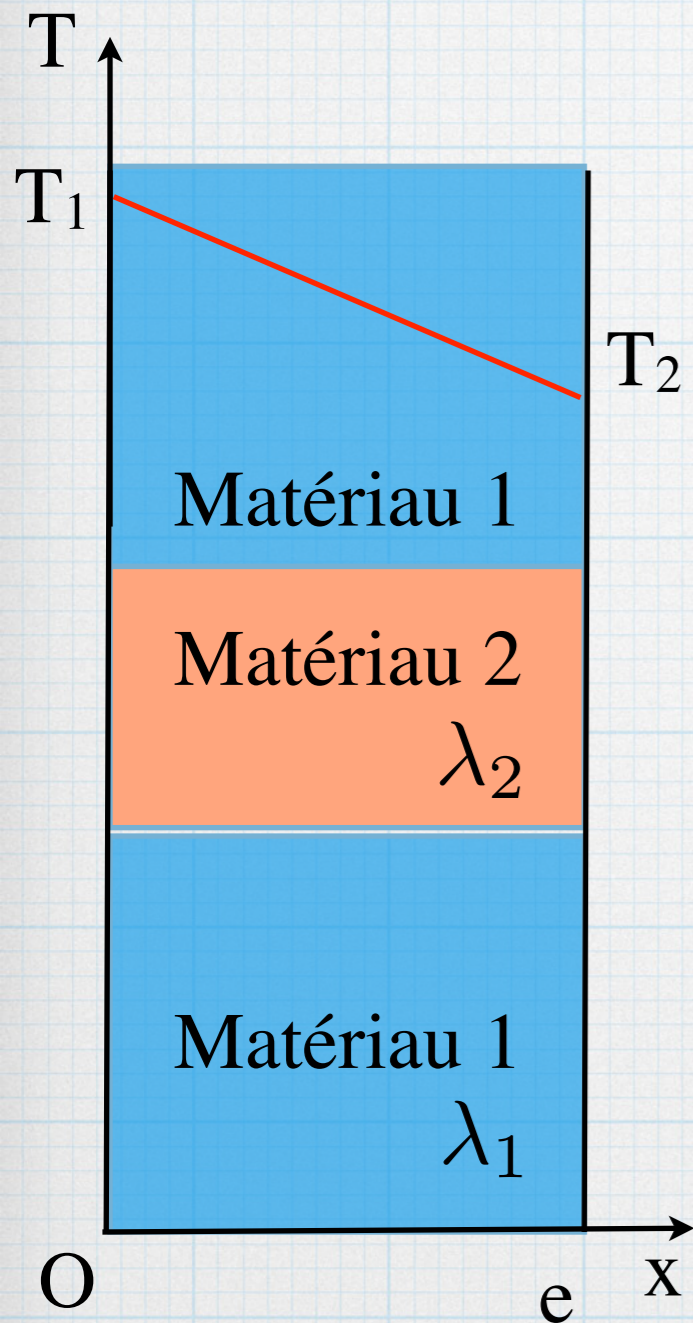
$$R_T = \frac{e}{S_1 \lambda_1}$$

$$\dot{Q}_1 = \frac{1}{R_{T_1}} (T_2 - T_1)$$



Analogie électrique

Résistance thermique en parallèle



$$\dot{Q}_1 = \frac{1}{R_{T_1}} (T_2 - T_1)$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{1}{R_{T_2}} (T_2 - T_1)$$

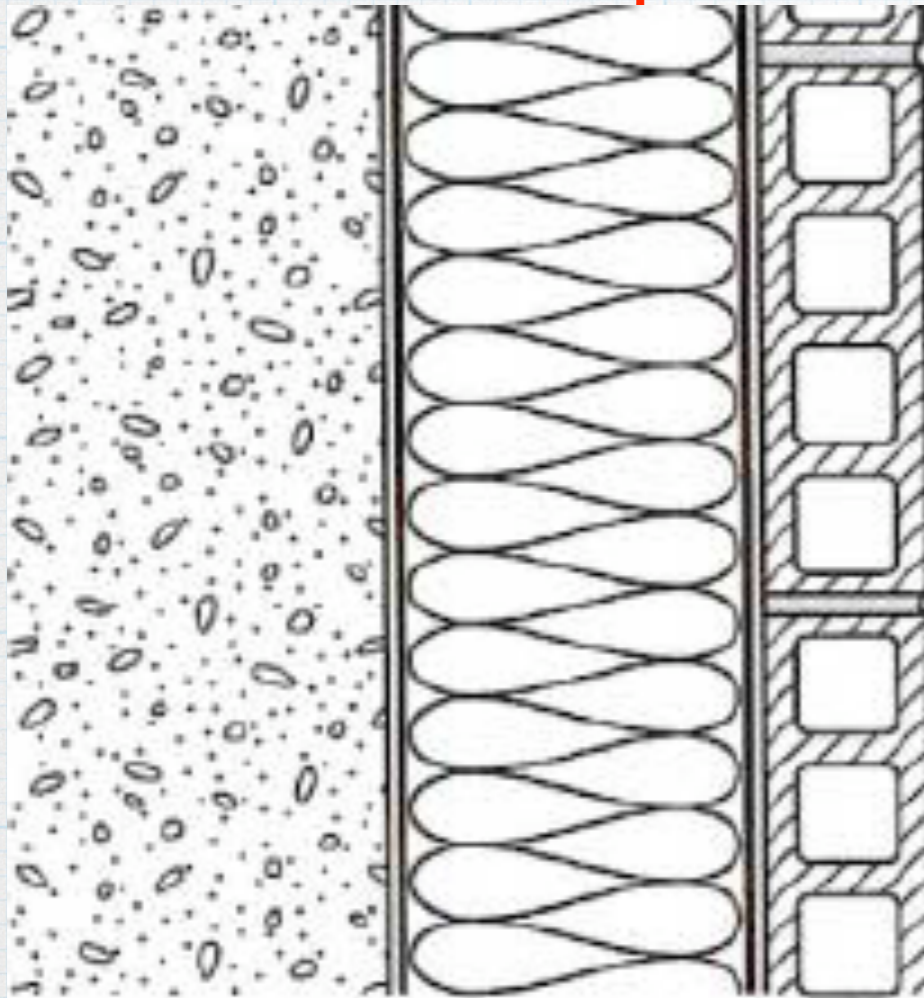
Résistances en parallèle

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{T_1}} + \frac{1}{R_{T_2}} + \frac{1}{R_{T_1}}$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_T} (T_2 - T_1)$$

Analogie électrique

Résistance thermique de contact : Assemblage imparfait de 2 matériaux



zone de contact

On définit $R_c = \frac{\Delta T_c}{\Phi_c}$

Empirique $R_c \approx 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$

$R_T \approx 1.25 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$ 5 cm d'isolant

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_T} (T_2 - T_1)$$



$$R_{T_1} = e_1 / \lambda_1 S_1$$

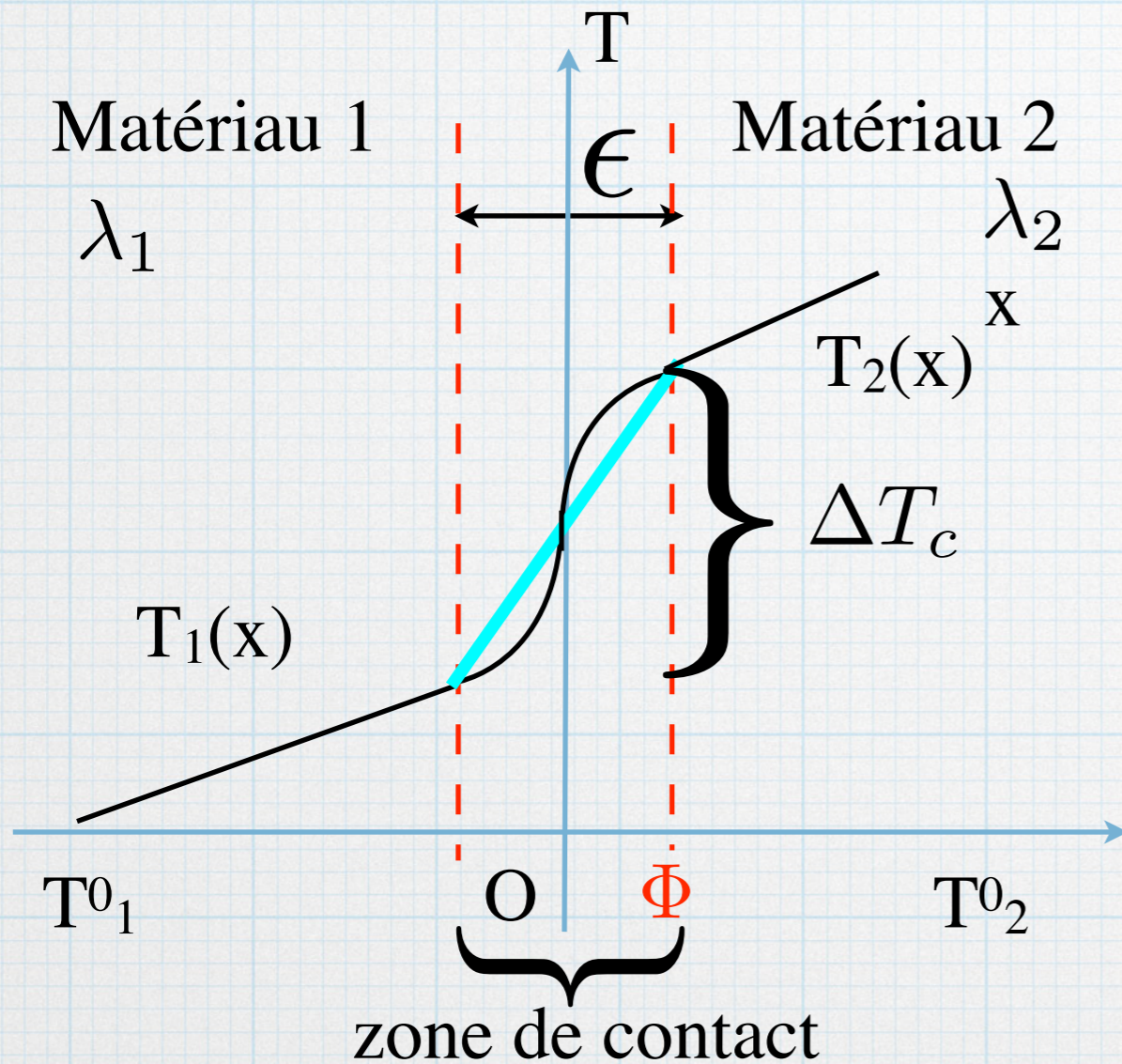
$$R_{T_2} = e_2 / \lambda_2 S_2$$

Résistance thermique en série

$$R_t = R_{T_1} + R_c + R_{T_2}$$

Analogie électrique

Résistance thermique de contact : Assemblage imparfait de 2 matériaux



On définit $R_c = \frac{\Delta T_c}{\Phi_c}$

Empirique $R_c \approx 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$

$R_T \approx 1.25 \text{ m}^2 \cdot \text{K/W}$ 5 cm d'isolant

$$\dot{Q} = \frac{1}{R_T} (T_2 - T_1)$$



Résistance thermique en série

$$R_t = R_{T_1} + R_c + R_{T_2}$$

Analogie électrique

Résistance thermique de contact : Assemblage imparfait de 2 matériaux

Dans le bâtiment certains matériaux ne sont pas homogènes:

- Briques alvéolées
- Bétons moulés

on a donc pas de λ constant

On les définit grâce à leur résistance thermique, la résistance utile R_u

Pour le bloc de béton à 4 rangés d'alvéoles de 20 cm d'épaisseur :

$$R_u = 0.28 \text{ m}^2\text{K} / \text{W}$$

CONDUCTION

* II: Le coefficient d'échange

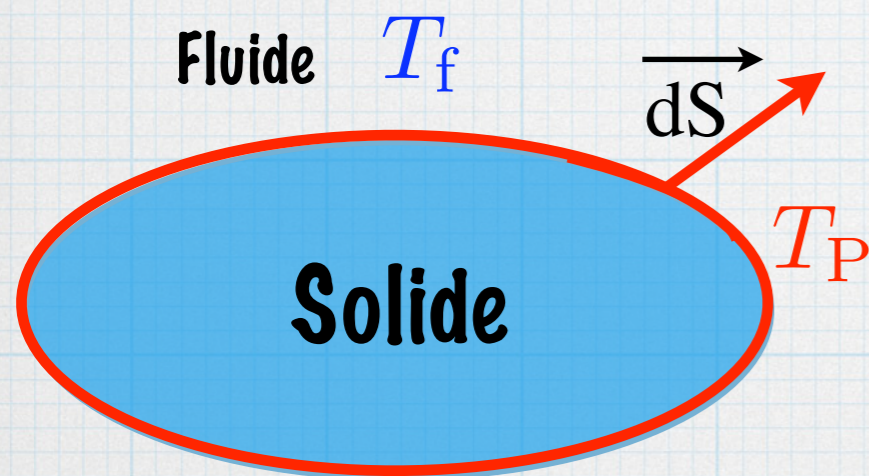
- Coefficient d'échange et nombre de BIOT
- Température dans un mur
- Le modèle de l'ailette

Coefficient d'échange et nombre de BIOT

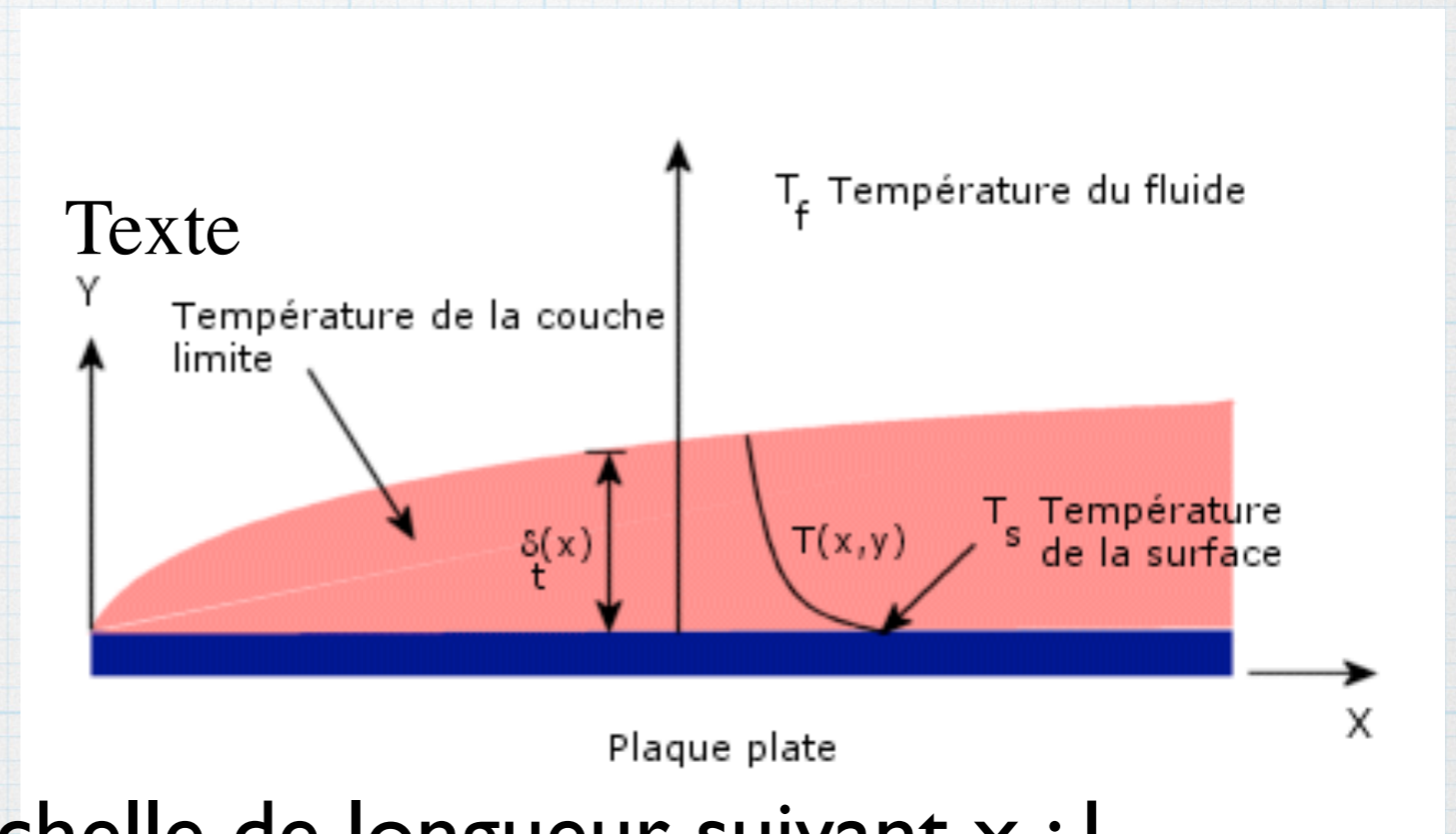
I- coefficient d'échange thermique h

Trop de phénomènes pour résoudre totalement le pb \longrightarrow Empirisme
 $W / (m^2 K)$

$$\vec{q}_p = h (T_P - T_f) \cdot d\vec{S}$$



Tout le pb est d'évaluer h



Echelle de longueur suivant x : L

Echelle de longueur suivant y : δ_T

Echelle de vitesse suivant x : U_∞

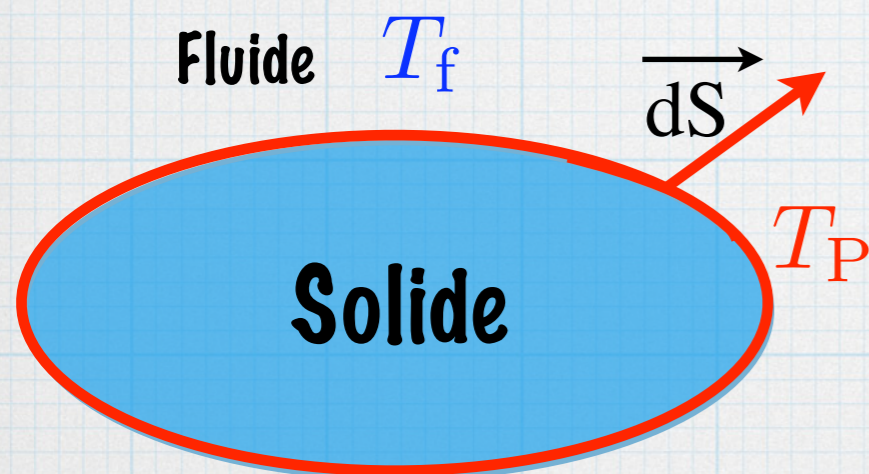
Echelle de vitesse suivant y : v_0

Coefficient d'échange et nombre de BIOT

I- coefficient d'échange thermique h

Trop de phénomènes pour résoudre totalement le pb \longrightarrow Empirisme
 $W / (m^2 K)$

$$\vec{q}_p = h (T_P - T_f) \cdot d\vec{S}$$



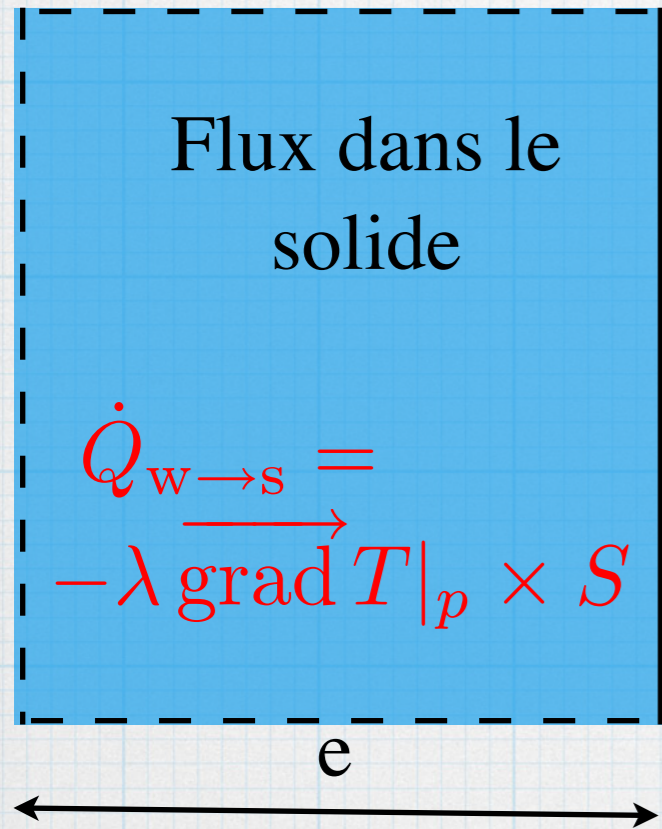
Tout le pb est d'évaluer h

h	$W / (m^2 K)$
Convection libre (air)	5-25
Convection libre (eau)	100-900
Convection forcée (air)	10-500
Convection forcée (eau)	100-15000
Convection forcée (huile)	50-2000
Convection forcée (métaux fondus)	6000-120000
Eau bouillante	2500-25000
Vapeur d'eau se condensant	50000-100000
Rayonnement (linéarisé à 300K)	1

Coefficient d'échange et nombre de BIOT

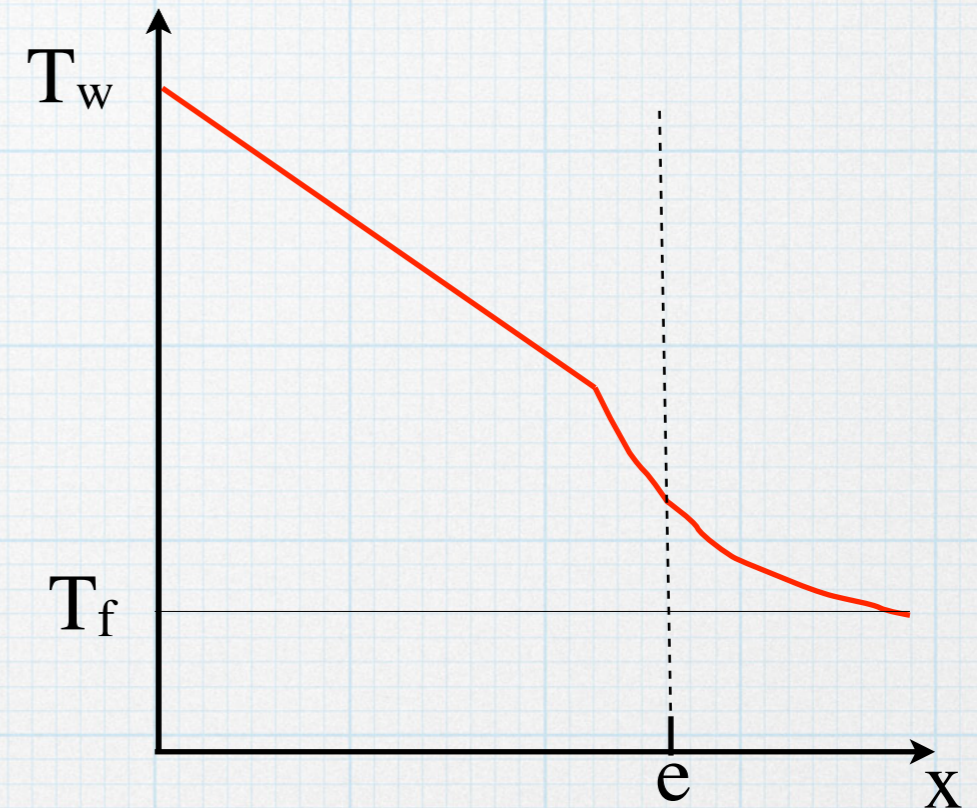
Solide w à
température T_w

Fluide à
température T_f



\overrightarrow{dS}

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{p \rightarrow f} &= \\ &= h (T_P - T_f) \times S \end{aligned}$$



L'égalité des flux à la paroi s'écrit : $\lambda \left(\overrightarrow{\text{grad}}_p T \right) S + h (T_P - T_f) S = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda \overrightarrow{\text{grad}}_p T + h (T_P - T_f) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \overrightarrow{\text{grad}}_p T + h (T_P - T_f) = 0$$

