Planche 1

Premiers pas

Dans toute la suite, nous n'utiliserons pas de notation comme $\mathbf{a}$ ou $\vec{a}$ pour distinguer entre un nombre ou une variable. Donc sauf si c'est précisé, a peut désigner un nombre ou un vecteur. Les notations standards de multiplication et d'addition sont utilisées, et notamment si on multiplie un vecteur par un nombre, ce dernier est en multiplication à gauche : on écrit $5v$ et pas $v5$.
Enfin, dans toute la suite, les nombres seront appelés des *scalaires*.

Exercice 1 ().
Supposons que $ab = c$, où b et c sont des vecteurs.

1. a est-il un vecteur ou un scalaire ?
2. Quelle doit être la valeur de a pour que $ab = b$?

Correction

1. *Cette notation standard de produit ab n'étant ni un produit scalaire ni un produit vectoriel, a doit forcément être un scalaire pour pouvoir être multiplié par un vecteur.*
2. *Si b n'est pas le vecteur nul, il faut que* $a = 1$*. Sinon n'importe quelle valeur de a fonctionne.*

Exercice 2 (). Supposons que $a + b = c$, où a et c sont des vecteurs.

1. b est-il un vecteur ou un scalaire ?
2. Quel doit être la valeur de b pour que $a + b = a$?

Correction

1. *a et c étant des vecteurs, par homogénéité (on ne peut pas additionner un vecteur et un scalaire !) b doit aussi être un vecteur.*
2. *En soustrayant a des deux côtés de l'égalité, on a nécessairement* $b = 0$ *(le vecteur nul)*

Exercice 3 ().
On suppose que chacune des expressions ci-dessous est un vecteur. Déterminer alors parmi a, b et c qui sont des scalaires et qui sont des vecteurs.

1. abc
2. $(a + b)c$
3. $a(b + c)$

Correction

1. *Le résultat devant être un vecteur il y a forcément un vecteur parmi les 3, étant donné la convention que lors d'une multiplication d'un scalaire par un vecteur le vecteur se trouve à droite, c est un vecteur. Ensuite, les produits étant soit entre deux scalaire soit entre un scalaire et un vecteur, b doit-être un scalaire, et a aussi.*
2. *Dans cette expression, puisque le résultat est un vecteur et toujours selon la même convention dans l'écriture d'un produit d'un scalaire avec un vecteur, $a + b$ est un scalaire et c un vecteur. Puisqu'un vecteur ne s'additionne pas avec un scalaire et que l'addition de deux vecteurs ne peut pas donner un scalaire, alors a et b sont eux-mêmes des scalaires.*
3. *Encore une fois, a et $b + c$ ne sont pas du même type (pas deux scalaires sinon le résultat serait un scalaire et pas un vecteur, pas deux vecteurs car on ne peut pas faire de produit classique entre deux vecteurs). Toujours par convention, c'est le scalaire à gauche et le vecteur à droite dans le produit. Donc a est un scalaire et $b + c$ est un vecteur. Seule l'addition de deux vecteurs peut donner un vecteur, donc b et c sont eux-mêmes des vecteurs.*

Exercice 4 ().
Une ville envisage plusieurs projets d'infrastructures pour améliorer son environnement et réduire les coûts. Cependant, certains projets ont des effets négatifs sur l'environnement ou des coûts additionnels, ce qui nécessite une gestion équilibrée.
Les projets envisagés sont :

- A Installation de panneaux solaires
- B Construction de nouveaux parcs urbains
- C Installation de nouvelles infrastructures industrielles

Les impacts des projets sont représentés par des vecteurs ayant 3 coordonnées : une valeur traduisant l'impact en terme de réduction des émissions de CO_2 (négative si le projet induit une augmentation des émissions), une valeur traduisant l'impact en terme de réduction de la consommation énergétique (négative si le projet induit une augmentation de la consommation énergétique), et une valeur traduisant les coûts additionnels (négative si le projet est subventionné).
Ainsi, on peut à titre d'exemple attribuer les vecteurs suivants à chaque typologie de projet envisagé :

$$v_A = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix} \qquad v_B = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ -200 \end{pmatrix} \qquad v_C = \begin{pmatrix} -200 \\ -150 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Interpréter alors concrètement les opérations mathématiques suivantes :

1. Prendre l'opposé d'un vecteur (ou le multiplier par -1)
2. Multiplier un vecteur par un scalaire positif
3. Faire une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs

Correction

1. *L'opposé d'un vecteur v serait concrètement un projet qui a des impacts compensant ceux du projet correspondant au vecteur v.*
2. *Multiplier un vecteur par un scalaire positif correspond à augmenter (si le nombre est*

supérieur à 1) ou diminuer (si le nombre est inférieur à 1) les impacts tout en gardant les proportions. Cela pourrait par exemple s'interpréter comme un projet que l'on fait deux fois plus grand que prévu (multiplication par 2 dans ce cas), ou que l'on copie à d'autres endroits.