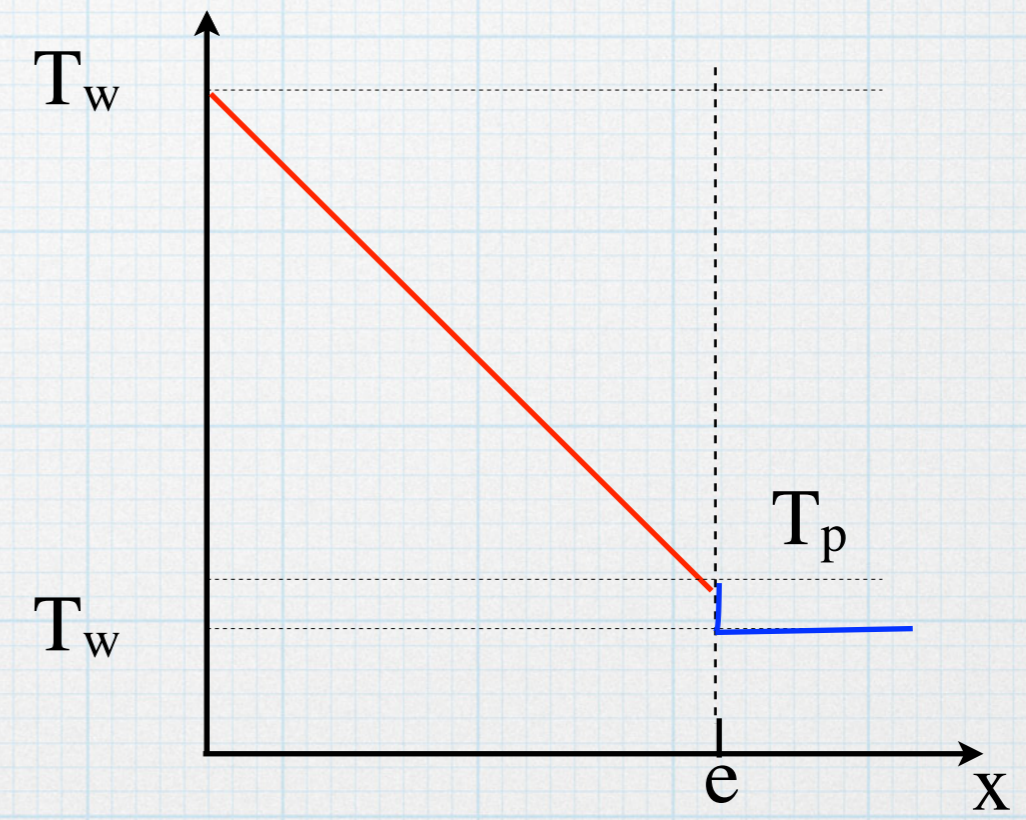
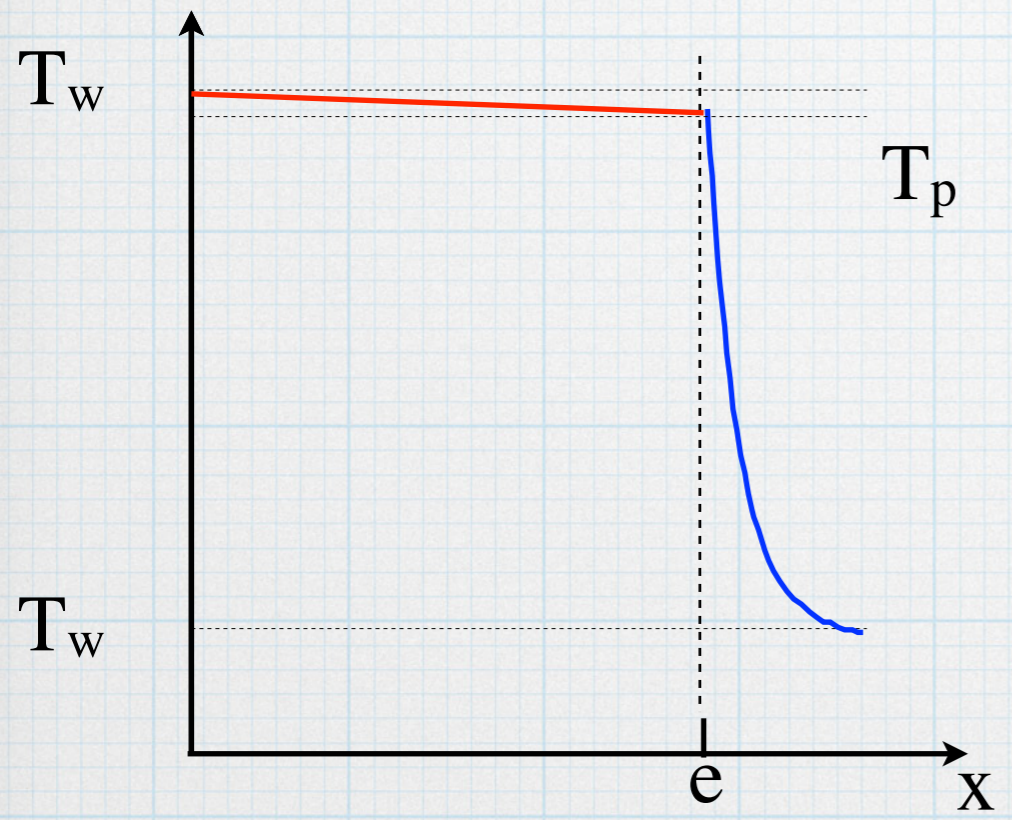
$$\Leftrightarrow \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_p + h (T_p - T_w) = 0$$

Coefficient d'échange et nombre de BIOT

La variation caractéristique de la température est $\Delta T = T_w - T_f$

La longueur caractéristique pour le flux est la longueur normale à la paroi sur laquelle se produit l'échange ici e

2 situations extrêmes

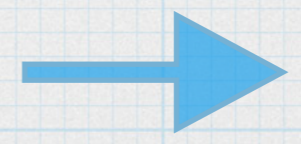


On peut écrire

$$T = \Delta T \tilde{T} \quad \tilde{T} \in [0, 1]$$
$$x = e \tilde{x} \quad \tilde{x} \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \Delta T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}$$



$$\left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \right|_p = \frac{h e}{\lambda} \tilde{T}$$

Coefficient d'échange et nombre de BIOT

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \Big|_p = \frac{h e}{\lambda} \tilde{T}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \Big|_p = \text{Bi} \tilde{T}$$

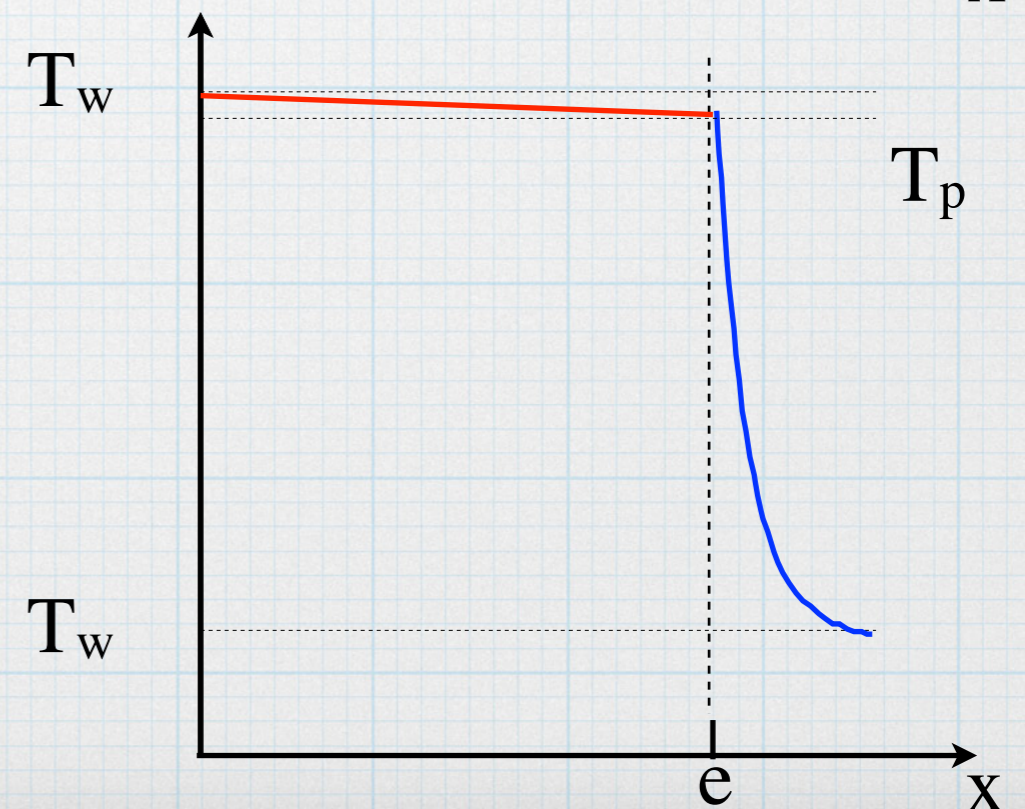
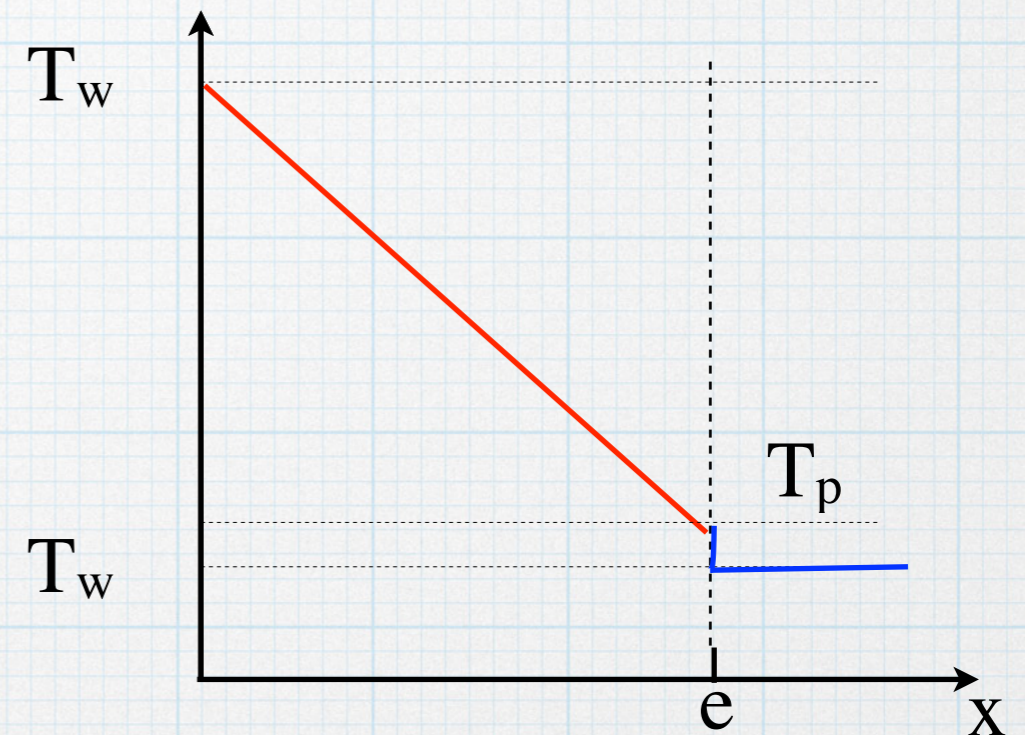
Bi : Nombre de Biot

$\text{Bi} \gg 1 \Rightarrow \frac{1}{\text{Bi}} \approx 0$ • Le fluide impose sa température à la paroi
 $\Rightarrow \tilde{T} \approx 0$ • Flux nul à la paroi

➔ **Paroi adiabatique**

$\text{Bi} \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \Big|_p \ll 1$

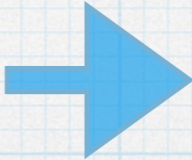
Paroi à température imposée



Coefficient d'échange et nombre de BIOT

$$Bi = \frac{he}{\lambda}$$

- $Bi \ll 1$ Soit e petit : système mince
Soit : très conducteur devant "le fluide"

- $Bi \gg 1$ Soit peu conducteur
Soit e très grand  Isolant

Coefficient d'échange et nombre de BIOT

$$Bi = \frac{he}{\lambda}$$

- $Bi \ll 1$ Soit e petit : système mince
Soit : très conducteur devant "le fluide"

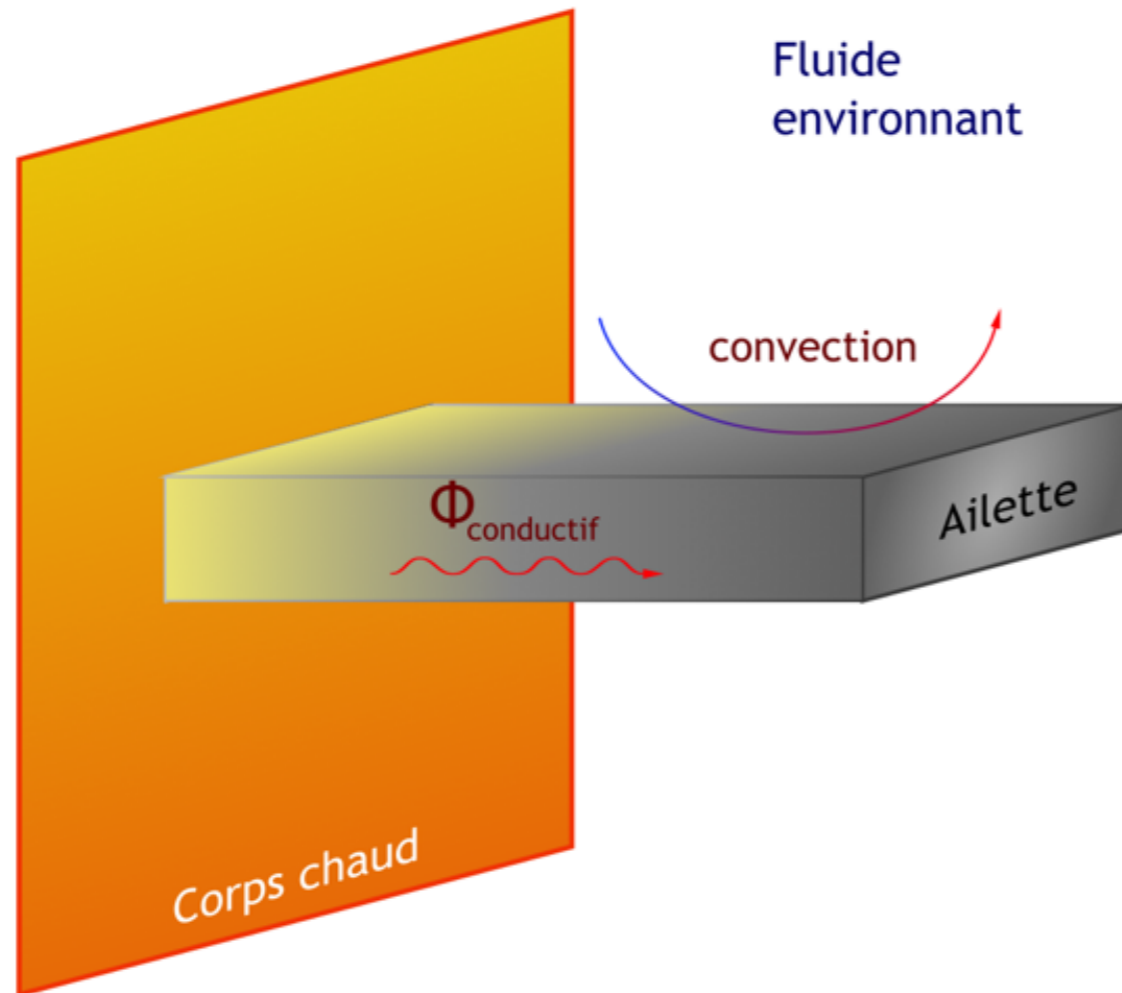
- $Bi \gg 1$ Soit peu conducteur
Soit e très grand  Isolant

L'égalité des flux à la paroi s'écrit : $-\lambda \left(\overrightarrow{\text{grad}}_p T \right) S + h (T_P - T_f) S = 0$

$$R_{cond} = \frac{e}{\lambda S} \quad R_{conv} = \frac{1}{h S} \quad Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{he}{\lambda}$$

Remarque : On peut voir le nombre de Biot comme un rapport de résistances thermique

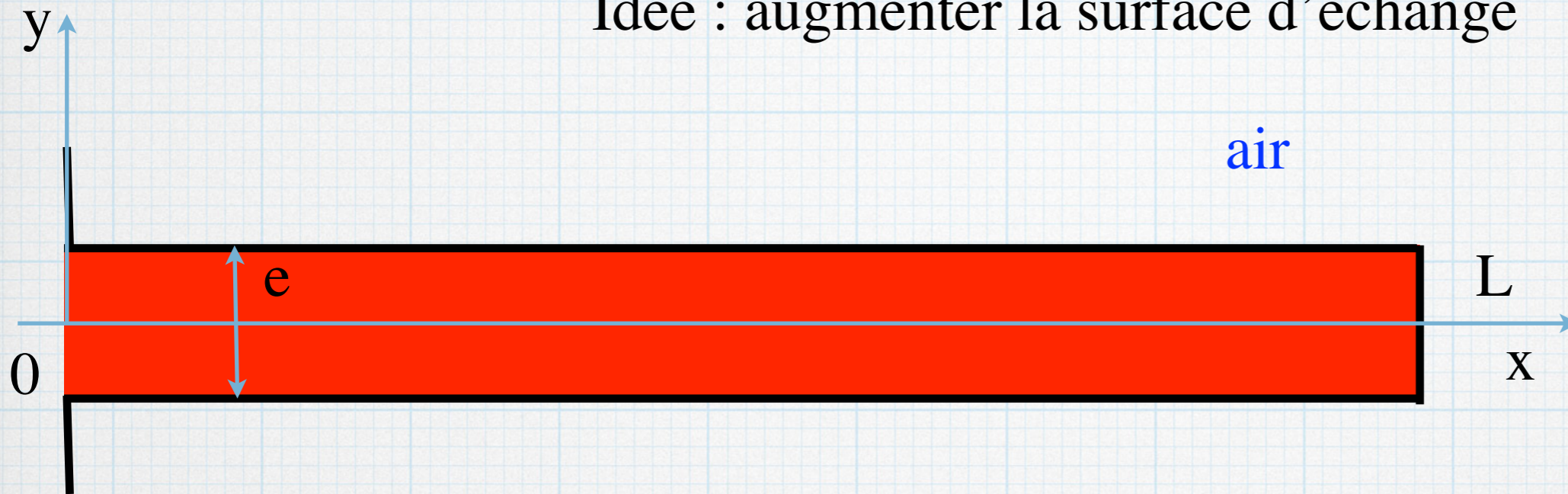
Échangeur thermique : l'Ailette



Idée : augmenter la surface d'échange

Échangeur thermique : l'Ailette

Idée : augmenter la surface d'échange



- On néglige le transfert radiatif
- Bon conducteur et conductivité constante $\lambda \gg 1$
- Le coefficient d'échange est connu $\dot{Q}_p = h (T_P - T_a) \times S$

Dans la direction y $Bi_e = \frac{h e}{\lambda} \ll Bi_L = \frac{h L}{\lambda}$

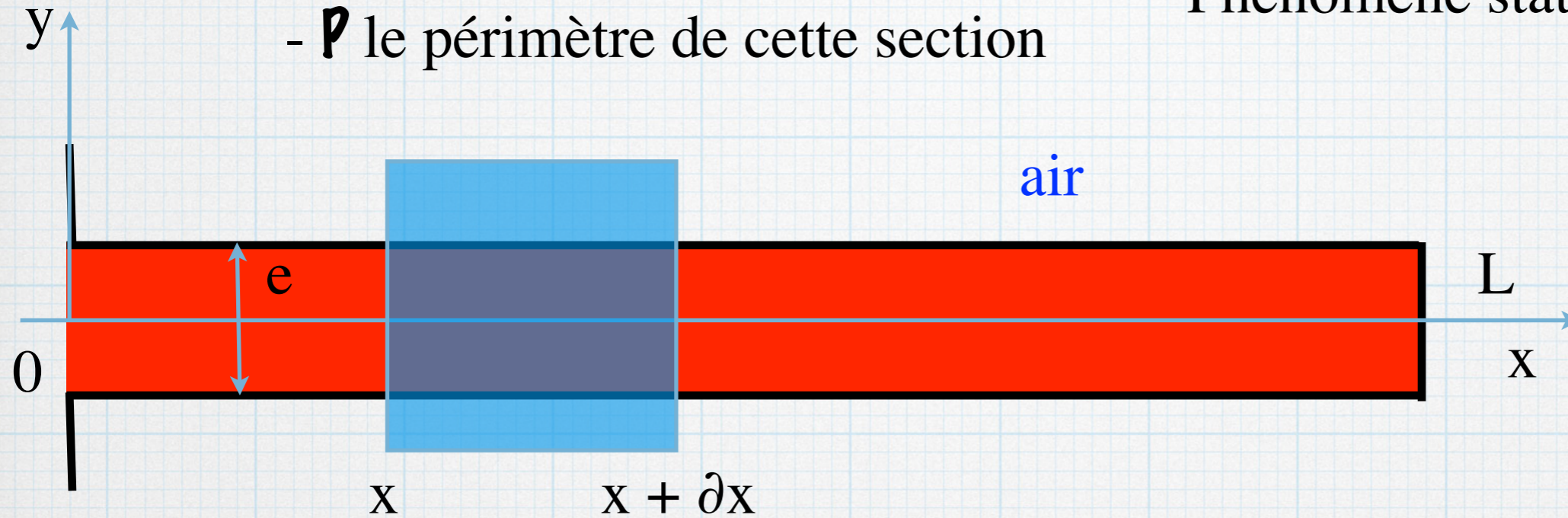
→ donc les isothermes sont orthogonales à x

→ $\frac{\partial T}{\partial y} \ll \frac{\partial T}{\partial x}$

Échangeur thermique : l'Ailette

On appelle : - \mathcal{A} l'air de la section de l'ailette
- \mathcal{P} le périmètre de cette section

Phénomène stationnaire $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$



$$\dot{q}(x + dx) \times \mathcal{A} - \dot{q}(x) \times \mathcal{A} - h (T_a - T(x)) \times \mathcal{P} dx = 0$$

$$\frac{\dot{q}(x + dx) - \dot{q}(x)}{dx} = -h (T_a - T(x)) \times \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{A}} \quad \text{avec} \quad \dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = h (T(x) - T_a) \times \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{A}}$$

Échangeur thermique : l'Ailette

$$\lambda \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = h (T(x) - T_a) \times \frac{\mathcal{P}}{A}$$

On pose : $m = \sqrt{\frac{\mathcal{P} h}{A \lambda}}$ et $\tilde{T} = T - T_a$

m : module de l'ailette

$$\frac{d^2 \tilde{T}(x)}{dx^2} - m^2 \tilde{T} = 0 \quad B = -T_a - A$$

$$\tilde{T} = \tilde{A} e^{mx} + \tilde{B} e^{-mx}$$

avec les C.L. $T(0) = T_0 \longrightarrow \tilde{T}(0) = T_0 + T_a \longrightarrow B = T_0 + T_a - A$

- $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{h}{\lambda} (T(L) - T_a)$ température connue en bout d'ailette

- $P = -\lambda \mathcal{A} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$ flux thermique évacué connu

Échangeur thermique : l'Ailette

$$T(0) = T_0 \longrightarrow B = T_0 + T_a - A$$

- $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{h}{\lambda} (T(L) - T_a)$ température connue en bout d'ailette

$$\Rightarrow A = \frac{(T_0 + T_a) e^{mL} - \frac{h}{\lambda m} (T(L) - T_a)}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$B = \frac{(T_0 + T_a) e^{-mL} - \frac{h}{\lambda m} (T(L) - T_a)}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Échangeur thermique : l'Ailette

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{\left(1 + \frac{m\lambda}{h}\right) e^{m(L-x)} - \left(1 - \frac{m\lambda}{h}\right) e^{-m(L-x)}}{\left(1 + \frac{m\lambda}{h}\right) e^{mL} - \left(1 - \frac{m\lambda}{h}\right) e^{-mL}}$$

$$T(L) = T_a + (T_0 - T_a) \frac{\frac{2m\lambda}{h}}{\left(1 + \frac{m\lambda}{h}\right) e^{mL} - \left(1 - \frac{m\lambda}{h}\right) e^{-mL}}$$

$$T(L) \rightarrow T_a \quad e^{mL} \gg 1 \rightarrow L \approx \frac{5}{m}$$

Efficacité d'une Ailette

En régime permanent, le flux échangé par l'ailette est égale au flux conductif au pied de l'ailette

$$\dot{Q} = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_0 \times \mathcal{A}$$

L'efficacité de l'ailette = $\frac{\text{le flux réellement échangé par l'ailette}}{\text{Le flux qu'aurait échangé un ailette à température constante}}$

$$\eta_A = \frac{\dot{Q}}{h (T_f - T_a) \times \mathcal{P}x}$$

Cf exercice ailette

Les ailettes couramment utilisées n'ont pas nécessairement une section constante. Le même type d'analyse que celle que nous venons de faire peut aussi être effectuée sur des géométries plus complexes. En pratique, on trouve dans la littérature l'expression de l'efficacité pour les géométries les plus courantes. Le résultat est présenté soit dans un formulaire, soit sous forme d'abaque. Pour plus de détails, on se réfèrera par exemple à « Fundamentals of heat and mass transfer », par D.P. De witt et F.P. Incropera.

Le rendement d'une surface ailettée

$$\eta_0 = \frac{\dot{Q}_t}{hS_t(T_a - T_f)}$$

S_t : surface d'échange totale (totalité des ailettes + base)

\dot{Q}_t : flux thermique au travers de la surface totale S_t .

En conclusion, le calcul du flux échangé par la totalité d'une surface pourvue d'ailettes peut se décomposer en trois étapes.

1 - Calcul de l'efficacité d'une ailette. η_a

Dans la pratique, on n'est que rarement obligé de procéder à la résolution de l'équation, la littérature donnant des abaques ou des formulaires pour les configurations courantes.

2 - Calcul du rendement de la surface. η_0

3 - Si la température du pied est connue, on peut calculer directement le flux thermique échangé. Dans le cas contraire, on détermine l'expression de la résistance thermique de la surface ailetée :

$$R_{th} = \frac{1}{\eta_0 h S_t}$$

Cette résistance thermique tient compte à la fois de la conduction dans les ailettes et des transferts convectifs dans le fluide. Elle peut être composée avec les autres résistances thermiques du problème, pour construire le schéma électrique équivalent.

Conduction Instationnaires

Équation de la chaleur instationnaire

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T \quad \text{on pose} \quad \kappa = \frac{\lambda}{\rho C} \quad \text{la diffusivité thermique}$$
$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C} \quad \text{(dépend des ouvrages)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

Les méthodes de résolution de l'équation de la chaleur en régime instationnaire sont nombreuses :

- Séparation des variables
- Transformation de Laplace
- Fonctions de Green
- etc...

Milieu semi-infini soumis à un échelon de température

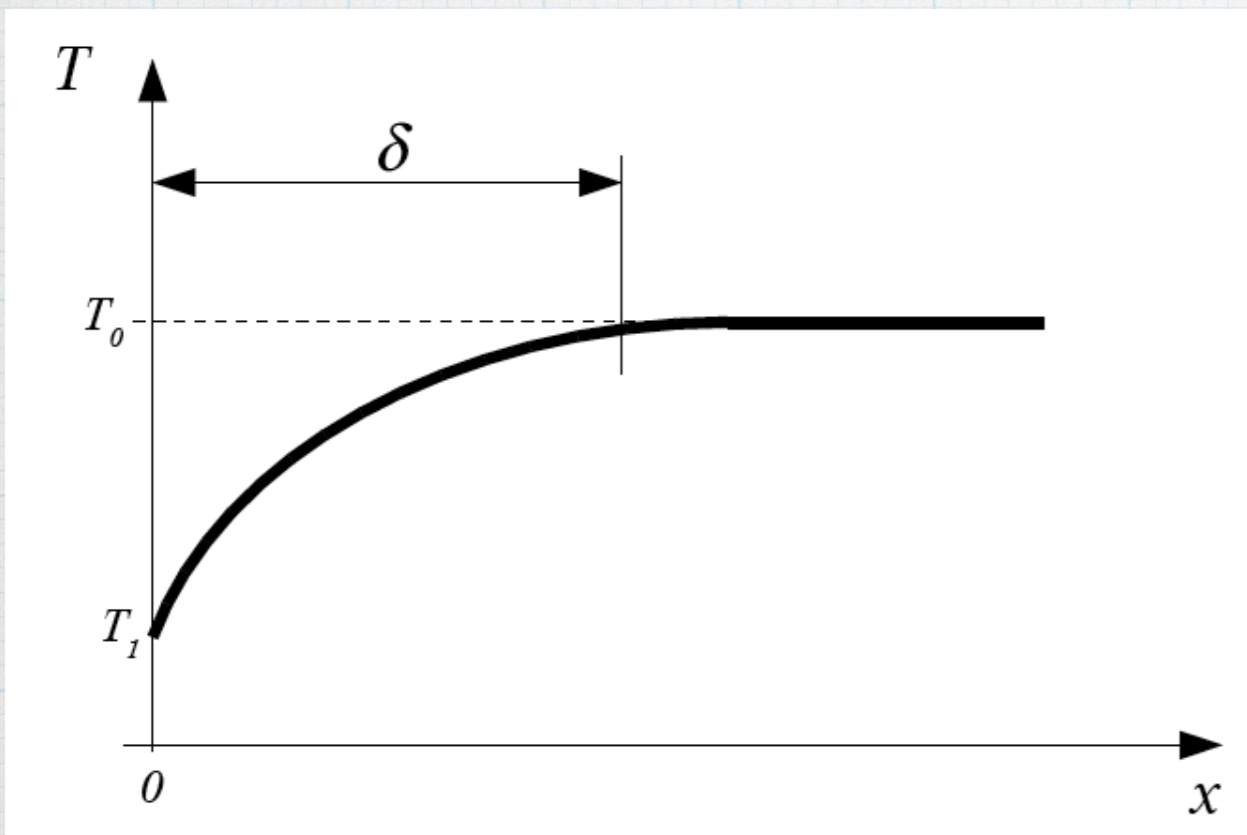
à l'instant t_0 on augmente la température de T_0 à T_1

$$T(x, 0) = T_0$$

$$T(0, t) = T_1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_0$$

$$\dot{q}_0 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$$



Ordre de grandeur

$$\left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| \sim \frac{|T_1 - T_0|}{t}$$

$$\left| \frac{\partial T}{\partial x} \right| \sim \frac{|T_1 - T_0|}{\delta}$$

$$\left| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \sim \frac{|T_1 - T_0|}{\delta^2}$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{|T_1 - T_0|}{t} \sim \frac{|T_1 - T_0|}{\delta^2} \Rightarrow \delta(t) \sim \sqrt{\kappa t}$$

	Air	Laine de verre	Bois	Verre	Béton plein	Acier doux	Cuivre
κ (m ² .s ⁻¹)	2,2.10 ⁻⁵	2.10 ⁻⁶	1,5.10 ⁻⁷	7,5.10 ⁻⁷	7.10 ⁻⁷	1,8.10 ⁻⁵	1,2.10 ⁻⁴

Résolution analytique On pose $\eta(x, t) = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{x}{2t^{3/2} \sqrt{\kappa}} \frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\kappa t}} \frac{dT}{d\eta} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa t} \frac{d^2 T}{d\eta^2}$$

L'équation devient : $\frac{d^2T}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{dT}{d\eta} = 0$

$$\frac{dT}{d\eta} = A \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)$$

$$T(\eta) = A \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

Avec les conditions aux limites

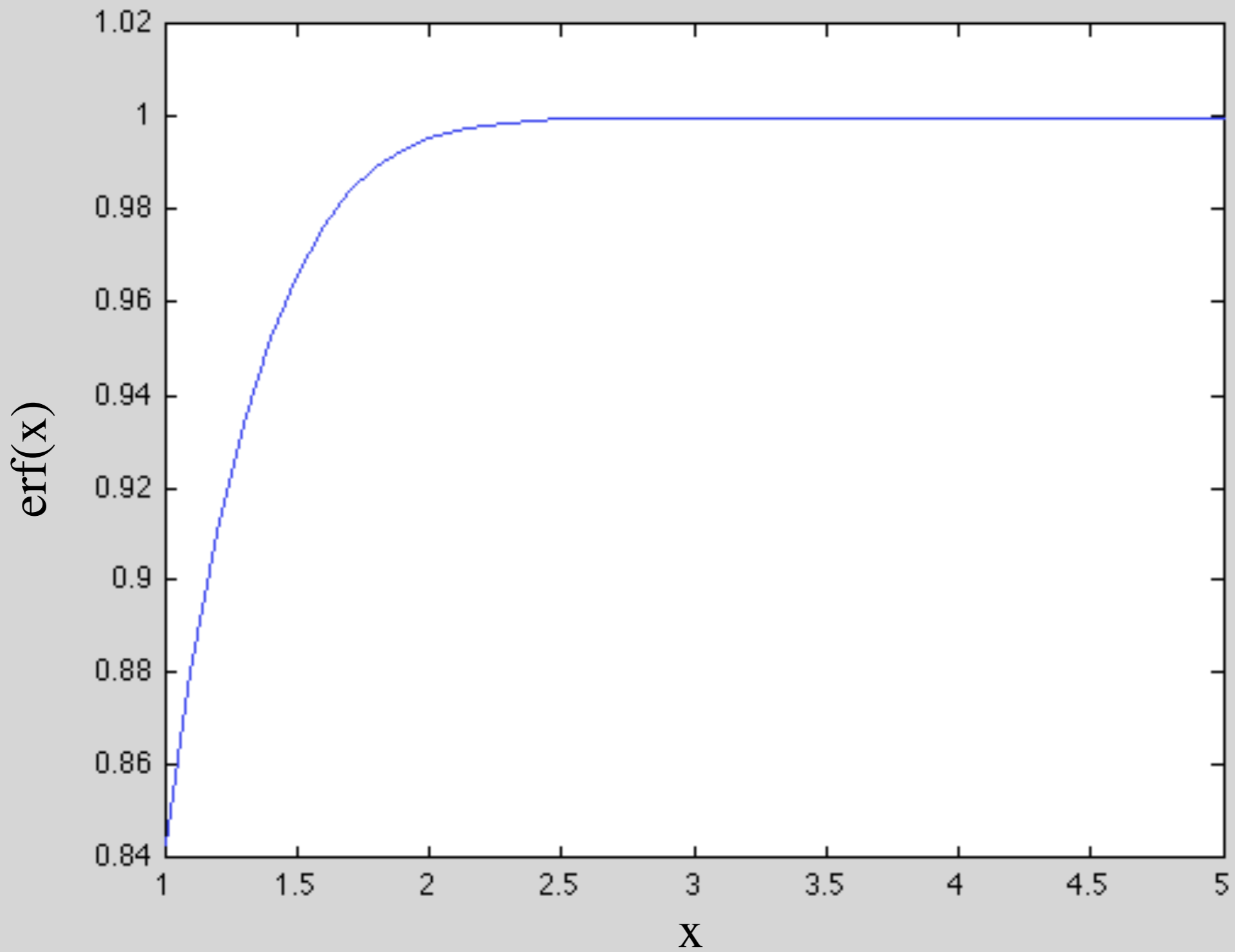
$$T(x, 0) = T_0$$

$$T(0, t) = T_1$$

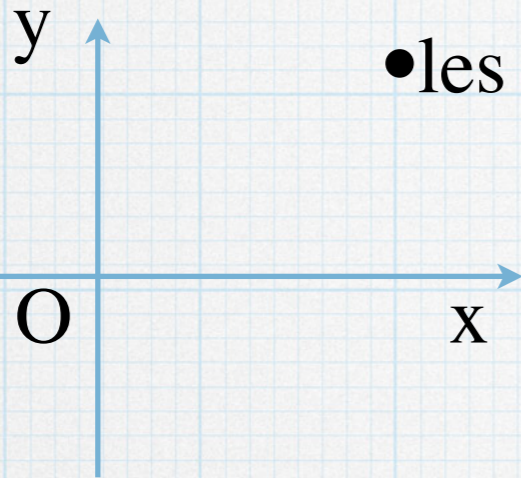
$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_0$$

$$\dot{q}_0 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$T(x, t) = (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) + T_1$$



Exemple : Mise en contact de 2 solides



- les conditions aux limites $T_1(x, 0) = T_1^0$
 $T_1(-\infty, t) = T_1^0$
 $T_2(x, 0) = T_2^0$
 $T_2(\infty, t) = T_2^0$

- Équilibre moléculaire impose $T_1(0, t) = T_2(0, t)$

- Dans chaque solide on a l'Eq. de la chaleur soit $\frac{\partial T_1}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
 $\frac{\partial T_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}$

- À l'interface égalité des flux soit: $-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0, t)$

Exemple : Mise en contact de 2 solides

On adimensionne l'équation $\tilde{T} = \frac{T}{T_0}$, $\tilde{t} = \frac{\kappa t}{L^2}$ et $\tilde{x} = \frac{x}{L}$

l'équation devient : $\frac{\kappa T_0}{L^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\kappa T_0}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2}$ soit $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2}$

Transformation de LAPLACE $\int_0^\infty e^{-p\tilde{t}} \times \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t} = \int_0^\infty e^{-p\tilde{t}} \times \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} d\tilde{t}$

Intégration par partie ↓

$$\left[e^{-p\tilde{t}} \tilde{T} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -p e^{-p\tilde{t}} \tilde{T} d\tilde{t} = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left(e^{-p\tilde{t}} \tilde{T} \right) d\tilde{t}$$

On pose $\theta(p) = \int_0^\infty \left(e^{-p\tilde{t}} \tilde{T} \right) d\tilde{t}$ l'équation devient

$$-\tilde{T}(x, 0) + p \theta(x, p) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, p) \quad p \in \mathbb{C}$$

Exemple : Mise en contact de 2 solides

Rm : $\tilde{T}(x, 0) = 0$ si $\tilde{T} = T - T^0$

On a alors : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x, p) - p\theta(x, p) = 0$

Les solutions : $\theta(x, p) = A e^{px} + B e^{-px}$

Transformation de Laplace inverse Formule de Mellin

$$e^{\pm px} \Rightarrow \text{Erfc} \left(\pm \frac{\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{t}}} \right)$$

$$\tilde{T} = A \text{Erfc} \left(-\frac{\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{t}}} \right) + B \text{Erfc} \left(\frac{\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{t}}} \right)$$

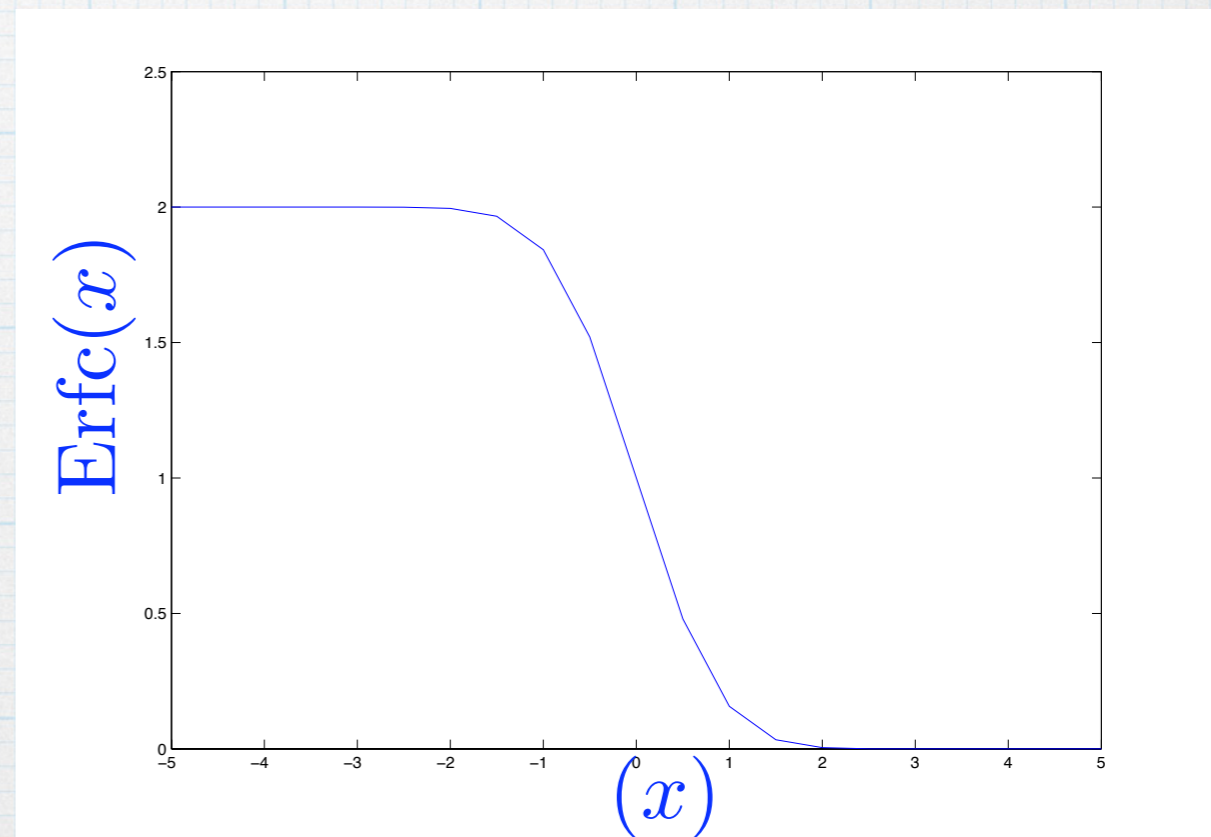


Table of Laplace Transforms

$$\bar{v}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}v(t) dt.$$

We write $q = \sqrt{(p/\kappa)}$. κ and x are always real and positive. α and h are unrestricted.

$\bar{v}(p)$	$v(t)$
1. $\frac{1}{p}$	1
2. $\frac{1}{p^{\nu+1}}, \nu > -1$	$\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}$
3. $\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
4. $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
5. $\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
6. e^{-qx}	$\frac{x}{2\sqrt{(\pi\kappa t^3)}} e^{-x^2/4\kappa t}$
7. $\frac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\frac{\kappa}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4\kappa t}$
8. $\frac{e^{-qx}}{p}$	$\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}}$
9. $\frac{e^{-qx}}{pq}$	$2\left(\frac{\kappa t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4\kappa t} - x \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}}$
10. $\frac{e^{-qx}}{p^2}$	$\left(t + \frac{x^2}{2\kappa}\right) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} - x \left(\frac{t}{\pi\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4\kappa t}$
11. $\frac{e^{-qx}}{p^{1+\frac{1}{2}n}}, n = 0, 1, 2, \dots$	$(4t)^{\frac{1}{2}n} i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}}$
12. $\frac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\frac{\kappa}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4\kappa t} - h\kappa e^{hx+\kappa th^2} \times$ $\times \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} + h\sqrt{(\kappa t)} \right\}$
13. $\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$\kappa e^{hx+\kappa th^2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} + h\sqrt{(\kappa t)} \right\}$
14. $\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}$	$\frac{1}{h} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} - \frac{1}{h} e^{hx+\kappa th^2} \times$ $\times \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} + h\sqrt{(\kappa t)} \right\}$

15. $\frac{e^{-qx}}{pq(q+h)}$	$\frac{2(\kappa t)^{\frac{1}{2}}}{h(\pi)} e^{-x^2/4\kappa t} - \frac{(1+hx)}{h^2} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} +$ $+ \frac{1}{h^2} e^{hx+\kappa th^2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} + h\sqrt{(\kappa t)} \right\}$
16. $\frac{e^{-qx}}{q^{n+1}(q+h)}$	$\frac{\kappa}{(-h)^n} e^{hx+\kappa th^2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} + h\sqrt{(\kappa t)} \right\} -$ $-\frac{\kappa}{(-h)^n} \sum_{r=0}^{n-1} [-2h\sqrt{(\kappa t)}]^r i^r \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} -$ $-2h\left(\frac{\kappa^3 t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/4\kappa t} + \kappa(1+hx+2h^2\kappa t)e^{hx+\kappa th^2}$ $\times \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} + h\sqrt{(\kappa t)} \right\}$
17. $\frac{e^{-qx}}{(q+h)^2}$	$\frac{1}{h^2} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} - \frac{2(\kappa t)^{\frac{1}{2}}}{h(\pi)} e^{-x^2/4\kappa t} -$ $-\frac{1}{h^2} (1-hx-2h^2\kappa t)e^{hx+\kappa th^2} \times$ $\times \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} + h\sqrt{(\kappa t)} \right\}$
18. $\frac{e^{-qx}}{p(q+h)^2}$	$\frac{1}{2} e^{xt} \left\{ e^{-x\sqrt{(\alpha/\kappa)}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} - \sqrt{(\alpha t)} \right] + \right.$ $\left. + e^{x\sqrt{(\alpha/\kappa)}} \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{(\kappa t)}} + \sqrt{(\alpha t)} \right] \right\}$
19. $\frac{e^{-qx}}{p-\alpha}$	$\frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2t\kappa^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/8\kappa t} K_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{8\kappa t} \right)$ $\frac{1}{2\sqrt{(\pi t)}} e^{-x^2/8\kappa t} K_{\nu} \left(\frac{x^2}{8\kappa t} \right)$
20. $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} e^{-qx}$	$\frac{1}{2t} e^{-(x^2+x'^2)/4\kappa t} I_{\nu} \left(\frac{xx'}{2\kappa t} \right), \nu \geq 0$
21. $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} K_{2\nu}(qx)$	$\frac{1}{2t} e^{-x^2/4\kappa t}$
22. $\left. \begin{matrix} I_{\nu}(qx')K_{\nu}(qx), & x > x' \\ I_{\nu}(qx)K_{\nu}(qx'), & x < x' \end{matrix} \right\}$	$I_0[2\sqrt{(xt)}]$
23. $K_0(qx)$	$e^{-\frac{1}{2}(a+b)(t+x)} I_0 \left\{ \frac{1}{2}(a-b)[t(t+2x)]^{\frac{1}{2}} \right\}$
24. $\frac{1}{p} e^{x/p}$	$x^{-\nu} 2^{\nu-1} \int_{x^2/4t}^{\infty} e^{-u} u^{\nu-1} du$ $\nu x^{\nu} I_{\nu}(xt)/t$
25. $\frac{\exp\{xp-x[(p+a)(p+b)]^{\frac{1}{2}}\}}{[(p+a)(p+b)]^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{t^{\frac{1}{2}\nu} e^{-\frac{1}{2}(a+b)t} I_{\nu} \left[\frac{1}{2}(a-b)t^{\frac{1}{2}}(t+4x)^{\frac{1}{2}} \right]}{(a-b)^{\nu}(t+4x)^{\frac{1}{2}\nu}}$
26. $p^{\frac{1}{2}\nu-1} K_{\nu}(x\sqrt{p})$	
27. $[p-\sqrt{(p^2-x^2)}]^{\nu}, \nu > 0.$	
28. $\frac{\exp\{x[(p+a)^{\frac{1}{2}}-(p+b)^{\frac{1}{2}}]^2\}}{(p+a)^{\frac{1}{2}}(p+b)^{\frac{1}{2}}[(p+a)^{\frac{1}{2}}+(p+b)^{\frac{1}{2}}]^{2\nu}},$	

Exemple : Mise en contact de 2 solides

Avec les conditions aux limites on trouve

$$\frac{T_1(x, t) - T_1^0}{T_2^0 - T_1^0} = \frac{b_1}{b_1 + b_2} \operatorname{Erfc} \left(-\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right) \quad x < 0$$

$$\frac{T_2(x, t) - T_2^0}{T_2^0 - T_1^0} = \frac{b_2}{b_1 + b_2} \operatorname{Erfc} \left(-\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}} \right) \quad x > 0$$

$$b = \frac{\lambda}{2\sqrt{\kappa}} = \sqrt{\lambda \rho C_m}$$

Effusivité thermique

Au contact $T_1(0, t) = T_2(0, t) = \frac{b_1 T_1^0 + b_2 T_2^0}{b_1 + b_2}$

Remarque

- La température de contact est constante dans le temps : car milieu semi-infini
- Si $b_1 \gg b_2$ alors $T_1(0, t) = T_2(0, t) \approx T_1^0$

Quelques valeurs d'effusivité:

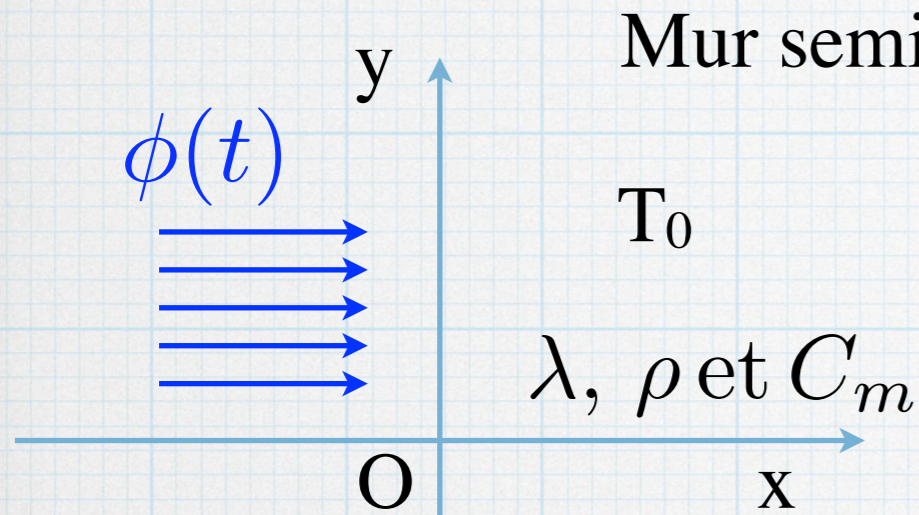
$$b_{\text{eau}} = 1600 \text{ (SI)}$$

$$b_{\text{bois}} = 11 \text{ (SI)}$$

$$b_{\text{acier}} = 13000 \text{ (SI)}$$

Si on marche sur du bois à 60°C : $T_p \sim 37^\circ\text{C}$
acier : $\sim 57^\circ\text{C}$

Exemple : Réponse à une sollicitation périodique



On fait une approximation sinusoidale

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \phi_0(0, \cos \omega t)$$

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{dT}{dt}$$

On cherche une solution de la forme

$$T(x, t) = \theta(x)e^{i\omega t} \text{ Sol. à variable séparée}$$

$$T(x \rightarrow \infty, t) = T_0$$

$$T(x, 0) = T_0$$

L'eq devient $i\omega\theta(x) = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

$$\theta(x) = A \text{Exp} \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}(1+i)x \right) + B \text{Exp} \left(+\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}(1+i)x \right)$$