3. *Faire une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs correspond à regarder le bilan global de plusieurs projets, en faisant éventuellement varier leur taille comme dans la question précédente.*

Exercice 5 ().
Différentes pratiques agricoles consomment l'eau à des niveaux différents et ont des impacts variés sur la qualité et la disponibilité des ressources hydriques à long terme.
On modélise une pratique agricole par un vecteur possédant trois composantes :

- x : Consommation d'eau annuelle (en millions de mètres cubes)
- y : Contribution à la recharge des nappes phréatiques (en millions de mètres cubes)
- z : Impact sur la qualité de l'eau (index de pollution, avec des valeurs négatives signifiant une amélioration)

On considère alors les trois pratiques suivantes :

- Pratique 1 (rotation des cultures avec légumineuses et systèmes de conservation d'eau) : $v_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$
- Pratique 2 (culture intensive de maïs avec utilisation de pesticides et d'engrais chimiques) : $v_2 = \begin{pmatrix} 70 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$
- Pratique 3 (agroforesterie avec systèmes de rétention d'eau) : $v_3 = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$

Un mix de ces pratiques est alors représenté par une combinaison linéaire $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ avec α, β, γ interprétés comme des pourcentages et $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
On définit les critères de durabilité suivants :

- Consommation d'eau : ≤ 50 millions de m^3
- Recharge des nappes phréatiques : ≥ 0 millions de m^3
- Impact sur la qualité de l'eau : ≤ 0 (amélioration ou au moins aucun dommage supplémentaire)

Peut-on envisager n'importe quel mix des pratiques tout en satisfaisant les critères de durabilité ? Donner au moins deux exemples de mix incluant la pratique 2 et permettant de satisfaire les critères de durabilité.

Correction

Tout d'abord, on peut se rendre compte facilement qu'on ne peut pas faire n'importe quoi ! Si l'on fait par exemple 100% *de pratique 2, aucun des crutères de durabilité n'est respecté. Ensuite, cela revient à trouver une répartition des pourcentages* α, β *et* γ *sur les trois pra-*

tiques pour que les coordonnées du vecteur suivant satisfassent les trois critères de durabilité :

$$\alpha \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 70 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La pratique 2 doit être incluse mais cela semble être la pire, donc on peut essayer de lui attribuer un faible coefficient, disons $\beta = 0.1$ (10%). Puis répartir le reste en faisant par exemple 40% sur la pratique 1 ($\alpha = 0.4$) et 50% sur la pratique 3 ($\gamma = 0.5$). Vérifions si cela fonctionne :

$$0.4 \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 70 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 8.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Ce qui satisfait bien les critères de durabilité !
On peut vérifier de la même manière que cela fonctionne avec $\alpha = 0.5$ et $\gamma = 0.4$.

Exercice 6 ().
On rappelle qu'une application linéaire f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifie :

$$f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$$

1. Déterminer parmi $\lambda, v_1, v_2, f(v_1)$ et $f(v_2)$ qui sont des scalaires et qui sont des vecteurs.
2. Une des propriétés connues sur les applications linéaires est que $f(0) = 0$. Que désigne ce 0 ? Est-il un vecteur ou un scalaire ? En choisissant judicieusement λ, v_1 et v_2, démontrer la propriété.

Correction

1. *Notons d'abord que f transforme des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ en des vecteurs qui sont toujours dans $\mathbb{R}^2$. Donc $v_1, v_2, f(v_1)$ et $f(v_2)$ sont des vecteurs. Ensuite, puisqu'on effectue le produit λv_1 et que ce n'est selon cette notation ni un produit scalaire ni un produit vectoriel, λ est nécessairement un scalaire.*
2. *Ce 0 n'est pas le nombre 0 ! C'est le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*

   Posons v_1 un vecteur, $v_2 = -v_1$ et $\lambda = 1$. On a alors d'une part en remplaçant :

   $$f(\lambda v_1 + v_2) = f(v_1 - v_1) = f(0)$$

   Et d'autre part en utilisant la linéarité de f :

   $$f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2) = f(v_1) + f(-v_1) = f(v_1) - f(v_1) = 0$$

   Ainsi on a bien $f(0) = 0$.

Exercice 7 ().
On considère une application linéaire f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que ces relations suffisent à déterminer $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ pour tout vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, en écrivant ce vecteur comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Correction

Si on réussit à écrire le vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *comme une combinaison linéaire des vecteurs* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$*, alors on pourra utiliser la linéarité de* f *pour calculer son image.*
Or,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Et donc par linéarité de f *:*

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = (x-y)f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + yf\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = (x-y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

On est donc bien capable de calculer l'image de n'importe quel vecteur même si on ne connaît initialement que deux images !