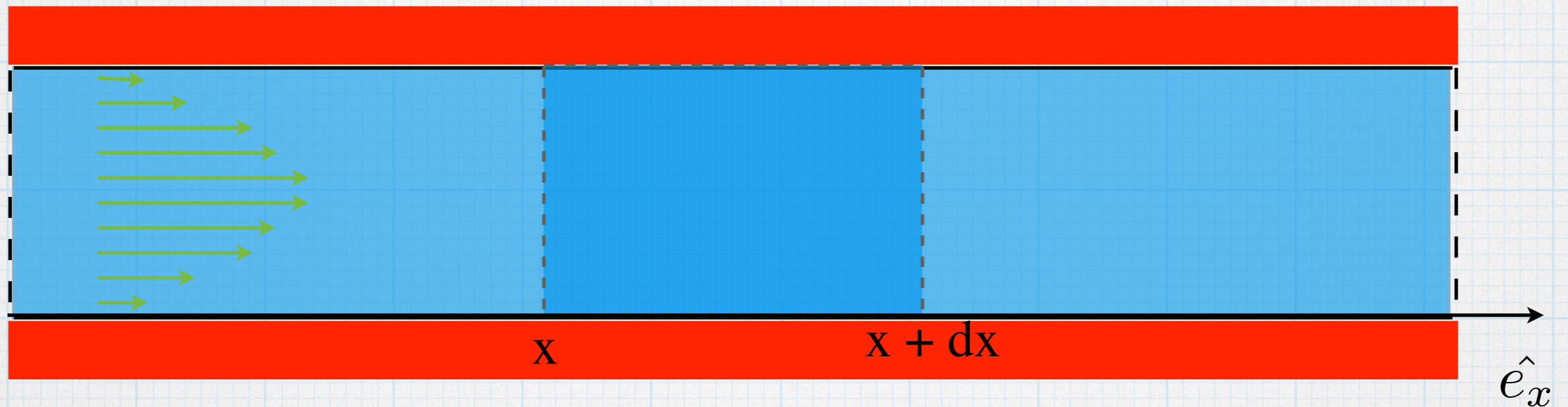
$$A = \frac{\phi_0}{\lambda} \sqrt{\frac{\kappa}{2\omega}}(1-i) \quad B = 0$$

$$T(x, t) = \frac{\phi_0}{\lambda} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega}} \text{Exp} \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}x \right) - \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \cos \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}x - \frac{\pi}{4} \right)$$

CONVECTION

Convection: Chaleur transportée par le milieu
ici

Transportée par l'écoulement de fluide



$$\delta\dot{Q}(x) = hS (T_p(x) - T_f(x))$$

$$S = \mathcal{P} \times dx$$

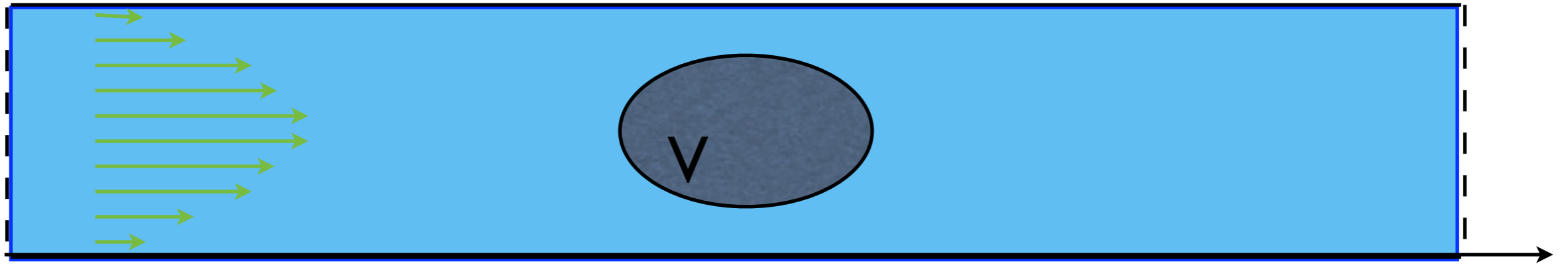
$$\dot{Q} = \int_0^L \delta\dot{Q}(x) = (T_p - T_f) \int_0^L h\mathcal{P} dx$$

On considère toujours les températures comme étant les températures à l'infini

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int \int_S h dS$$

$$\dot{Q} = \bar{h}(T_p - T_f)S$$

Equation de la chaleur

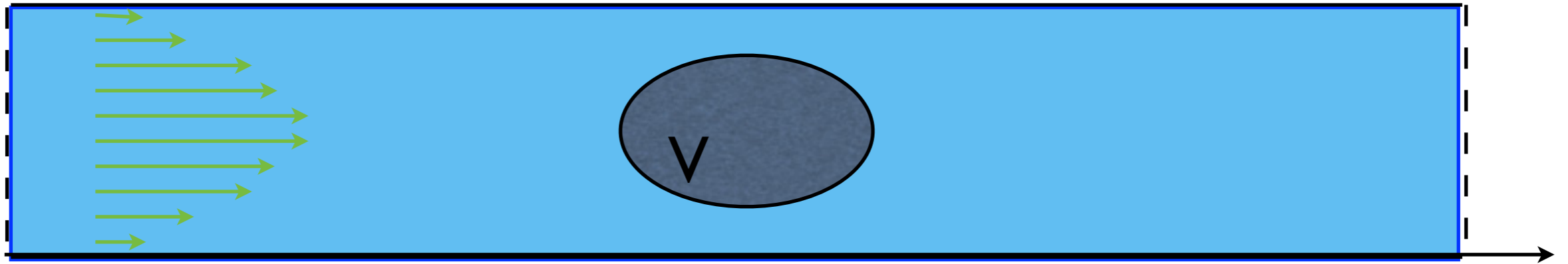


$$\int \int \int_{\mathcal{V}} \rho C \frac{dT}{dt} dv = - \int \int_{S(\mathcal{V})} -\lambda \vec{\nabla} T dS$$

Or $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T$ et Green

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T dv = - \int \int \int_{\mathcal{V}} -\lambda \vec{\nabla}^2 T dv$$

Equation de la chaleur



$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T \right) = \lambda \vec{\nabla}^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{\lambda}{\rho C} \lambda \vec{\nabla}^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T = \kappa \vec{\nabla}^2 T$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho C}$$

Régime permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\right) T = \kappa \vec{\nabla}^2 T \iff u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Donc il nous faut la vitesse \longrightarrow Navier Stokes

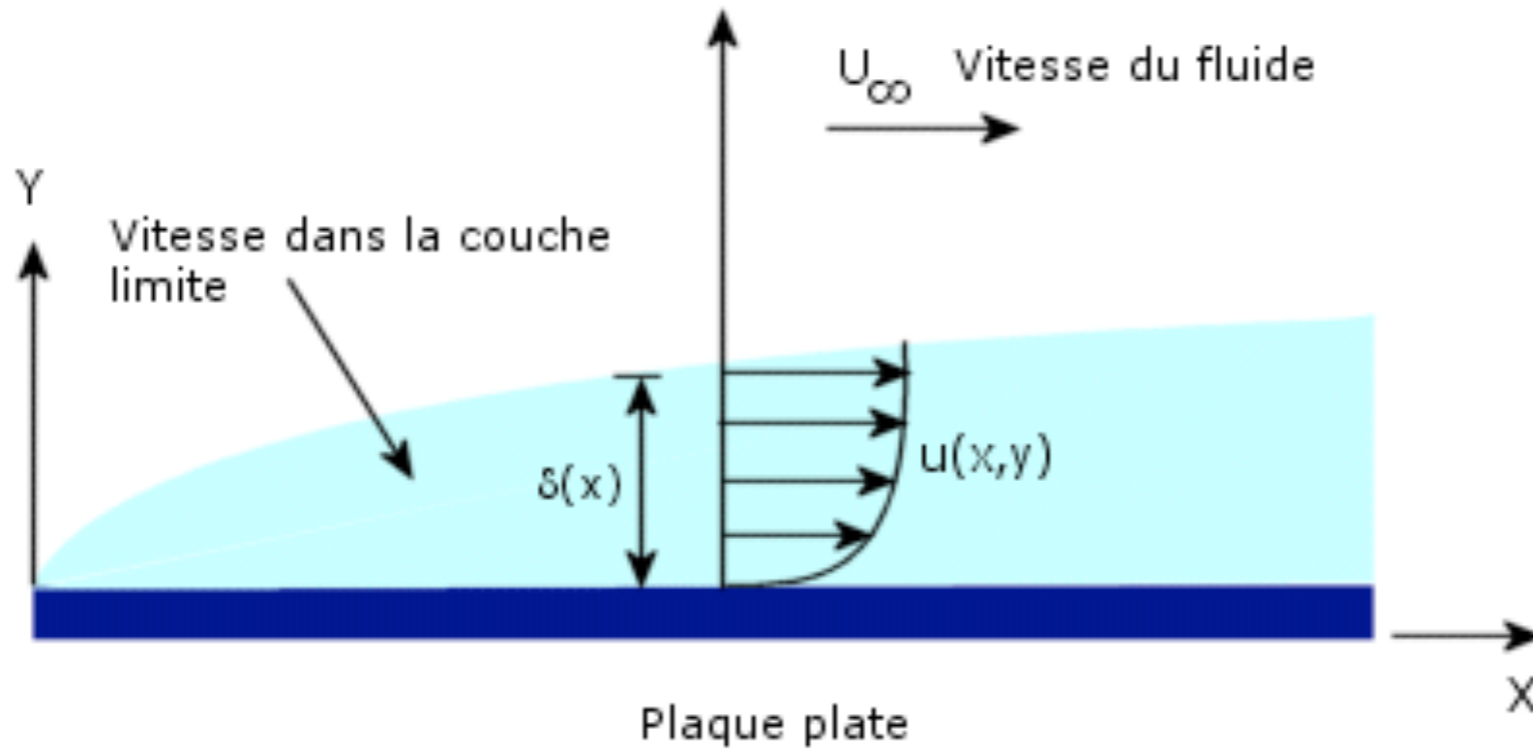
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{viscosité cinématique}$$

Exemple : Écoulement au dessus d'une plaque



$$\frac{U_\infty}{L} = \frac{v}{\delta} \text{ conservation de la masse}$$

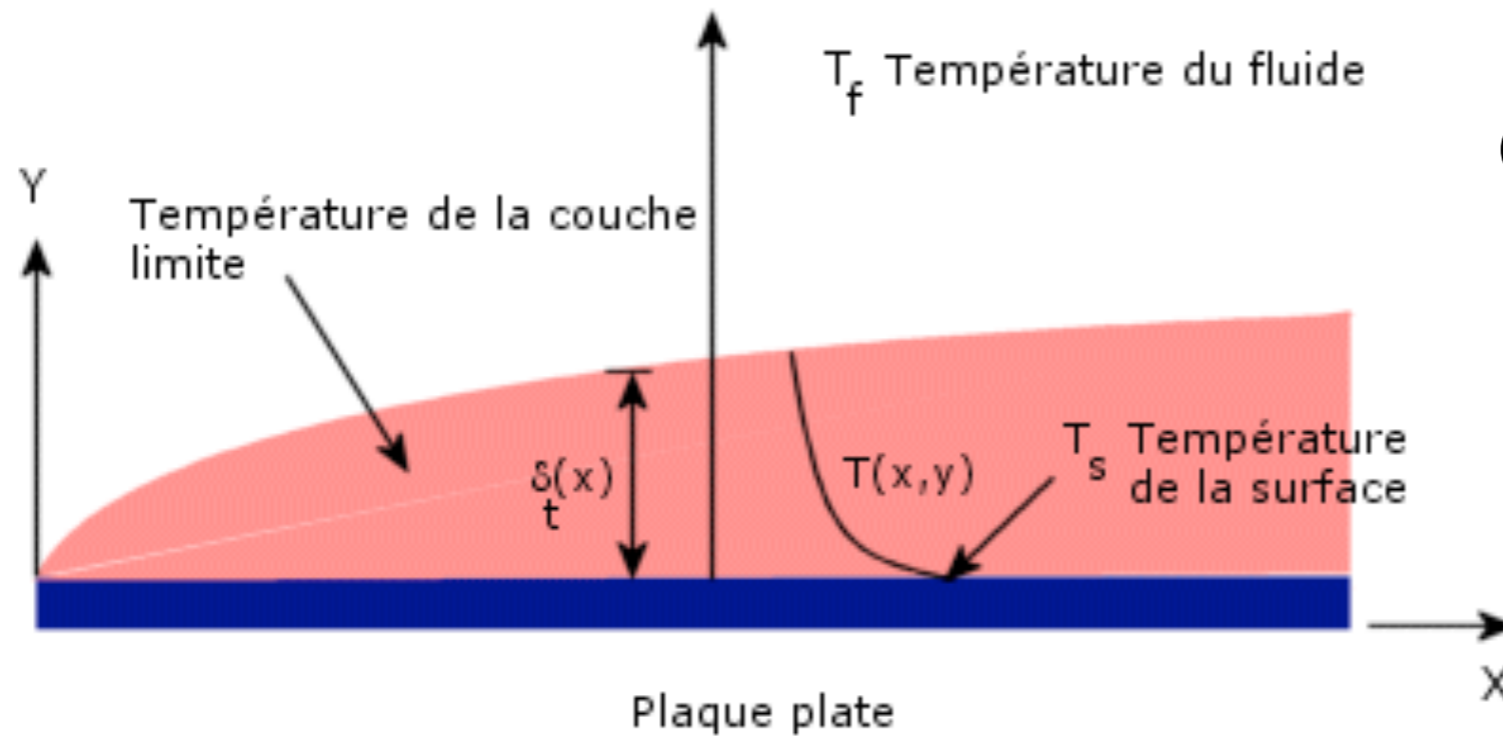
N.S. sur \hat{e}_x devient :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\pi}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \underbrace{\frac{\nu}{U_\infty L}}_{o(1)} \frac{L^2}{\delta^2} \left(\frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$$\Rightarrow \delta^2 = L Re^{-1/2}$$

$$\delta(x) = \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{avec} \quad Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$$

Si on prend en compte la thermique on a le meme phenomène



On appelle δ_T la couche limite thermique

$$T(y = \delta_T) = T_\infty$$

$$T(y = 0) = T_p$$

Echelle de longueur suivant x : L

Echelle de longueur suivant y : δ_T

Echelle de vitesse suivant x : U_∞

Echelle de vitesse suivant y : v_0

$$\frac{U_\infty}{L} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \frac{v_0}{\delta_T} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}} = \frac{\kappa}{\delta_T^2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Or de la couche limite visqueuse on a : $\frac{U_\infty}{L} = \frac{v_0}{\delta} \Rightarrow v_0 = U_\infty \frac{\delta}{L}$

$$\frac{U_\infty}{L} \tilde{u} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \frac{U_\infty}{L} \frac{\delta}{\delta_T} \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}} = \frac{\kappa}{\delta_T^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2}$$

Or $\delta^2 = \frac{L\nu}{U_\infty}$

$$\tilde{u} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \frac{\delta}{\delta_T} \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}} = \frac{\kappa}{\nu} \frac{\delta^2}{\delta_T^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

$$\tilde{u} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \frac{\delta}{\delta_T} \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\delta^2}{\delta_T^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2}$$

$$\tilde{u} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \frac{\delta}{\delta_T} \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\delta^2}{\delta_T^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2}$$

Dans cette équation tout est d'ordre 1, sauf Pr , δ et δ_T

On a donc plusieurs cas “extrêmes”

- $Pr \gg 1 \Rightarrow \delta_T \gg \delta$

- $Pr \ll 1 \Rightarrow \delta_T \ll \delta$

- $Pr \sim 1 \Rightarrow \delta_T \approx \delta$

$Pr \ll 1$, dans la couche limite thermique, la vitesse est constante

$$\vec{u} = u\hat{e}_x \approx U_\infty\hat{e}_x$$

L'équation devient
$$\frac{U_\infty}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

On a alors
$$\delta_T = \sqrt{\frac{\kappa L}{u_\infty}}$$

On peut alors calculer \bar{h}
$$\dot{Q} = -\lambda \frac{dT}{dy} S = \bar{h}(T_p - T_\infty)S$$

$$\bar{h} \sim \frac{\lambda \frac{T_\infty - T_p}{\delta_T}}{T_\infty - T_p} \Rightarrow \bar{h} \sim \frac{\lambda}{\delta_T}$$

$$\bar{h} \approx \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\kappa L}}$$

On fait apparaître le nombre de Nusselt.

Il compare le flux convectif sur le flux conductif

$$Nu_L = \frac{\bar{h}\Delta T}{\lambda \frac{\Delta T}{L}} \qquad \bar{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{\lambda}$$

$$\frac{\delta_T}{L} \sim (Re_L Pr)^{-1/2}$$

$$\bar{Nu}_L \sim (Re_L Pr)^{1/2}$$

Quelques corrélations

Tube lisse circulaire

Corrélations	Conditions
$Nu_D = 4,36$	Laminaire $Re_D < 2300$, $Pr > 0,6$ et \dot{q} uniforme
$Nu_D = 3,66$	Laminaire $Re_D < 2300$, $Pr > 0,6$ et T_s uniforme
$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n$	Turbulent $Re_D > 10000$, $0,6 < Pr < 160$ et $\frac{L}{D} > 10$. $n = 0,4$ pour $T_s > T_m$ et $n = 0,3$ pour $T_s < T_m$

Plaque horizontale et écoulement parralèle

Corrélations	Conditions
	$0,6 < Pr < 50$
$Nu_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$	$Re_L < 3 \times 10^5$ (laminaire)
$Nu_L = 0,036 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$	$5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$ (turbulent)

Méthode pour déterminer un coefficient d'échange

- * Détermination du type de transfert (convection naturelle, forcée, laminaire turbulente)
- * Détermination de la géométrie (plaque cylindre, cone.....)
- * Recherche dans les abaques de la corrélations correspondante en fonction du Prandtl, du Nusselt et du Reynolds
- * Calcul de h : $\bar{h} = \lambda Nu / L$
- * Calcul de Q : $\dot{Q} = \bar{h}(T_s - T_{ref})S$

Formulaire

Conduction

Loi de Fourier : $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T \cdot d\vec{S}$

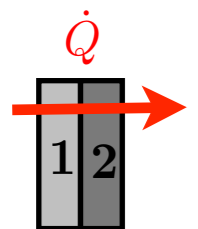
Convection

Loi de Newton : $\vec{q}_p = h (T_P - T_f) \cdot d\vec{S}$

Analogie électrique

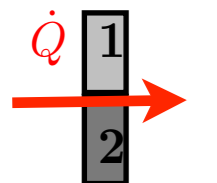
$$R_T = \frac{e}{\lambda S} \quad R_T = \frac{1}{hS}$$

Matériaux en série



$$R_T = R_{T1} + R_{T2}$$

Matériaux en parallèle



$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}}$$

Échange convectif détermination de h

Nombre de Nusselt $\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h} L}{\lambda}$

Quelques corrélations

Nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$

Nombre de Reynolds $Re = \frac{U L}{\nu}$

Plaque horizontale et écoulement parallèle

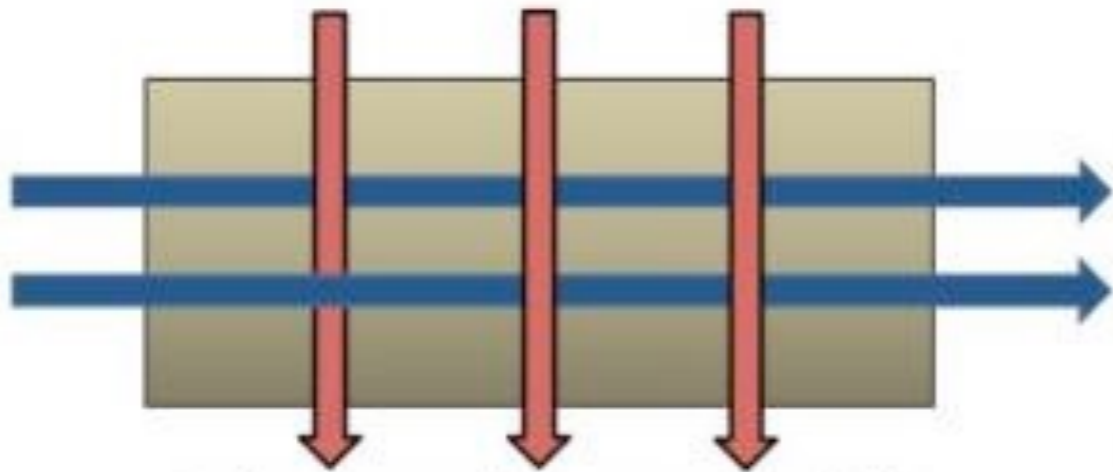
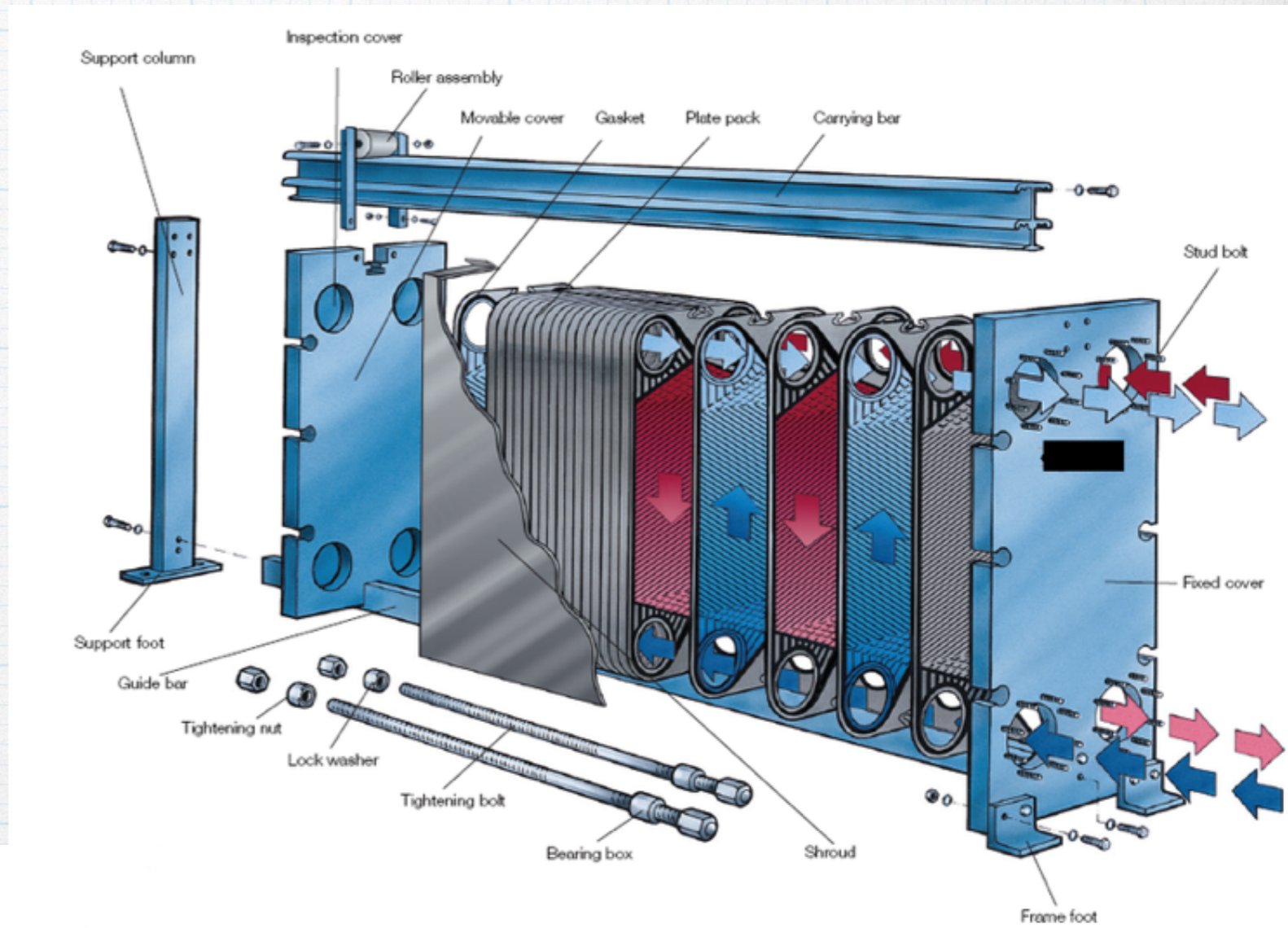
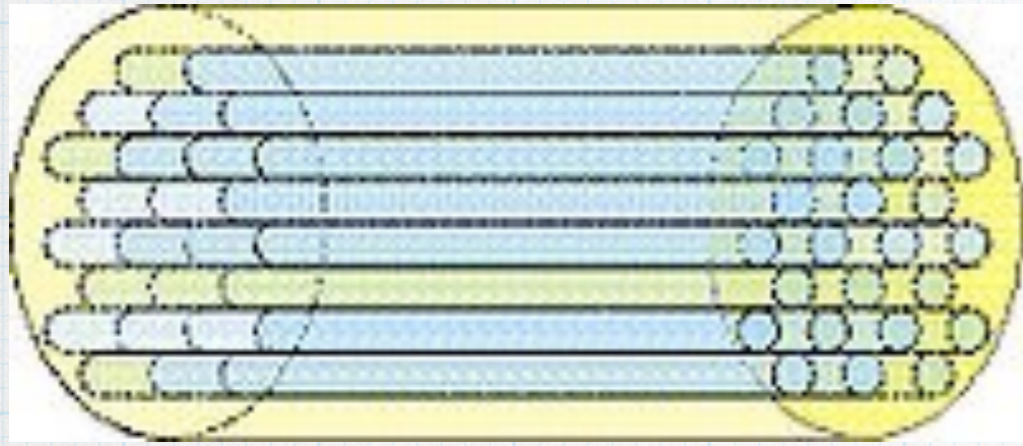
	$0,6 < Pr < 50$
$Nu_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$	$Re_L < 3 \times 10^5$ (laminaire)
$Nu_L = 0,036 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$	$5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$ (turbulent)

Tube lisse circulaire

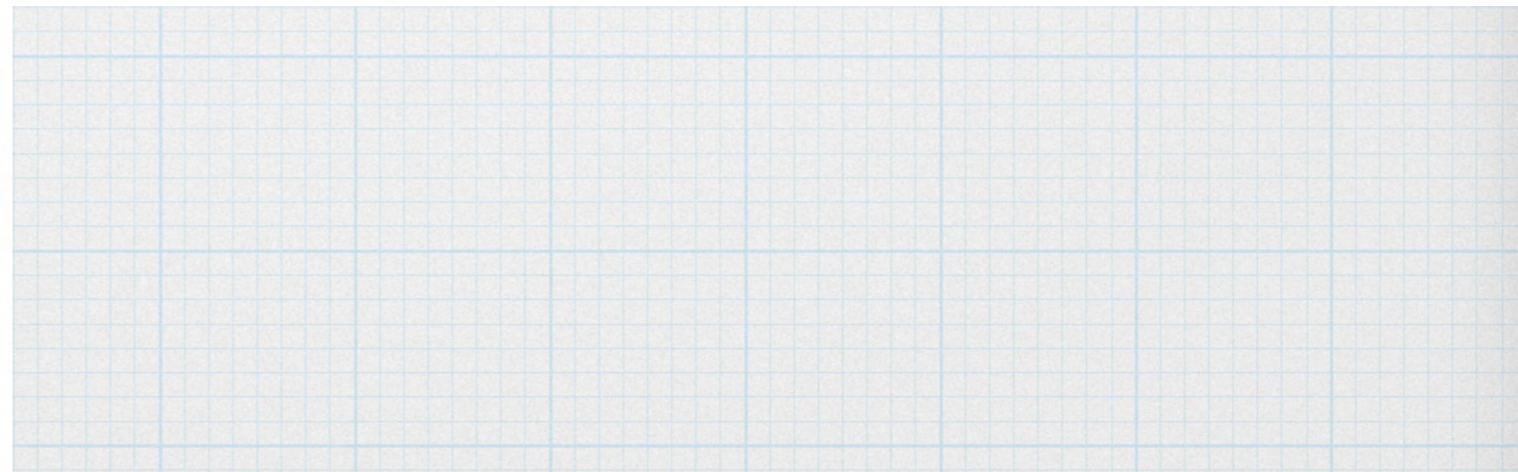
$Nu_D = 4,36$	Laminaire $Re_D < 2300$, $Pr > 0,6$ et \dot{q} uniforme
$Nu_D = 3,66$	Laminaire $Re_D < 2300$, $Pr > 0,6$ et T_s uniforme
$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n$	Turbulent $Re_D > 10000$, $0,6 < Pr < 160$ et $\frac{L}{D} > 10$. $n = 0,4$ pour $T_s > T_m$ et $n = 0,3$ pour $T_s < T_m$

II : Échangeurs Thermiques

- Quelques exemple d'échangeurs
- Quelques rappels d'hydrodynamique et de thermodynamique
- Méthode de l'Ecart à la température logarithmique moyenne (DTLM)
- Méthode du Nombre d'Unité de Transfert (NUT)



Echangeurs à courant croisé



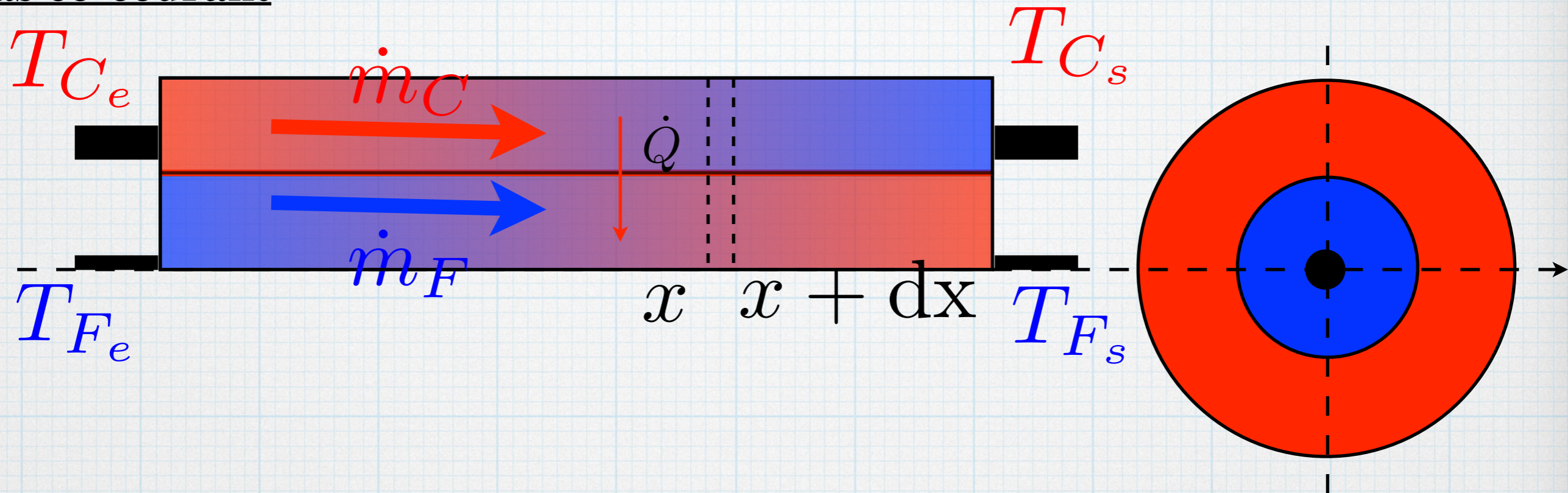
Enthalpie d'un liquide $H = \dot{m}CT$

Débit volumique $\dot{Q}_V = \int \int_S \vec{u} \cdot dS$

Débit massique $\dot{Q}_M = \int \int_S \rho \vec{u} \cdot dS$

Méthode de l'Écart à la température logarithmique moyenne

Cas co-courant



\dot{m}_F : débit **massique** de fluide froid

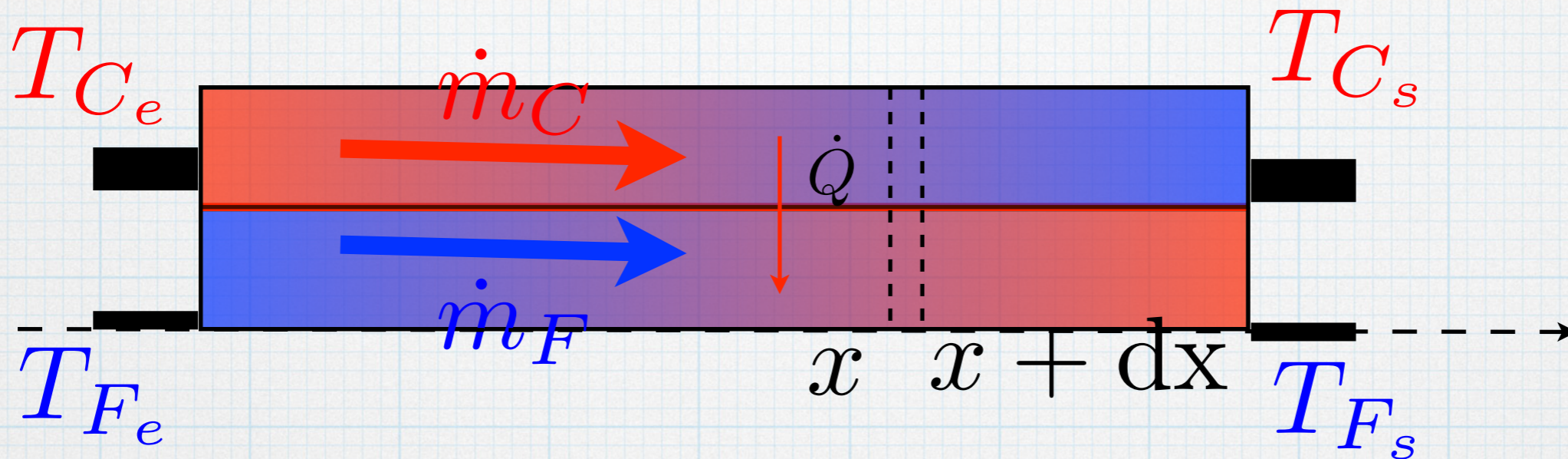
\dot{m}_C : débit **massique** de fluide chaud

C_f : capacité calorifique massique du fluide froid

C_c : capacité calorifique massique du fluide chaud

Bilan Thermique

On note $\dot{Q} = \frac{dE_{Th_{C \rightarrow f}}}{dt} > 0$

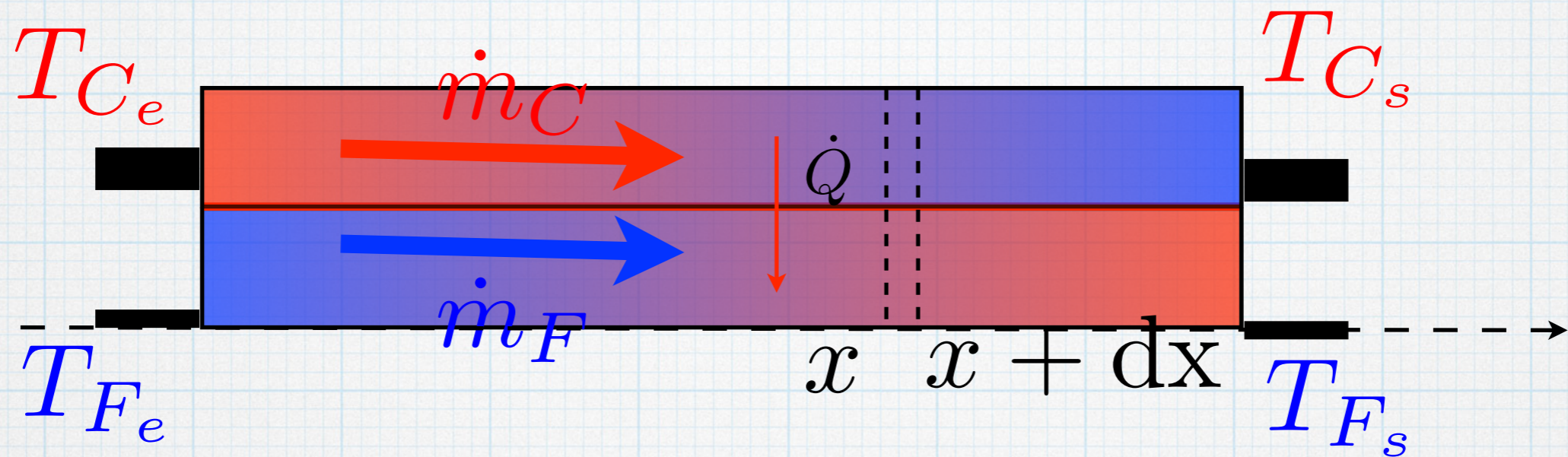


- Pour un élément de longueur dx d'échangeur la loi de Newton donne:

$$d\dot{Q} = h [T_C(x) - T_F(x)] \cdot \overrightarrow{dS}$$

Remarque : Le coefficient d'échange convectif contient tout :

l'échange entre le fluide froid et la paroi, le fluide chaud et la paroi et la conductivité de la paroi



- Pour le fluide chaud la conservation de l'énergie nous donne:

$$d\dot{Q} = \dot{m}_c C_c [T_c(x) - T_c(x + dx)]$$

$$\begin{aligned} d\dot{Q} &= -\dot{m}_c C_c [T_c(x + dx) - T_c(x)] \\ &= -\dot{m}_c C_c dT_c(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dT_c = -d\dot{Q} \frac{1}{\dot{m}_c C_c}$$

- Pour le fluide froid la conservation de l'énergie nous donne:

$$\begin{aligned}d\dot{Q} &= \dot{m}_f C_f [T_f(x + dx) - T_f(x)] \\ &= \dot{m}_f C_f dT_f(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow dT_f = d\dot{Q} \frac{1}{\dot{m}_f C_f}$$

$$dT_c(x) = -d\dot{Q} \frac{1}{\dot{m}_c C_c}$$

$$-dT_f(x) = d\dot{Q} \frac{1}{\dot{m}_f C_f}$$

$$d[T_c(x) - T_f(x)] = -d\dot{Q} \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_c} + \frac{1}{\dot{m}_f C_f} \right)$$

$$\text{Or } d\dot{Q} = h [T_c(x) - T_f(x)] \times dS$$

$$\text{d'où } d\dot{Q} = \frac{d[T_c(x) - T_f(x)]}{T_c(x) - T_f(x)} = -h \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_c} + \frac{1}{\dot{m}_f C_f} \right) \times dS$$

$$\text{On pose } \theta(x) = T_c(x) - T_f(x)$$

$$M = \frac{1}{\dot{m}_c C_c} + \frac{1}{\dot{m}_f C_f}$$

$$dS = \mathcal{P} dx$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -hM\mathcal{P} dx$$

$$\frac{d\theta}{\theta} = -hM\mathcal{P}dx$$

$$\Rightarrow \ln(\theta(x)) = -hM\mathcal{P}x \Rightarrow \theta(x) = \theta_0 \exp\{-hM\mathcal{P}x\}$$

$$(T_c(x) - T_f(x)) = (T_{c_e} - T_{f_e}) \exp\{-hM\mathcal{P}x\}$$

Et donc $(T_{c_s} - T_{f_s}) = (T_{c_e} - T_{f_e}) \exp\{-hM\underbrace{\mathcal{P}L}_S\}$

Flux total échangé

$$d\dot{Q} = h(T_c(x) - T_f(x)) = h(T_{c_e} - T_{f_e}) \exp\{-hM\mathcal{P}x\}$$

$$\dot{Q} = \int_0^L h(T_{c_e} - T_{f_e}) \exp\{-hM\mathcal{P}x\} dx$$

Conclusion : La méthode **DTLM** est utilisable lorsqu'on connaît les températures d'entrée et de sortie de fluides.

$$\dot{Q} = \int_0^L h (T_{c_e} - T_{f_e}) \exp \{-hM\mathcal{P}x\} dx$$

$$\dot{Q} = \left[-\frac{1}{M} (T_{c_e} - T_{f_e}) \exp \{-hM\mathcal{P}x\} \right]_0^L$$

$$\dot{Q} = -\frac{1}{M} [(T_{c_e} - T_{f_e}) \exp \{-hM\mathcal{P}L\} - (T_{c_e} - T_{f_e})]$$

$$\text{Or } -hM\mathcal{P}L = \ln \left(\frac{T_{c_s} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}} \right) \Rightarrow M = -\ln \left(\frac{T_{c_s} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}} \right) \times \frac{1}{h\mathcal{P}L}$$

$$\text{d'où } \exp \{-hM\mathcal{P}L\} = \frac{T_{c_s} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}}$$

$$\dot{Q} = h\mathcal{P}L \frac{(T_{c_s} - T_{f_s}) - (T_{c_e} - T_{f_e})}{\ln \left(\frac{T_{c_s} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}} \right)}$$

$$\dot{Q} = h\mathcal{P}L \frac{(T_{c_s} - T_{f_s}) - (T_{c_e} - T_{f_e})}{\ln \left(\frac{T_{c_s} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}} \right)}$$

On pose: $\Delta T_{LM} = \frac{(T_{c_s} - T_{f_s}) - (T_{c_e} - T_{f_e})}{\ln (T_{c_s} - T_{f_s}) - \ln (T_{c_e} - T_{f_e})}$

$$\dot{Q} = hS \underbrace{\Delta T_{LM}}$$

Écart à la température logarithmique moyenne

Profils de Température

Rappel :

$$d\dot{Q} = h (T_c(x) - T_f(x)) = h (T_{c_e} - T_{f_e}) \exp \{-hM\mathcal{P}x\}$$

$$\text{avec } M = \frac{1}{\dot{m}_c C_c} + \frac{1}{\dot{m}_f C_f}$$

Maintenant que l'on connaît $d\dot{Q}$ en fonction des températures d'entrée et de sortie on peut calculer les profils de température dans chaque tubes

$$dT_c = -d\dot{Q} \frac{1}{\dot{m}_c C_c}$$

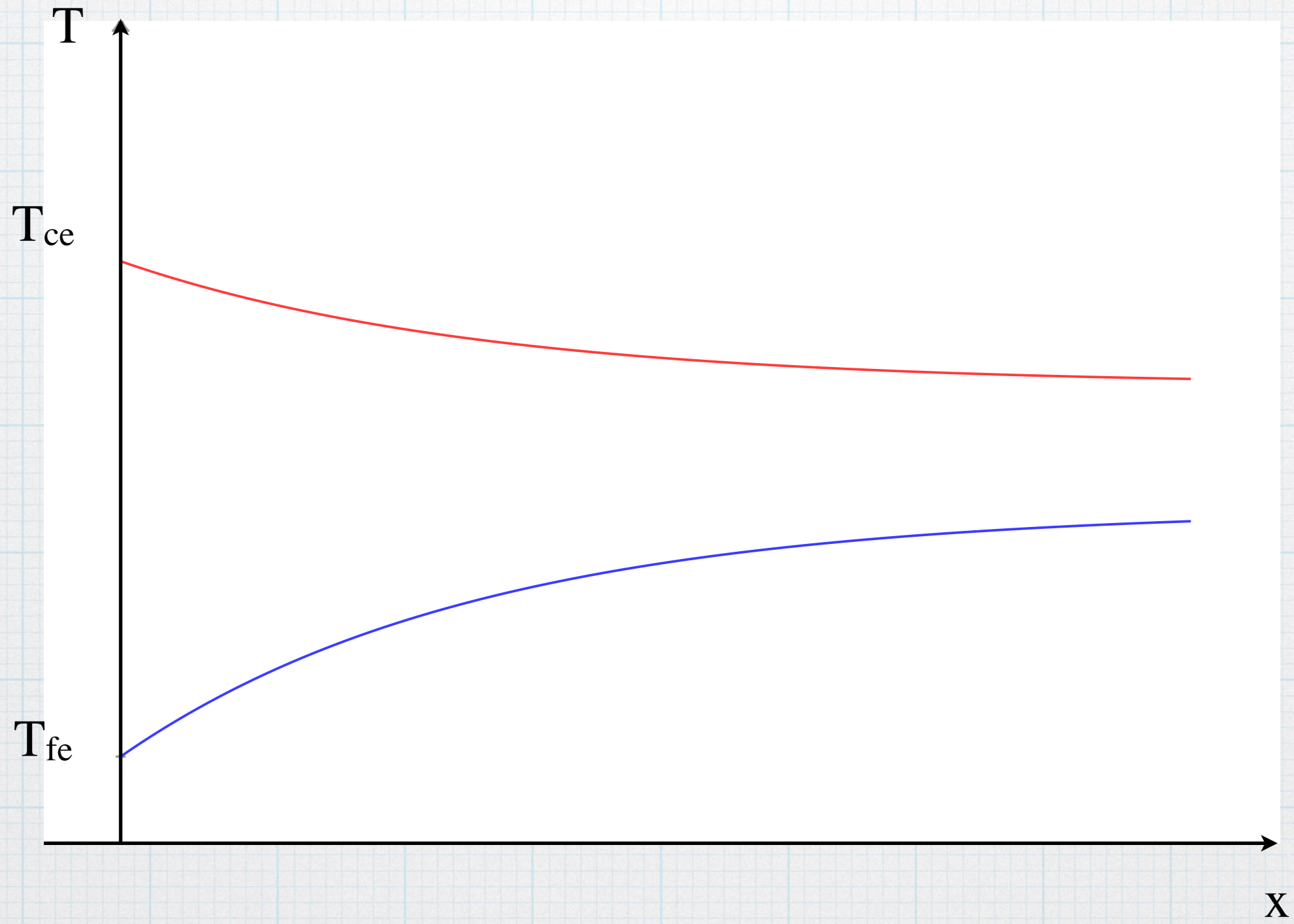
$$dT_c = -\frac{h}{\dot{m}_c C_c} (T_{c_e} - T_{f_e}) \exp \{-hM\mathcal{P}x\} \times \mathcal{P} dx$$

$$T_c(x) = T_{c_e} + \frac{1}{\dot{m}_c C_c M} (T_{c_e} - T_{f_e}) [\exp \{-hM\mathcal{P}x\} - 1]$$

De la même manière on obtient

$$T_f(x) = T_{f_e} - \frac{1}{\dot{m}_f C_f M} (T_{c_e} - T_{f_e}) [\exp \{-hM\mathcal{P}x\} - 1]$$

Profil de température dans un échangeur



Cas contre-courant

En faisant le même type de raisonnement on obtient:

$$T_c(x) = T_{c_e} - \frac{1}{\dot{m}_c C_c M} (T_{c_e} - T_{f_s}) [\exp \{-hM\mathcal{P}x\} - 1]$$

$$T_f(x) = T_{f_s} - \frac{1}{\dot{m}_f C_f M} (T_{c_e} - T_{f_s}) [\exp \{-hM\mathcal{P}x\} - 1]$$

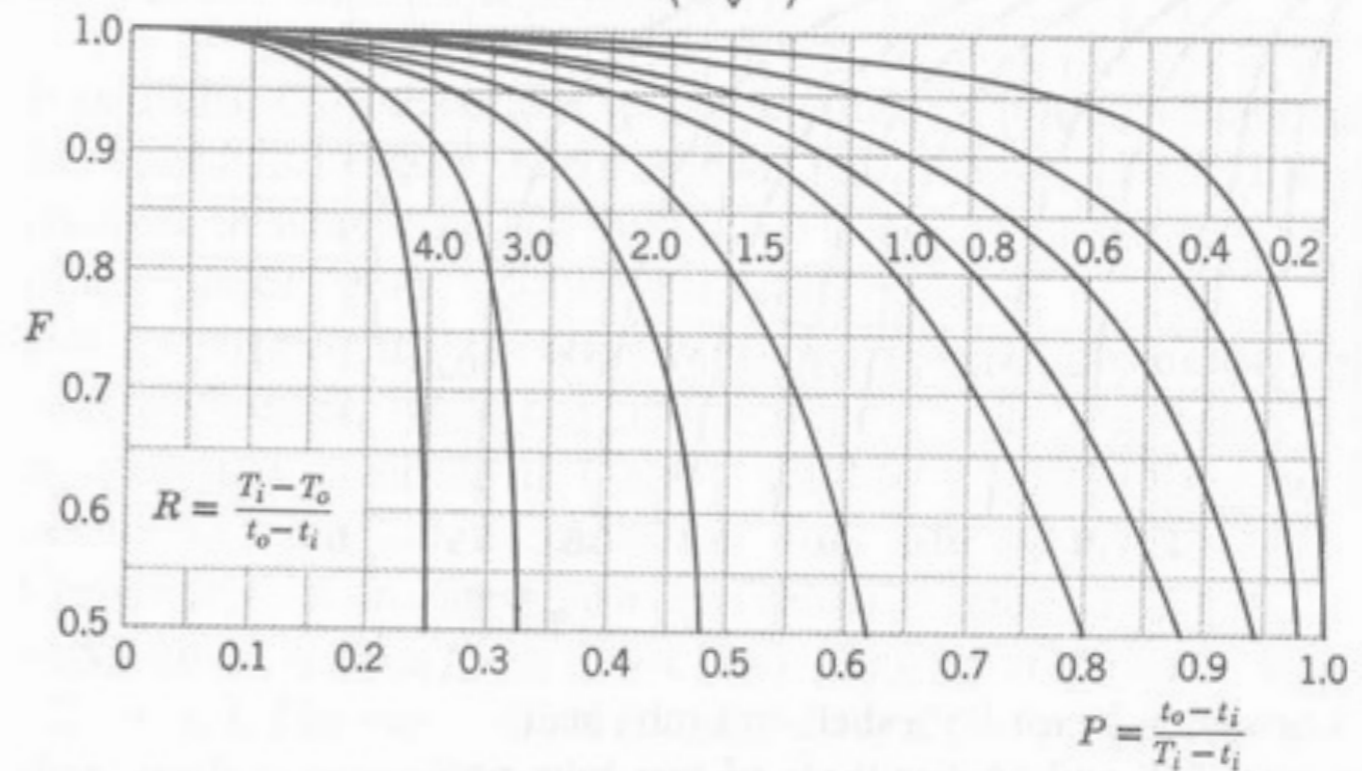
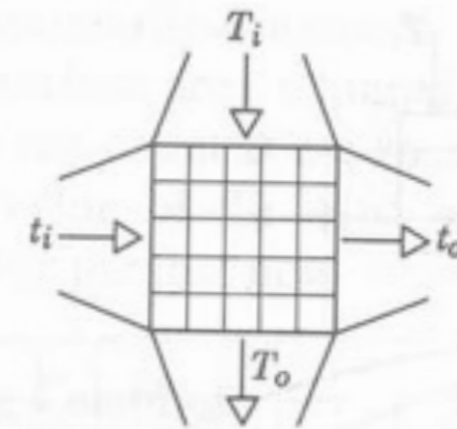
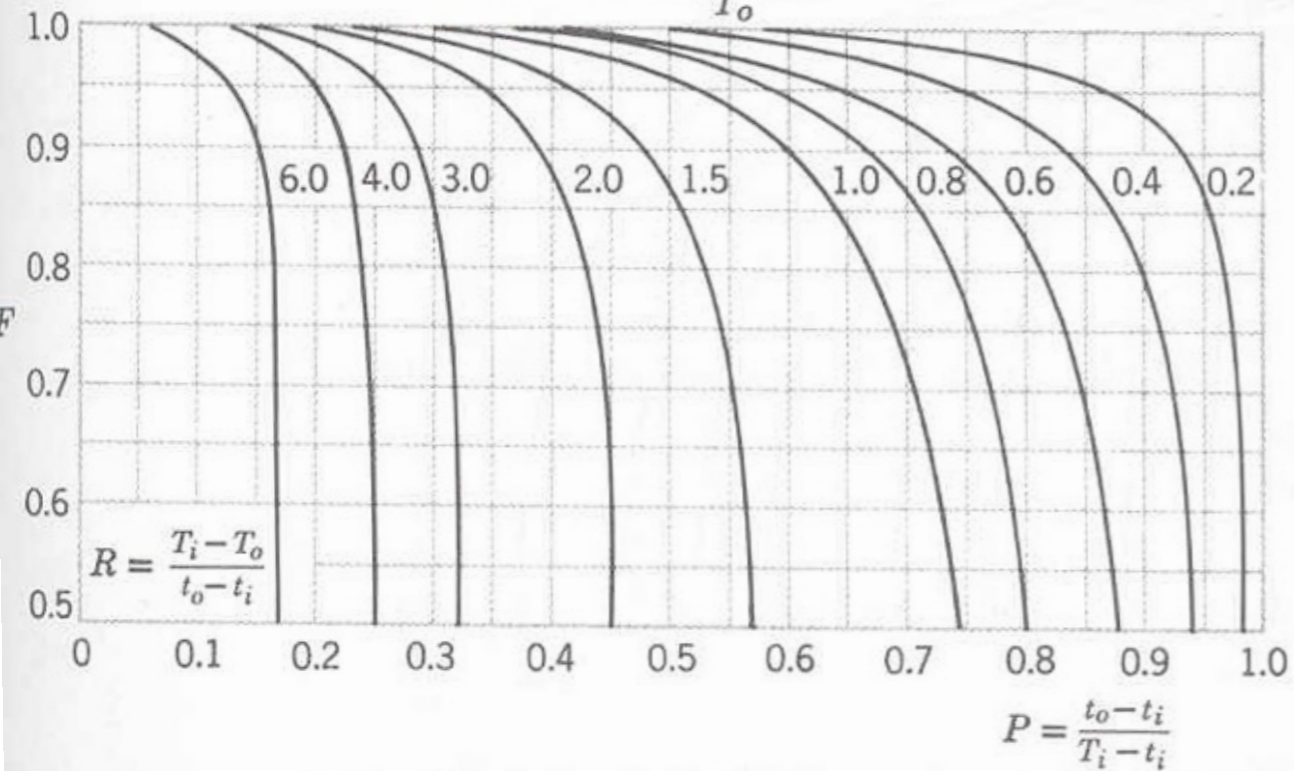
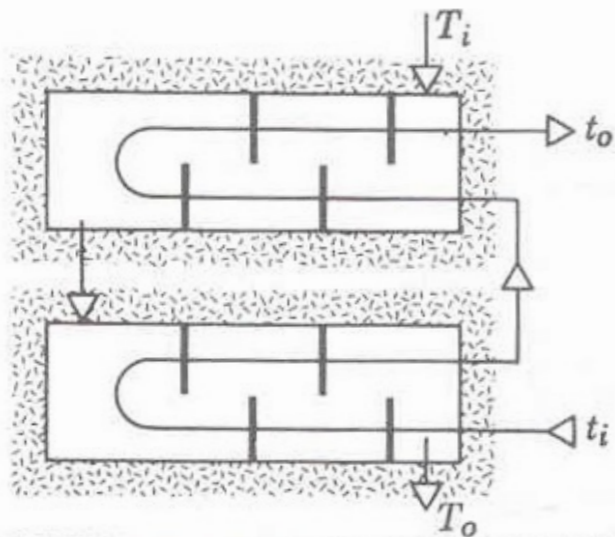
$\dot{Q} = hS\Delta T_{LM}$ même résultat qu'en co-courant mais avec :