Exercice 8 ().
Vous êtes chargé d'organiser un festival de musique dans une grande ville. Le festival comporte plusieurs scènes et une liste de groupes musicaux qui se produiront. Vous devez créer un programme où chaque groupe jouera sur une scène à un moment spécifique.
Le festival dispose de 3 scènes différentes : Scène A (notée S_A), Scène B (notée S_B), et Scène C (notée S_C). On note alors S l'ensemble des scènes :

$$S = \{S_A, S_B, S_C\}$$

Il y a 4 groupes musicaux participants : Groupe X, Groupe Y, Groupe Z, et Groupe W. On note alors G l'ensemble des groupes :

$$G = \{X, Y, Z, W\}$$

1. Déterminez toutes les paires possibles $(\text{groupe}, \text{scène})$ qui pourraient être créées en combinant chaque groupe avec chaque scène. L'ensemble de ces paires s'appelle le *produit cartésien* de G et S, noté $G \times S$.
2. Chaque groupe va jouer pendant un temps donné. Proposer un produit cartésien de trois ensembles $G \times S \times E$, en précisant concrètement E, permettant de décrire tous les triplets possibles $(\text{groupe}, \text{scène}, \text{temps})$.

Correction

1. *On pourrait créer toutes les paires suivantes :*

$$(X, S_A), (X, S_B), (X, S_C), (Y, S_A), (Y, S_B), (Y, S_C)$$

$$(Z, S_A), (Z, S_B), (Z, S_C), (W, S_A), (W, S_B), (W, S_C)$$

2. *L'ensemble des temps possibles peut être représenté par exemple par* $\mathbb{R}_+$ *ou* $\mathbb{R}_+^\star$*. Si*

on nous donnait un temps maximum possible T_{max} ce pourrait être aussi l'ensemble $[0, T_{max}]$.

Dans ce cas, l'ensemble des triplets possibles $(groupe, scène, temps)$ est :

$$G \times S \times \mathbb{R}_+$$

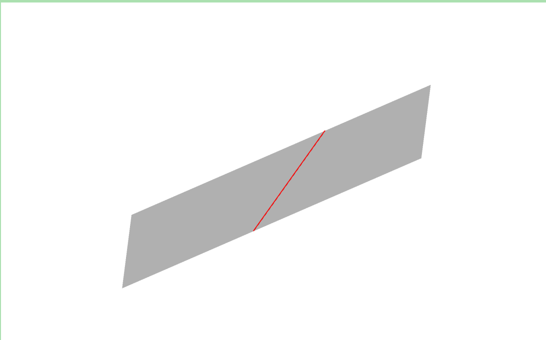
Exercice 9 ().

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, dessiner les différentes situations possibles d'intersection entre un plan et une droite.

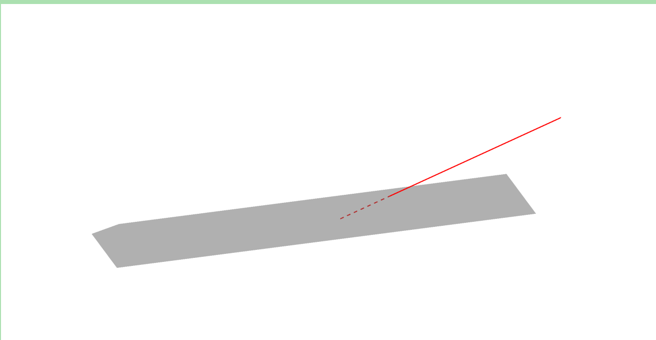
Correction

Il y a trois situations possibles :

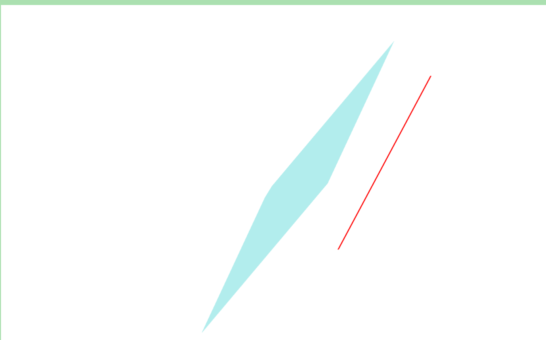
- *La droite est contenue dans le plan :*



- *La droite a un seul point d'intersection avec le plan (sans forcément qu'il y ait une orthogonalité mais ça peut)*



- *La droite et le plan ont une intersection vide, c'est-à-dire que la droite est parallèle au plan sans être contenue dedans.*



Exercice 10 ().