$$\Delta T_{LM, cc} = \frac{(T_{c_s} - T_{f_e}) - (T_{c_e} - T_{f_s})}{\ln(T_{c_s} - T_{f_e}) - \ln(T_{c_e} - T_{f_s})}$$

Conclusion : La méthode **DTLM** est utilisable lorsqu'on connaît les températures d'entrée et de sortie de fluides.

Pour d'autre géométrie d'échangeur on aura une "version" adaptée:

$$\dot{Q} = hS F \Delta T_{LM, cc}$$



Méthode du N.U.T.

Nombre d'Unité de Transfert

Pour déterminer l'efficacité d'un échangeur thermique, il est nécessaire de déterminer le flux de chaleur maximal qu'il pourrait échanger.

Échangeurs contre-courant:

L'efficacité d'un échangeur est : $\eta = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_{\max}}$ $\eta < 1$

$\left. \begin{array}{l} T_{c_e} \\ T_{f_e} \end{array} \right\}$ Connus

$$\dot{q}_{\max} = \min(\dot{m}_c C_c, \dot{m}_f C_f) (T_{c_e} - T_{f_e})$$

$$\dot{q} = \dot{m}_c C_c (T_{c_e} - T_{c_s}) = -\dot{m}_f C_f (T_{f_e} - T_{f_s})$$

$$\eta = \frac{\dot{m}_c C_c (T_{c_e} - T_{c_s})}{\dot{m} C_{\min} (T_{c_e} - T_{f_e})}$$

$$\dot{m} C_{\min} = \min(\dot{m}_c C_c, \dot{m}_f C_f)$$

Méthode du N.U.T.

Nombre d'Unité de Transfert

Pour déterminer l'efficacité d'un échangeur thermique, il est nécessaire de déterminer le flux de chaleur maximal qu'il pourrait échanger.

Échangeurs contre-courant:

L'efficacité d'un échangeur est : $\eta = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_{\max}}$ $\eta < 1$

$\left. \begin{array}{l} T_{c_e} \\ T_{f_e} \end{array} \right\}$ Connus

$$\dot{q}_{\max} = \min(\dot{m}_c C_c, \dot{m}_f C_f) (T_{c_e} - T_{f_e})$$

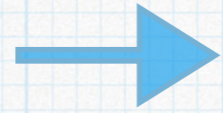
$$\dot{q} = \dot{m}_c C_c (T_{c_e} - T_{c_s}) = -\dot{m}_f C_f (T_{f_e} - T_{f_s})$$

$$\eta = \frac{\dot{m}_f C_f (T_{f_e} - T_{f_s})}{\dot{m} C_{\min} (T_{c_e} - T_{f_e})}$$

$$\dot{m} C_{\min} = \min(\dot{m}_c C_c, \dot{m}_f C_f)$$

$$\dot{q} = \eta \dot{q}_{\max}$$

$$\dot{q} = \eta \dot{m} C_{\min} (T_{c_e} - T_{c_s})$$



Si on détermine η alors on connaît \dot{q}

Pour tout échangeur on définit **Le Nombre d'Unité de Transfert (NUT)**

$$NUT = \frac{h S}{\dot{m} C_{\min}} \quad h \text{ coefficient d'échange global généralisé}$$

on peut alors montrer qu'il existe f telle que $\eta = f \left(NUT, \frac{\dot{m} C_{\min}}{\dot{m} C_{\max}} \right)$

La fonction f dépend du type d'échangeur et on a à nouveau des relations empiriques (abaques)

Pour certains échangeurs le calcul peut se mener jusqu'au bout comme on va le voir pour l'échangeur à courants parallèles

On considère un échangeur à courants parallèles pour lequel $\dot{m}C_{\min} = \dot{m}_c C_c$

On repart de
$$\eta = \frac{\dot{m}_c C_c (T_{c_e} - T_{c_s})}{\dot{m}C_{\min} (T_{c_e} - T_{f_e})} \Rightarrow \eta = \frac{T_{c_e} - T_{c_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}}$$

Or
$$\dot{q} = \dot{m}_c C_c (T_{c_e} - T_{c_s}) = -\dot{m}_f C_f (T_{f_e} - T_{f_s})$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{m}C_{\min}}{\dot{m}C_{\max}} = \frac{\dot{m}_c C_c}{\dot{m}_f C_f} = -\frac{T_{f_e} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{c_s}}$$

On a vu lors de la mise en place de la méthode DTLM que :

$$d [T_c(x) - T_f(x)] = -d\dot{Q} \left(\frac{1}{\dot{m}_c C_c} + \frac{1}{\dot{m}_f C_f} \right)$$
$$d\dot{Q} = h [T_C(x) - T_F(x)] \cdot d\vec{S}$$

Soit
$$\ln \left(\frac{T_{c_s} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}} \right) = -\frac{hS}{\dot{m}C_{\min}} \left(1 + \frac{\dot{m}C_{\min}}{\dot{m}C_{\max}} \right)$$

Comme $NUT = \frac{hS}{\dot{m}C_{\min}}$ $\frac{T_{c_s} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}} = \exp \left[-NUT \left(1 + \frac{\dot{m}C_{\min}}{\dot{m}C_{\max}} \right) \right]$

On réécrit $\frac{T_{c_s} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}} = \frac{T_{c_s} - T_{c_e} + T_{c_e} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}}$

On avait $\frac{\dot{m}C_{\min}}{\dot{m}C_{\max}} = \frac{\dot{m}_c C_c}{\dot{m}_f C_f} = -\frac{T_{f_e} - T_{f_s}}{T_{c_e} - T_{c_s}} \rightarrow T_{f_s}$

$$\eta = \frac{T_{c_e} - T_{c_s}}{T_{c_e} - T_{f_e}}$$

Après un peu de calcul on arrive à :

$$\eta = \frac{1 - \exp \{ -NTU [1 + (\dot{m}C_{\min}/\dot{m}C_{\max})] \}}{1 + (\dot{m}C_{\min}/\dot{m}C_{\max})}$$

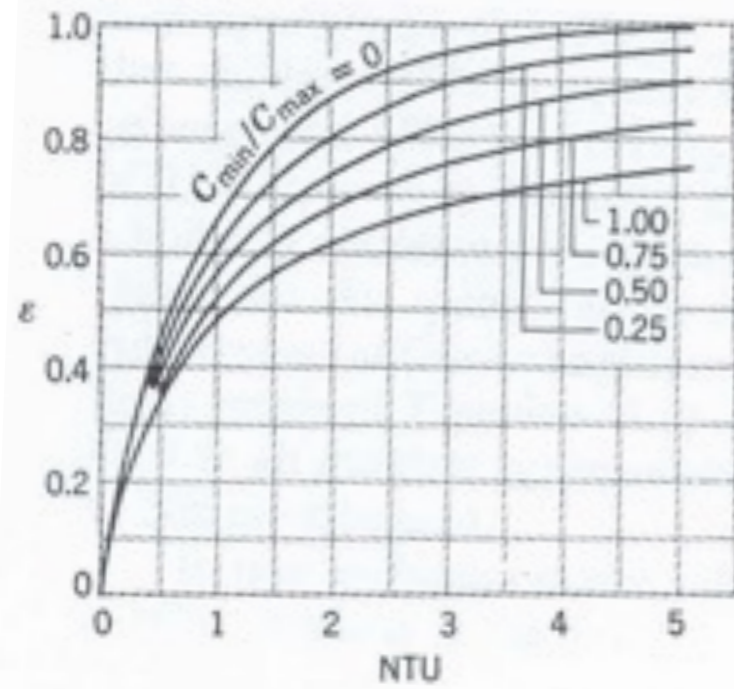


Figure 11.18 Effectiveness of a single-pass, cross-flow heat exchanger with both fluids unmixed (Equation 11.33).

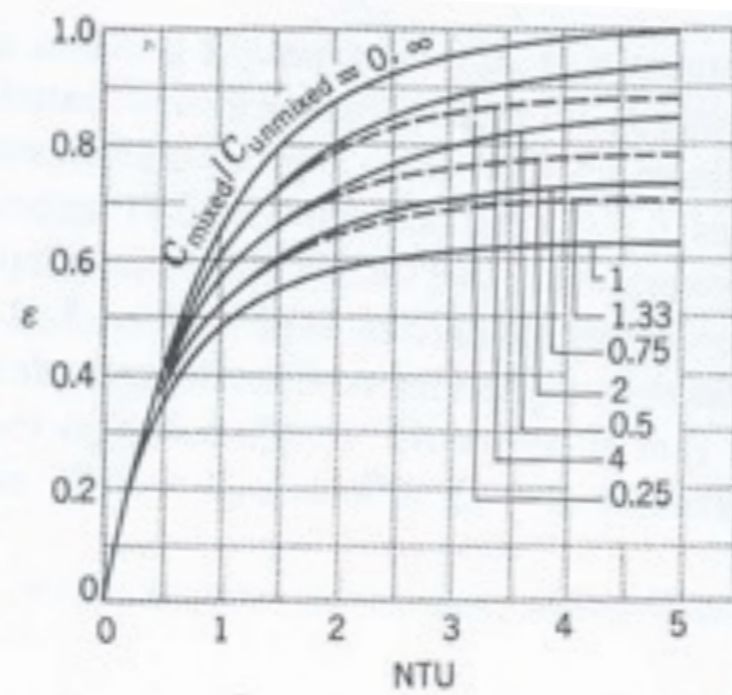


Figure 11.19 Effectiveness of a single-pass, cross-flow heat exchanger with one fluid mixed and the other unmixed (Equations 11.34, 11.35).

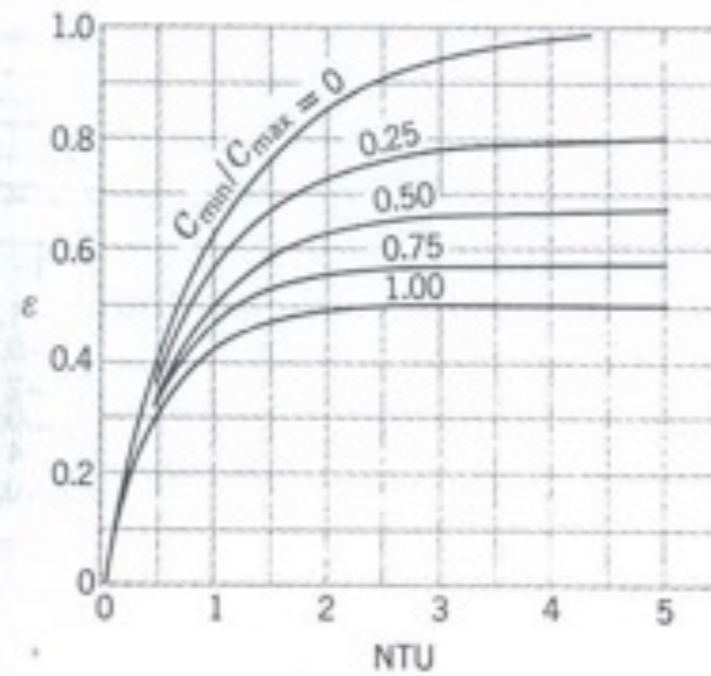


Figure 11.14 Effectiveness of a parallel-flow heat exchanger (Equation 11.29).

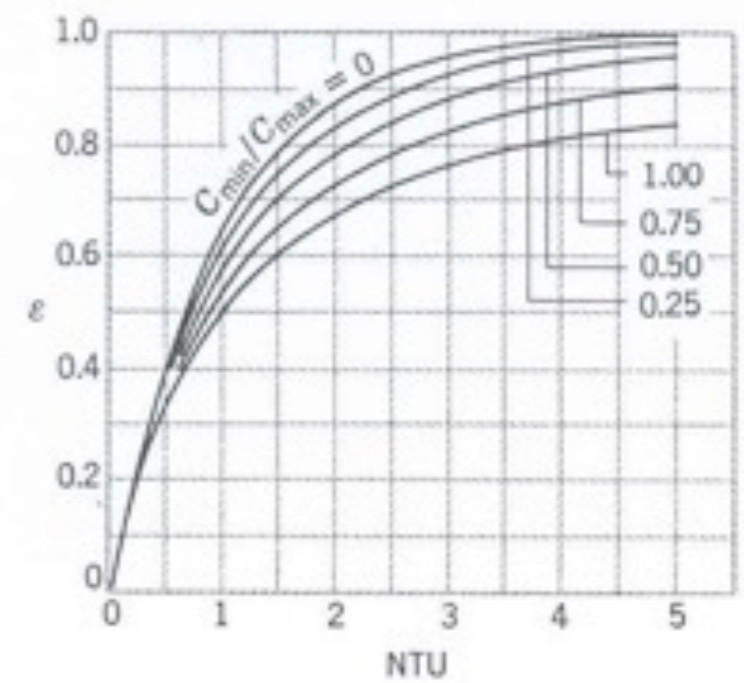


Figure 11.15 Effectiveness of a counterflow heat exchanger (Equation 11.30).

FLOW ARRANGEMENT RELATION

Concentric tube

Parallel flow $\epsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 + C_r)]}{1 + C_r}$

Counterflow $\epsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[-NTU(1 - C_r)]}$

Shell and tube

One shell pass
(2, 4, ... tube passes) $\epsilon_1 = 2 \left\{ 1 + C_r + (1 + C_r^2)^{1/2} \times \frac{1 + \exp[-NTU(1 + C_r^2)^{1/2}]}{1 - \exp[-NTU(1 + C_r^2)^{1/2}]} \right\}^{-1}$

n Shell passes
(2n, 4n, ... tube passes) $\epsilon = \left[\left(\frac{1 - \epsilon_1 C_r}{1 - \epsilon_1} \right)^n - 1 \right] \left[\left(\frac{1 - \epsilon_1 C_r}{1 - \epsilon_1} \right)^n - C_r \right]^{-1}$

Cross flow (single pass)

Both fluids unmixed $\epsilon = 1 - \exp \left[\left(\frac{1}{C_r} \right) (NTU)^{0.22} \{ \exp[-C_r (NTU)^{0.78}] - 1 \} \right]$

C_{\max} (mixed),
 C_{\min} (unmixed) $\epsilon = \left(\frac{1}{C_r} \right) (1 - \exp \{ -C_r [1 - \exp(-NTU)] \})$

C_{\min} (mixed),
 C_{\max} (unmixed) $\epsilon = 1 - \exp(-C_r^{-1} \{ 1 - \exp[-C_r (NTU)] \})$

All exchangers ($C_r = 0$) $\epsilon = 1 - \exp(-NTU)$

FLOW ARRANGEMENT

RELATION

Concentric tube

Parallel flow

$$NTU = -\frac{\ln[1 - \epsilon(1 + C_r)]}{1 + C_r}$$

Counterflow

$$NTU = -\frac{1}{C_r - 1} \ln\left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon C_r - 1}\right)$$

Shell and tube

One shell pass

$$NTU = -(1 + C_r^2)^{-1/2} \ln\left(\frac{E - 1}{E + 1}\right)$$

(2, 4, ... tube passes)

$$E = \frac{2/\epsilon_1 - (1 + C_r)}{(1 + C_r^2)^{1/2}}$$

 n Shell passes

Utiliser l'équation pour 1 passage avec l'expression suivante

(2n, 4n, ... tube passes)

$$\epsilon_1 = \frac{F - 1}{F - C_r}, F = \left(\frac{\epsilon C_r - 1}{\epsilon - 1}\right)^{1/n}$$

Cross flow (single pass)

 C_{\max} (mixed), C_{\min} (unmixed)

$$NTU = -\ln\left[1 + \left(\frac{1}{C_r}\right) \ln(1 - \epsilon C_r)\right]$$

 C_{\min} (mixed), C_{\max} (unmixed)

$$NTU = -\left(\frac{1}{C_r}\right) \ln[C_r \ln(1 - \epsilon) + 1]$$

All exchangers ($C_r = 0$)

$$NTU = -\ln(1 - \epsilon)$$

Échange de Chaleur avec
Changement de Phase

I Phénomènes mis en jeux

De quoi peut dépendre le coefficient d'échange h ?

- Différence de température $\Delta T [^{\circ}\text{K}]$
- Force de flotabilité $g (\rho_l - \rho_v) [\text{N m}^{-3}]$
- Chaleur Latente $h_{lv} [\text{J}]$
- Tension de surface $\gamma [\text{N m}^{-1}]$
- 1 longueur caractéristique $L [\text{J kg}^{-1}]$
- Propriétés physique des fluides ρ, λ, C_p, μ


On a 10 variables et 5 dimensions on peut donc fabriquer une relation entre 5 paramètres sans dimension (Théorème de Buckingham)

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} = f \left(\frac{\rho g (\rho_l - \rho_v) L^3}{\mu^2}, \underbrace{\frac{C_p \Delta T}{h_{lv}}}_{\text{Ja}}, \underbrace{\frac{\mu C_p}{\lambda}}_{\text{Pr}}, \underbrace{\frac{g (\rho_l - \rho_v) L^2}{\gamma}}_{\text{Bo}} \right)$$

II Évaporation

II-1 Les différents modes d'ébullition

Il y a ébullition si la pression est inférieure à la pression de vapeur saturante

Pour l'eau on a : $P_s = \left(\frac{T}{100}\right)^4$  $T^\circ\text{C}$

La température correspondant à P_s est la température de saturation T_{sat}

On a alors $\frac{Q}{S} = q_s = h (T_{\text{surface}} - T_{\text{sat}}) = h \underbrace{\Delta T_e}_{\text{Température d'excès}}$

La dynamique des bulles influence le transfert de chaleur

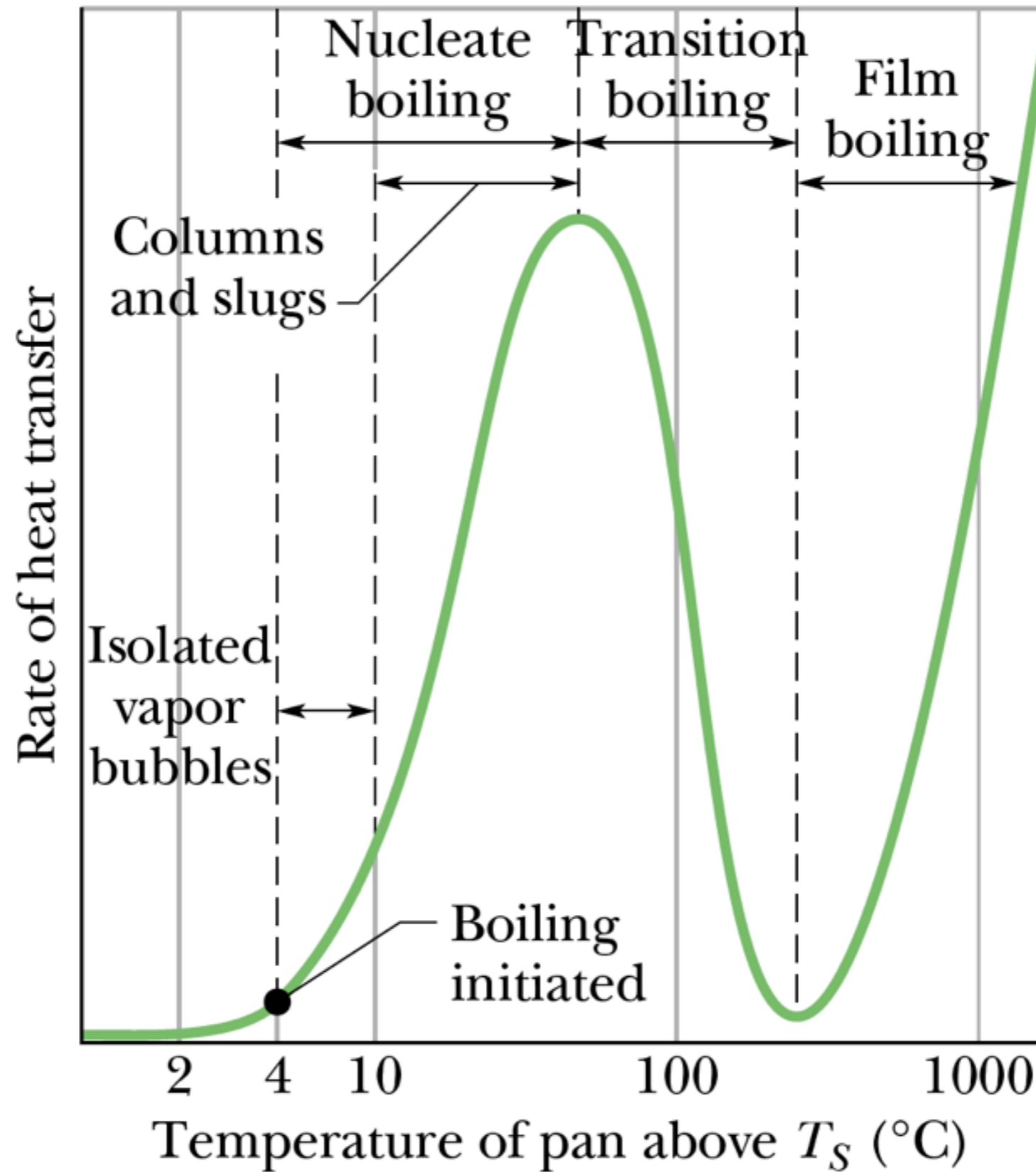
Différents modes d'ébullition

- **Ébullition de piscine** : Le liquide est “initialement” au repos et le mouvement est dû à l'entraînement des bulles
- **Ébullition en convection forcée** : Le liquide est mis en mouvement sur une surface à une température différente.

2 types d'ébullition

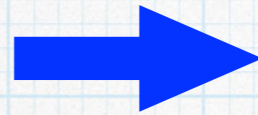
- **Ébullition sous refroidie** : les bulles générées à la surface sont dissoutes dans le liquide.
- **Ébullition saturée** : les bulles formées à la surface montent dans le liquide à cause de la flottabilité.

Courbe de Transfert



Corrélation en ébullition "libre"

Multiplicité de modes



Multiplicité de lois

Yomagata *et al.* : $\dot{q} = C \Delta T_e^a n^b$ avec $a = 1/2$ et $b = 1/3$

Nb de sites de nucléation de bulles : n dépend aussi de la température

$$n \propto \Delta T_e^5 \text{ ou } \Delta T_e^6$$

Rohsenow (1952)
$$\dot{q} = \mu_l h_{lg} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\gamma} \right]^{1/2} \left[\frac{C_{Pl} \Delta T_e}{\underbrace{C_s}_{\text{Coefficient de surface}} h_{lv} Pr_l^\alpha} \right]^3$$

Coefficient de surface

eau - cuivre rugueux	$C_s = 0,013$	$n = 1$
poli	$C_s = 0,0068$	$n = 1$
eau - inox	$C_s = 0,013$	$n = 1$
eau - nickel	$C_s = 0,006$	$n = 1$
Benzene - chrome	$C_s = 0,1$	$n = 1,7$

Flux critique en ébullition de piscine

• **q_{max}** : Point auquel l'échange est le plus efficace

Zuber : Analyse dimensionnelle $\dot{q}_{max} = \frac{\pi}{24} h_{lv} \rho_v \left[\frac{\gamma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\rho_l + \rho_v}{\rho_l} \right)^{\frac{1}{2}}$

Expérimentalement on a un facteur de 0,149 $\left(\frac{\pi}{24} = 0,131 \right)$

Généralement $\frac{\rho_v}{\rho_l} \ll 1 \Rightarrow \left(\frac{\rho_l + \rho_v}{\rho_l} \right)^{1/2} = \sqrt{1 + \epsilon} \approx 1$

$$\dot{q}_{max} = 0,149 h_{lv} \rho_v \left[\frac{\gamma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4}$$

• **q_{min}** : Flux minimal pour obtenir un film de vapeur stable

$$\dot{q}_{min} = 0,09 \rho_v h_{lv} \left[\frac{g \gamma (\rho_l - \rho_v)}{(\rho_l + \rho_v)^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Remarque 1 : Aucune longueur caractéristique n'apparaît car on suppose que les bulles se forment librement

$$P_{\text{Laplace}} = \frac{2\gamma}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{R_c} = \frac{g(\rho_l - \rho_v) L^2}{2\gamma} \quad \text{Bo} > 3 \sim 4 \text{ ok}$$

Or $\Delta P = g(\rho_l - \rho_v) L$

Bo

Remarque 2 : La tension de surface dépend de la pression et donc le flux max dépend aussi de la pression : **le flux max augmente avec la pression.**

Résumé

Avant l'ébullition
= convection libre

$$Nu_L = \frac{h_{conv} L}{\lambda} = \frac{4}{3} \left(\frac{Gr_l}{4} \right)^{\frac{1}{4}} g(Pr)$$

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)x^3}{\nu^2} \quad \text{Grashoff}$$

$$g(Pr) = \frac{0,75Pr^{\frac{1}{2}}}{\left(0,609 + 1,221Pr^{\frac{1}{2}} + 1,238Pr\right)^{\frac{1}{4}}}$$

Pendant l'ébullition

$$\dot{q} = \mu_l h_{lg} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\gamma} \right]^{1/2} \left[\frac{C_{Pl} \Delta T_e}{C_s h_{lv} Pr_l^\alpha} \right]^3$$

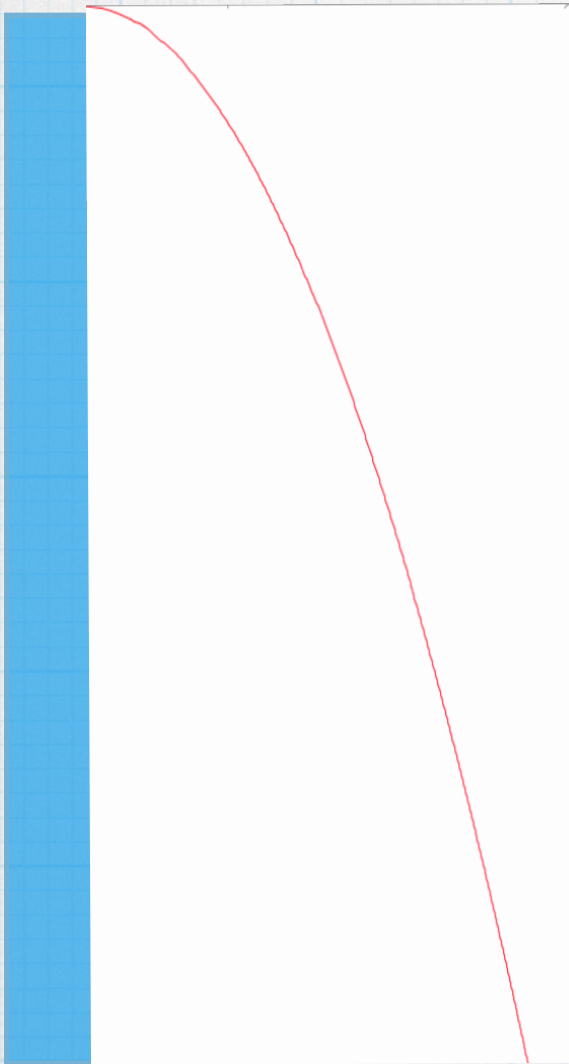
Au delà du flux maximal et
avant le rayonnement

$$Nu_D = \frac{h_{conv} D}{\lambda_v} = C \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v) h'_{lv} D^3}{\nu_v \lambda_v (T_s - T_{sat})} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$h'_{lv} = h_{lv} + 0,8 C p_v (T_s - T_{sat})$$

$C = 0,62$ pour un cylindre

III Condensation



Remarque : Le film de condensat s'épaissi au cours du temps à cause de la condensation continue qui est supérieure à l'accélération du liquide.

Hypothèses :

1. Écoulement laminaire dans le film
2. Vapeur saturée et sans gradient de T : $T = T_{\text{sat}}$
3. La vitesse de la vapeur est nulle
4. Vitesse de liquide faible.

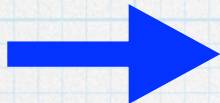
3. Comme à l'interface le transfert de quantité de mouvement est visqueux, on a

$$\mu_l \frac{\partial u_l}{\partial y} = \mu_v \frac{\partial u_v}{\partial y} \quad \text{Or } \frac{\mu_v}{\mu_l} \approx 10^{-2} \quad \text{On ne transmet rien}$$

4. Le transfert de chaleur à travers le film est conductif

On cherche l'énergie transférée par condensation. C'est proportionnel à la masse de vapeur qui s'est condensée donc au débit massique du film liquide

$$\frac{\dot{m}}{b} = \Gamma(x) = \int_0^{\delta(x)} \rho_l u(y) dy \quad \text{Il faut calculer } u \text{ et } \delta(x)$$

Hyp 2 et 3  la couche liquide est stationnaire

$$\text{N.S.} \quad \rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) - \rho g$$

On suppose $u_y = 0$ et $\text{div} \vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$

En supposant en plus que $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0$ on a :

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g$$

Hyp 3: la vapeur est au repos : hydrostatique

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_v g$$

Hypothèse de couche limite

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho_v g - \rho_l g \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g}{\mu} (\rho_l - \rho_v)$$

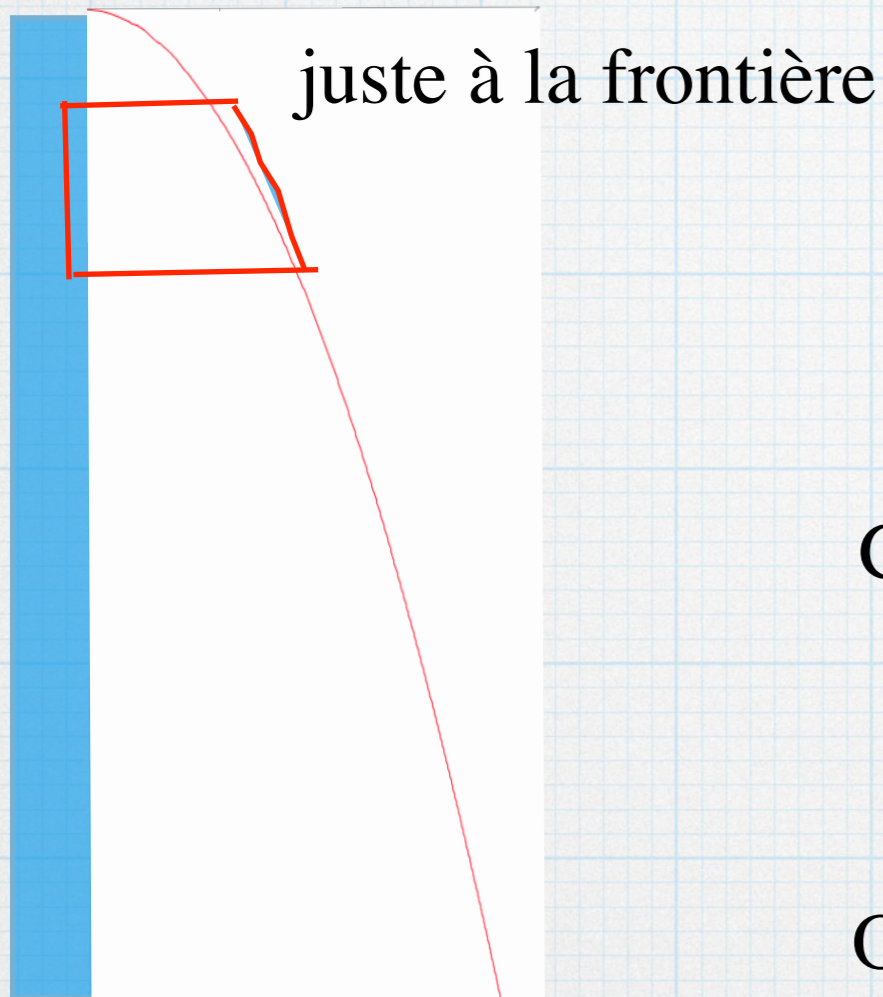
On intègre 2 fois avec $u(0) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} = 0$

$$u(y) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \delta^2 \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]$$

Or $\Gamma(x) = \int_0^{\delta(x)} \rho_l u(y) dy$

Donc $\Gamma(x) = \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \delta^3}{3 \mu_l}$

Reste à déterminer $\delta(x)$



$$\begin{array}{ccc} \dot{m}(x) & & \\ \dot{q}_s(b \cdot dx) & \text{trapezoid} & d\dot{q} = h_{lv} d\dot{m} \\ \dot{m}(x) + d\dot{m} & & \end{array}$$

Comme on néglige l'advection $\dot{q}_s = \lambda_l \frac{T_{sat} - T_s}{\delta}$

$$\dot{q}_s = d\dot{q} = h_{lv} d\dot{m}$$

$$\text{Or } \frac{\dot{m}}{b} = \Gamma(x) \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dx} = \frac{\lambda_l}{h_{lv}} \frac{T_{sat} - T_s}{\delta}$$

$$\text{et } \Gamma(x) = \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)\delta^3}{3\mu_l} \Rightarrow \frac{d\Gamma}{dx} = \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)\delta^2}{\mu_l} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\text{D'où } \delta(x) = \left[\frac{4\lambda_l\mu_l(T_{sat} - T_s)x}{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)h_{lv}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\delta(x) = \left[\frac{4\lambda_l \mu_l (T_{sat} - T_s) x}{g\rho_l (\rho_l - \rho_v) h_{lv}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Newton $\dot{q}_s = h (T_{sat} - T_s)$

$$\dot{q}_s = \lambda_l \frac{T_{sat} - T_s}{\delta}$$

$$h_x = \left[\frac{g\rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3 h_{lv}}{4\mu_l (T_{sat} - T_s) x} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Si on pose $\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$

$$\bar{h}_L = 0,943 \left[\frac{g\rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3 h_{lv}}{4\mu_l (T_{sat} - T_s) L} \right]^{\frac{1}{4}}$$

En tenant compte de l'advection, on obtient le même résultat
mais avec h'_{lv} à la place du h_{lv}

$$\bar{h}_L = 0,943 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3 h'_{lv}}{4 \mu_l (T_{sat} - T_s) L} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$h'_{lv} = (1 + 0,68 Ja) h_{lv} \quad Ja = \frac{C_p \Delta T}{h_{lv}}$$

Pour un cylindre on a

$$\bar{h}_D = 0,729 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda_l^3 h'_{lv}}{N \mu_l (T_{sat} - T_s) D} \right]^{\frac{1}{4}}$$

N : nombre de tubes

RAYONNEMENT

I.Introduction

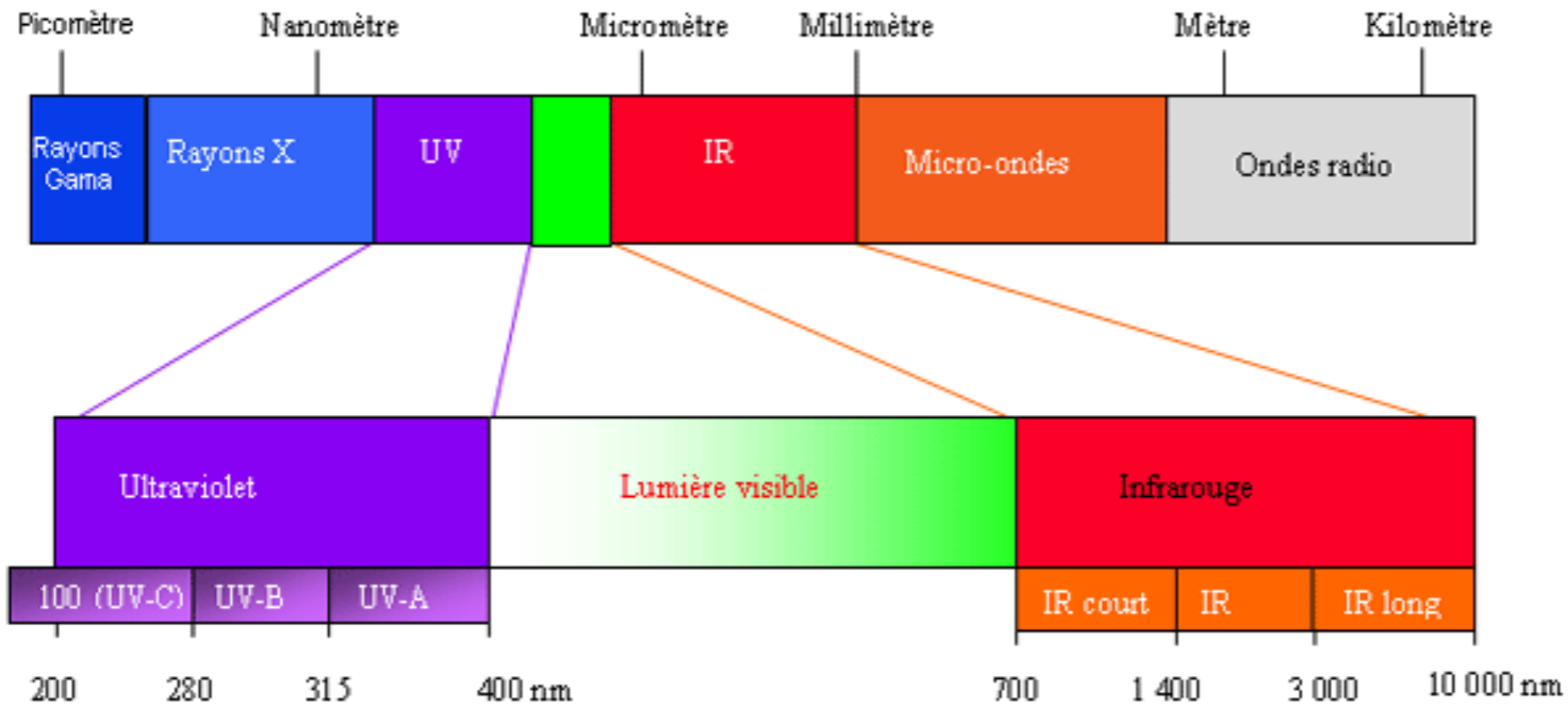
II.Définitions et lois fondamentales

1.Classifications

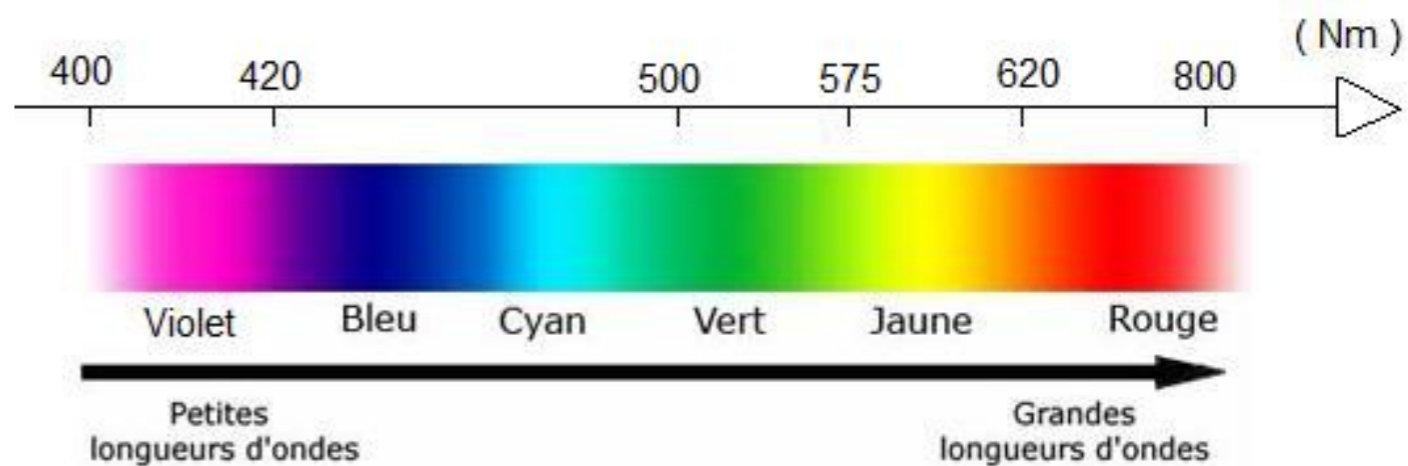
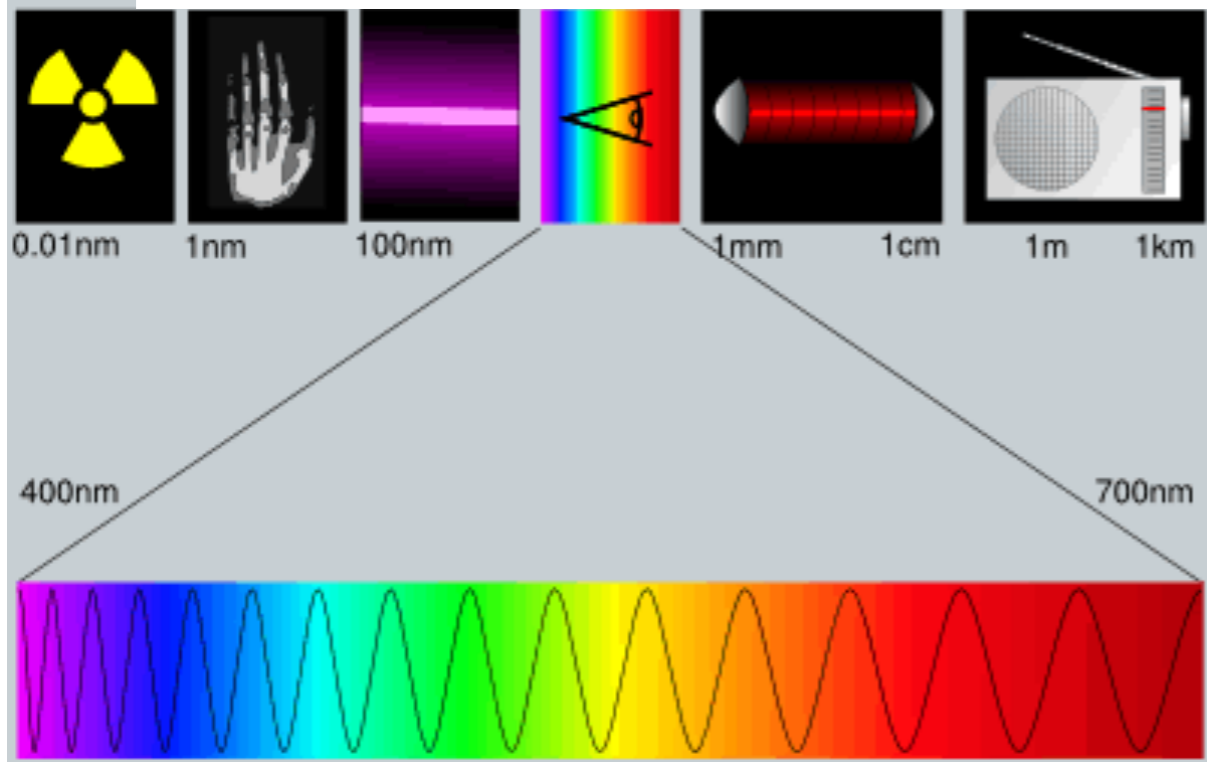
III.Échanges radiatifs entre surfaces séparées par un milieu transparent.