Quels sont les vecteurs communs des deux ensembles suivants ?

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \qquad E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0\}$$

Correction

Les vecteurs communs à ces deux ensembles sont des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *devant vérifier à la fois* $x+y+z=0$ *et* $x+z=0$. *Ce qui revient à résoudre le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x \quad\; +z=0 \end{cases}$$

qui est équivalent par soustraction des deux lignes à

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad\; y \quad\; =0 \end{cases}$$

et donc

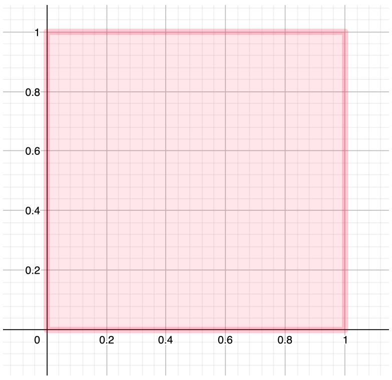
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

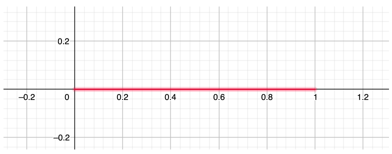
L'ensemble des vecteurs communs est donc Vect$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

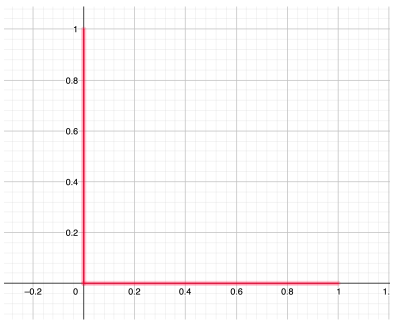
Exercice 11 ().

(prérequis : exercice 8)

Laquelle des trois représentations ci-dessous correspond à l'ensemble $[0,1] \times [0,1]$? On le note aussi $[0,1]^2$.







Correction

Il s'agit de représenter toutes les paires possibles (x, y) avec $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$.
Cela ne peut être ni la représentation 2 pour laquelle on observe qu'on a toujours $y = 0$, ni la représentation 3 qui est trop restrictive ($y = 0$ dès que $x \neq 0$, alors qu'on devrait avoir plein d'autres points comme $(0.5, 0.5)$, $(0.2, 0.4)$,...).
Il s'agit donc de la représentation 1 : chaque point du carré a effectivement des coordonnées qui sont entre 0 et 1 et le dessin couvre bien tous les cas possibles.

Exercice 12 ().
(prérequis : exercice 8)
Sur une image, la couleur d'un pixel est définie par un triplet (r, g, b) où r, g et b sont trois nombre entiers entre 0 et 255 indiquant respectivement le niveau de rouge, de vert et de bleu du pixel.
Écrire sous la forme d'un produit cartésien l'ensemble des couleurs possibles d'un pixel.

Correction

Une couleur est un triplet, l'ensemble va donc être un produit cartésien de trois ensembles. Chaque valeur du triplet étant un nombre entier entre 0 et 255, l'ensemble des triplets est :

$$[\![0, 255]\!] \times [\![0, 255]\!] \times [\![0, 255]\!]$$

que l'on peut aussi noté

$$[\![0, 255]\!]^3$$

Exercice 13 ().
On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tous les éléments de E sont aussi dans F. On note alors $E \subset F$.

1. Est-ce que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$?
2. On rappelle que pour une matrice carrée M, la*trace* (notée $\mathrm{tr}(M)$) est la somme de ses coefficients diagonaux. Comparer en terme d'inclusion les deux ensembles suivants :

$$\Big\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\Big\} \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction

1. *Posons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. La question est de savoir si ce vecteur appartient aussi à $\mathbb{R}^3$. La réponse est non puisqu'il n'a même pas le bon nombre de coordonnées ! Donc $\mathbb{R}^2$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^3$.*
2. *Intuitivement, on voit que les matrices de l'ensemble de droite on une trace nulle (puisque leurs éléments diagonaux sont nuls), mais que cela ne couvre pas toutes les possibilités.*
   On va donc montrer que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \Big\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\Big\}$$

Posons M une matrice de l'ensemble de gauche ci-dessus, M est alors de la forme $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On a alors $\mathrm{tr}(M) = 0 + 0 = 0$, ce qui est la condition pour être dans l'ensemble de droite ! Ainsi, toute matrice de l'ensemble de gauche est bien dans l'ensemble de droite, ce qui traduit l'inclusion cherchée.

On peut se convaincre rapidement que l'autre inclusion est fausse : on peut en effet trouver une matrice de trace nulle mais qui n'est pas dans l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $\left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0 \right\}$ n'est pas inclus dans $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.