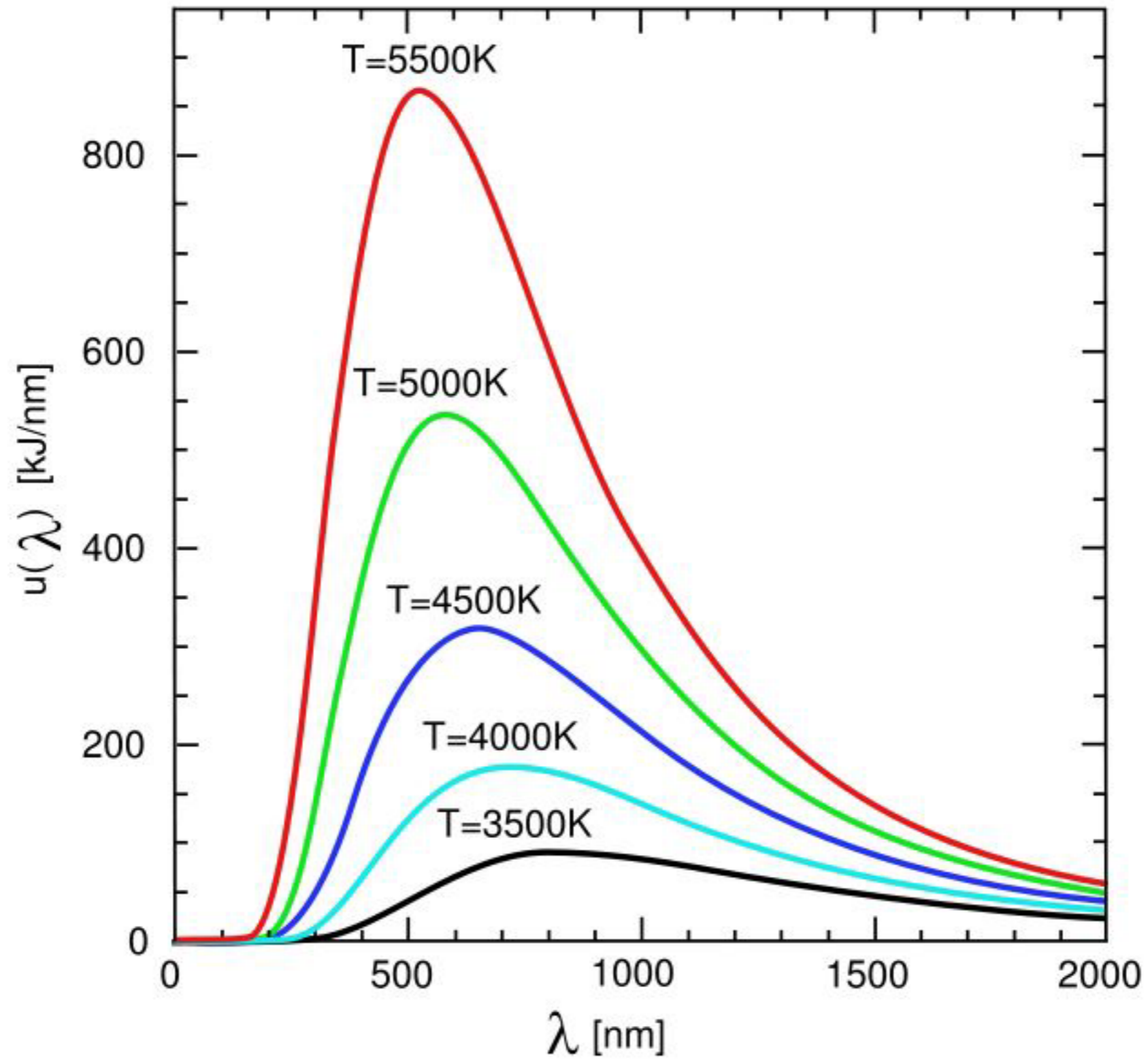
1.Échanges entre surfaces noires

2.Échanges entre surfaces grises



Spectre électromagnétique

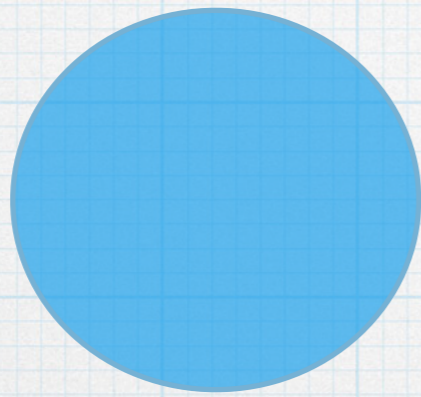




Angle Solide

$$\Omega = [Sr]$$

C'est la surface d'un élément de calotte sphérique de 1 mètre de rayon



$$d\Omega = \frac{ds}{L^2}$$

Angle Solide

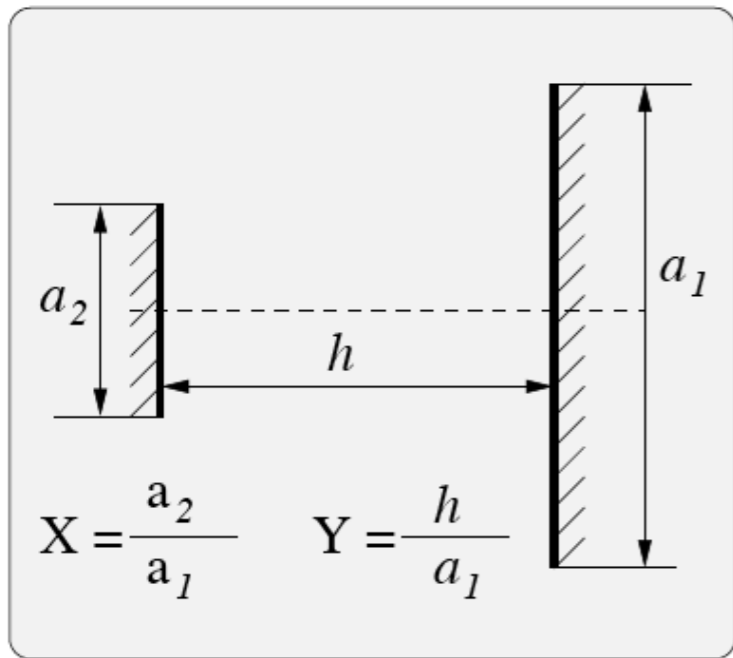
Angle Solide

Angle Solide

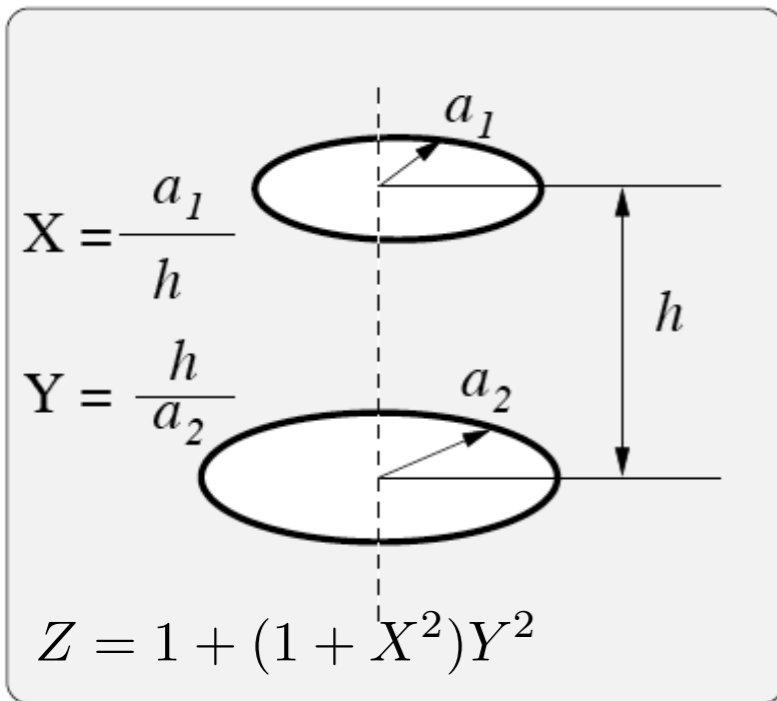
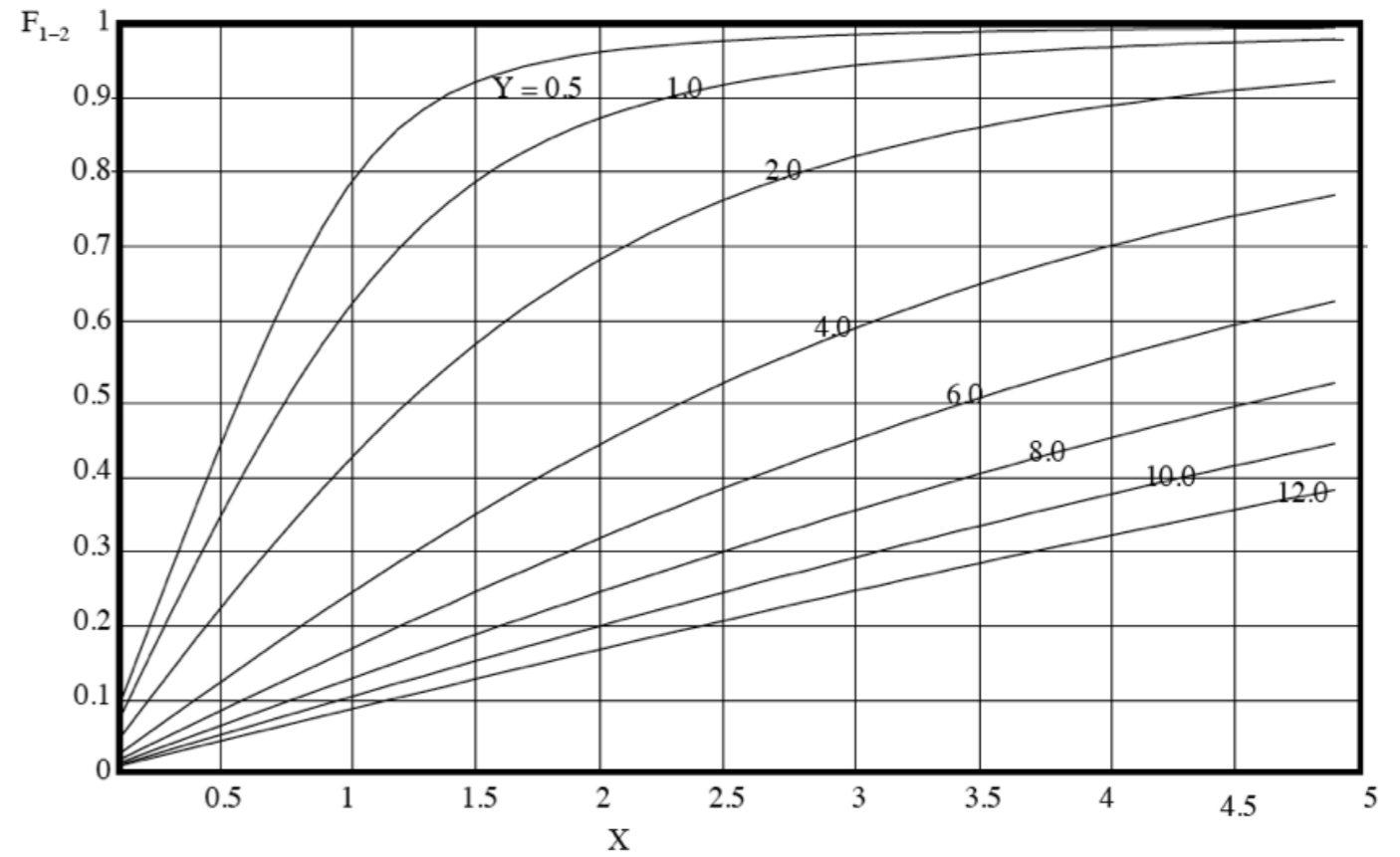
Angle Solide

μm	K	$F_{0-\lambda T}$	μm	K	$F_{0-\lambda T}$
500		$1.298 \cdot 10^{-9}$	5100		0.64602
600		$9.29 \cdot 10^{-8}$	5200		0.6579
700		$1.83 \cdot 10^{-6}$	5300		0.66931
800		$1.643 \cdot 10^{-5}$	5400		0.6803
900		$8.7 \cdot 10^{-5}$	5500		0.6909
1000		$3.2 \cdot 10^{-4}$	5600		0.7010
1100		$9.11 \cdot 10^{-4}$	5700		0.7107
1200		$2.3 \cdot 10^{-3}$	5800		0.7201
1300		$4.3 \cdot 10^{-3}$	5900		0.7291
1400		$7.789 \cdot 10^{-3}$	6000		0.7378
1500		0.01285	—		—
1600		0.01972	—		—
1700		0.2853	—		—
1800		0.3934	—		—
1900		0.05210	—		—
2000		0.06672	—		—
2100		0.083	6500		0.7763
2200		0.1	—		—
2300		0.12	—		—
2400		0.14	—		—
2500		0.16134	—		—
2600		0.1831	—		—
2700		0.205	—		—
2800		0.228	—		—
2900		0.25	7000		0.808

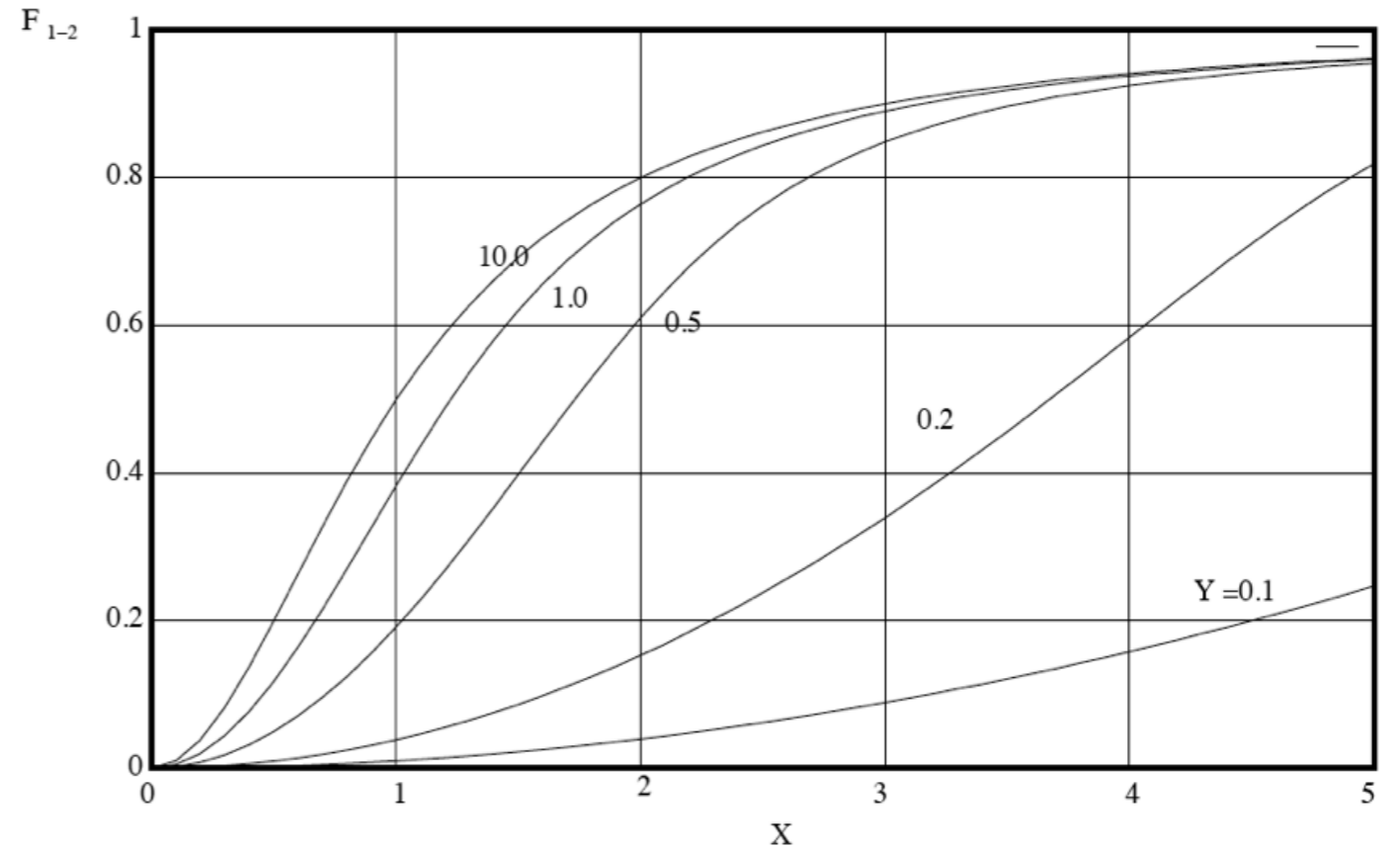
μm	K	$F_{0-\lambda T}$	μm	K	$F_{0-\lambda T}$
3000		0.273	8000		0.8562
3100		0.29575	9000		0.8899
3200		0.31807	10000		0.914
3300		0.34007	11000		0.9318
3400		0.36169	12000		0.945
3500		0.38287	13000		0.955
3600		0.40356	14000		0.9628
3700		0.42372	15000		0.9689
3800		0.4433	16000		0.9737
3900		0.46237	17000		0.9776
4000		0.48082	18000		0.9807
4100		0.49868	19000		0.9833
4200		0.51595	20000		0.9855
4300		0.53264	30000		0.9952
4400		0.54873	40000		0.9978
4500		0.56426	50000		0.9988
4600		0.57921	60000		0.9993
4700		0.59362	70000		0.9995
4800		0.60749	80000		0.9996
4900		0.62084	90000		0.9997
5000		0.63367	100000		0.9998

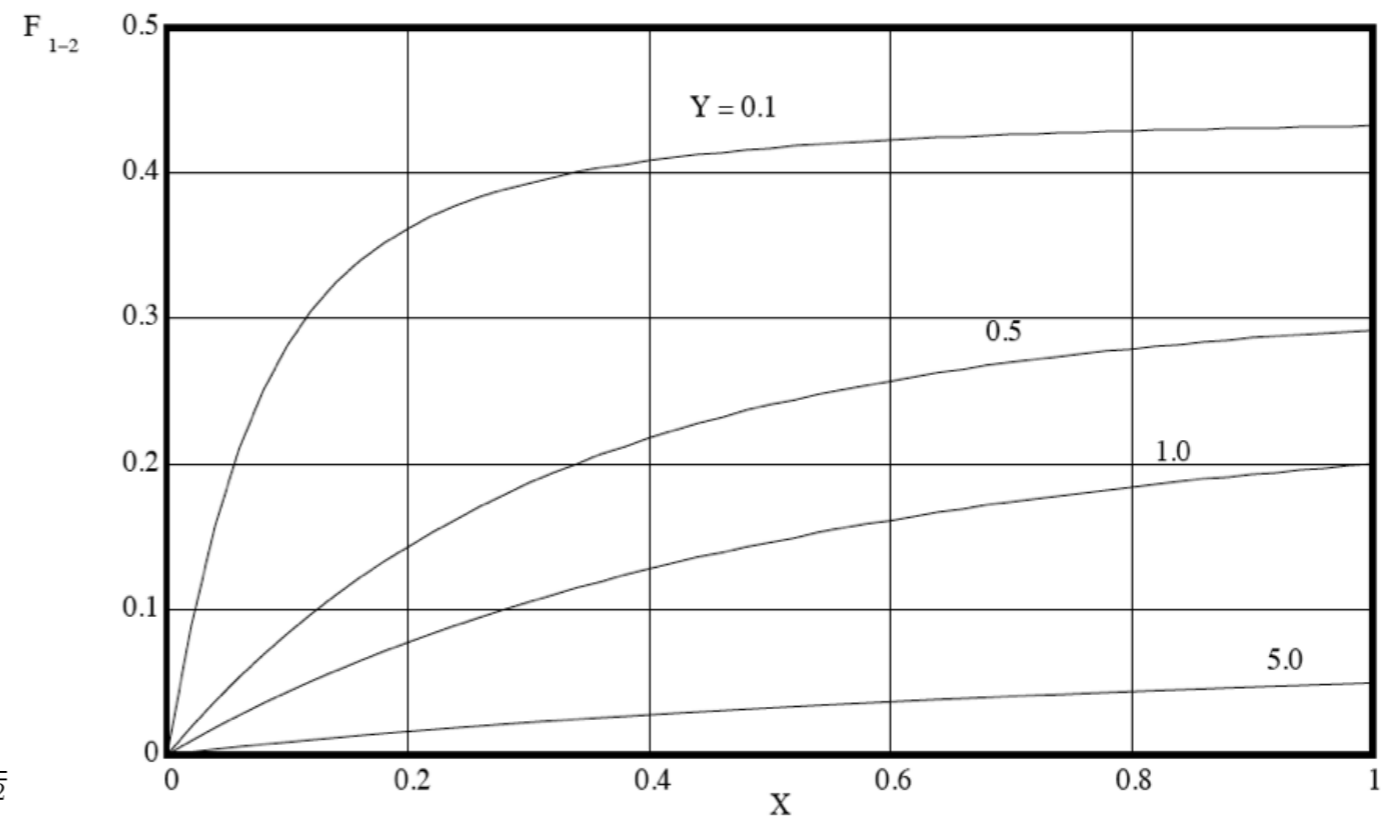
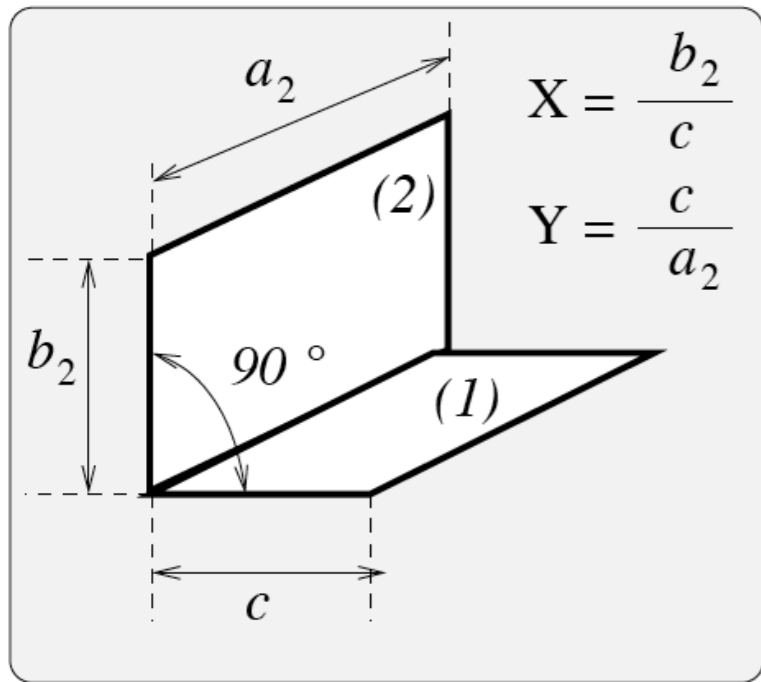


$$F_{1-2} = \frac{1}{a_1} \left[\sqrt{\frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2 + h^2} - \sqrt{\frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 + h^2} \right]$$

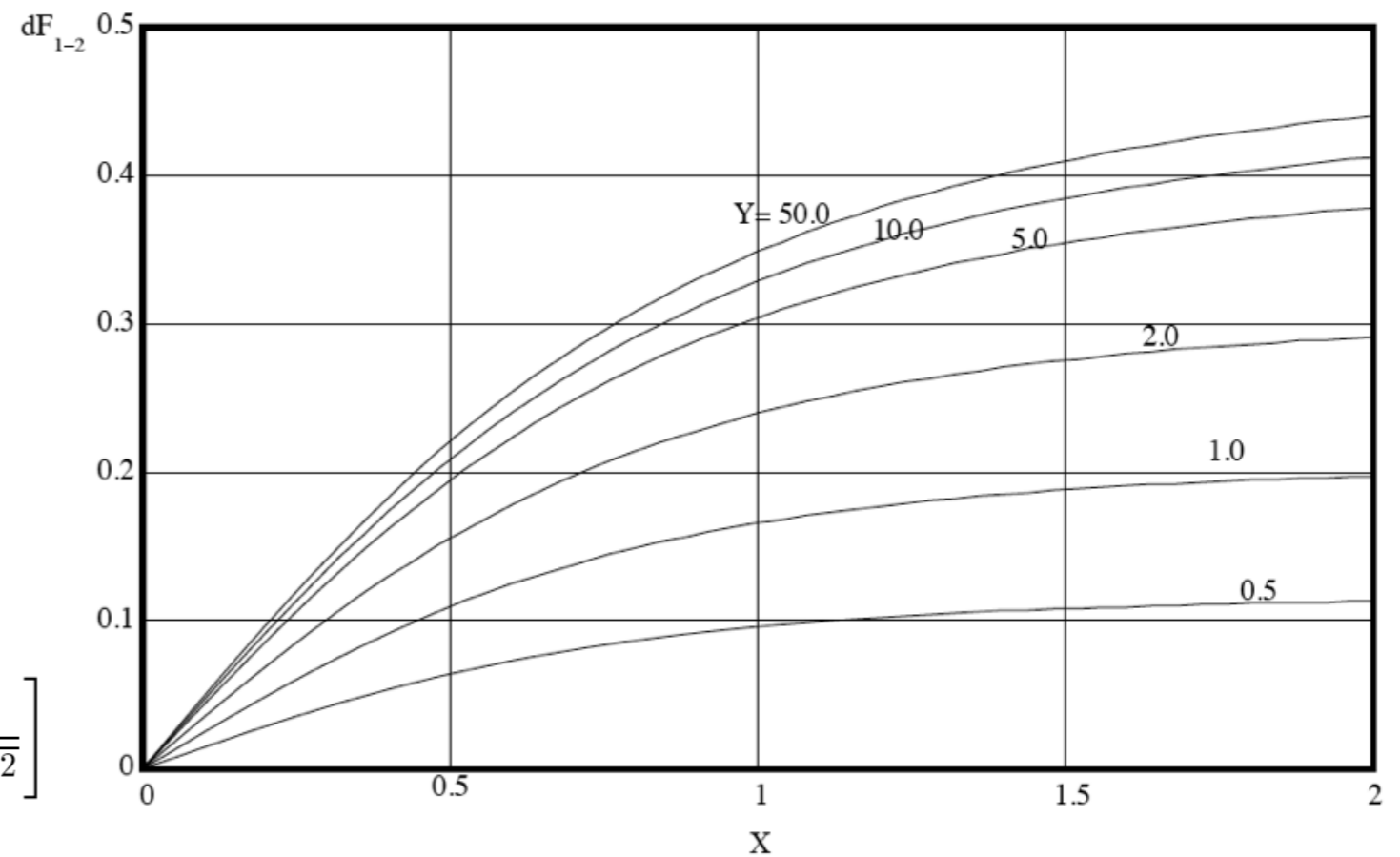
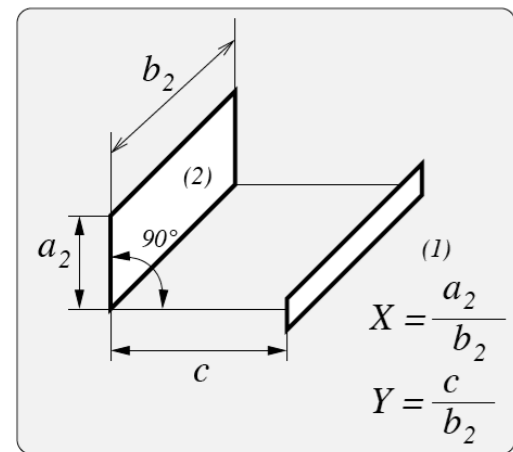


$$F_{1-2} = \frac{1}{2} \left[Z - \sqrt{Z^2 - 4X^2Y^2} \right]$$





$$F_{(1-2)} = \frac{1}{\pi Y} \left[Y \arctan \frac{1}{Y} + X \arctan \frac{1}{X} - \sqrt{X^2 + Y^2} \arctan \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \frac{1}{4} \ln \left\{ \left[\frac{(1+Y^2)(1+X^2)}{(1+Y^2+X^2)} \right] \left[\frac{Y^2(1+Y^2+X^2)}{(1+Y^2)(Y^2+X^2)} \right]^{Y^2} \left[\frac{X^2(1+X^2+Y^2)}{(1+X^2)(X^2+Y^2)} \right]^{X^2} \right\} \right]$$



$$dF_{(dS_1-S_2)} = \frac{1}{\pi Y} \left[\sqrt{1+Y^2} \arctan \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} - \arctan X + \frac{XY}{\sqrt{1+X^2}} \arctan \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} \right]$$