Planche 1

Premiers pas

Dans toute la suite, nous n'utiliserons pas de notation comme **a** ou $\vec{a}$ pour distinguer entre un nombre ou une variable. Donc sauf si c'est précisé, a peut désigner un nombre ou un vecteur.
Les notations standards de multiplication et d'addition sont utilisées, et notamment si on multiplie un vecteur par un nombre, ce dernier est en multiplication à gauche : on écrit $5v$ et pas $v5$.
Enfin, dans toute la suite, les nombres seront appelés des *scalaires*.

Exercice 1 ().
Supposons que $ab = c$, où b et c sont des vecteurs.

1. a est-il un vecteur ou un scalaire ?
2. Quel doit être la valeur de a pour que $ab = b$?

Exercice 2 (). Supposons que $a + b = c$, où a et c sont des vecteurs.

1. b est-il un vecteur ou un scalaire ?
2. Quel doit être la valeur de b pour que $a + b = a$?

Exercice 3 ().
On suppose que chacune des expressions ci-dessous est un vecteur. Déterminer alors parmi a, b et c qui sont des scalaires et qui sont des vecteurs.

1. abc
2. $(a + b)c$
3. $a(b + c)$

Exercice 4 ().
Une ville envisage plusieurs projets d'infrastructures pour améliorer son environnement et réduire les coûts. Cependant, certains projets ont des effets négatifs sur l'environnement ou des coûts additionnels, ce qui nécessite une gestion équilibrée.
Les projets envisagés sont :

A Installation de panneaux solaires

B Construction de nouveaux parcs urbains

C Installation de nouvelles infrastructures industrielles

Les impacts des projets sont représentés par des vecteurs ayant 3 coordonnées : une valeur traduisant l'impact en terme de réduction des émissions de CO_2 (négative si le projet induit une augmentation des émissions), une valeur traduisant l'impact en terme de réduction de la consommation énergétique (négative si le projet induit une augmentation de la consommation énergétique), et une valeur traduisant les coûts additionnels (négative si le projet est subventionné).

Ainsi, on peut à titre d'exemple attribuer les vecteurs suivants à chaque typologie de projet envisagé :

$$v_A = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix} \qquad v_B = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ -200 \end{pmatrix} \qquad v_C = \begin{pmatrix} -200 \\ -150 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Interpréter alors concrètement les opérations mathématiques suivantes :

1. Prendre l'opposé d'un vecteur (ou le multiplier par -1)
2. Multiplier un vecteur par un scalaire positif
3. Faire une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs

Exercice 5 ().
Différentes pratiques agricoles consomment l'eau à des niveaux différents et ont des impacts variés sur la qualité et la disponibilité des ressources hydriques à long terme.
On modélise une pratique agricole par un vecteur possédant trois composantes :

- x : Consommation d'eau annuelle (en millions de mètres cubes)
- y : Contribution à la recharge des nappes phréatiques (en millions de mètres cubes)
- z : Impact sur la qualité de l'eau (index de pollution, avec des valeurs négatives signifiant une amélioration)

On considère alors les trois pratiques suivantes :

- Pratique 1 (rotation des cultures avec légumineuses et systèmes de conservation d'eau) : $v_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$
- Pratique 2 (culture intensive de maïs avec utilisation de pesticides et d'engrais chimiques) : $v_2 = \begin{pmatrix} 70 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$
- Pratique 3 (agroforesterie avec systèmes de rétention d'eau) : $v_3 = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$

Un mix de ces pratiques est alors représenté par une combinaison linéaire $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ avec α, β, γ interprétés comme des pourcentages et $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
On définit les critères de durabilité suivants :

- Consommation d'eau : ≤ 50 millions de m^3
- Recharge des nappes phréatiques : ≥ 0 millions de m^3
- Impact sur la qualité de l'eau : ≤ 0 (amélioration ou au moins aucun dommage supplémentaire)

Peut-on envisager n'importe quel mix des pratiques tout en satisfaisant les critères de durabilité ? Donner au moins deux exemples de mix incluant la pratique 2 et permettant de satisfaire les critères de durabilité.

Exercice 6 ().
On rappelle qu'une application linéaire f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifie :

$$f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$$

1. Déterminer parmi $\lambda, v_1, v_2, f(v_1)$ et $f(v_2)$ qui sont des scalaires et qui sont des vecteurs.
2. Une des propriétés connues sur les applications linéaires est que $f(0) = 0$. Que désigne ce 0 ? Est-il un vecteur ou un scalaire ? En choisissant judicieusement λ, v_1 et v_2, démontrer la propriété.

Exercice 7 ().
On considère une application linéaire f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Démontrer que ces relations suffisent à déterminer $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ pour tout vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, en écrivant ce vecteur comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Exercice 8 ().
Vous êtes chargé d'organiser un festival de musique dans une grande ville. Le festival comporte plusieurs scènes et une liste de groupes musicaux qui se produiront. Vous devez créer un programme où chaque groupe jouera sur une scène à un moment spécifique.
Le festival dispose de 3 scènes différentes : Scène A (notée S_A), Scène B (notée S_B), et Scène C (notée S_C). On note alors S l'ensemble des scènes :

$$S = \{S_A, S_B, S_C\}$$

Il y a 4 groupes musicaux participants : Groupe X, Groupe Y, Groupe Z, et Groupe W. On note alors G l'ensemble des groupes :

$$G = \{X, Y, Z, W\}$$

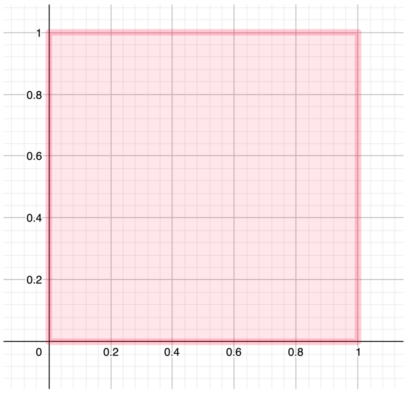
1. Déterminez toutes les paires possibles $(\text{groupe}, \text{scène})$ qui pourraient être créées en combinant chaque groupe avec chaque scène. L'ensemble de ces paires s'appelle le *produit cartésien* de G et S, noté $G \times S$.
2. Chaque groupe va jouer pendant un temps donné. Proposer un produit cartésien de trois ensembles $G \times S \times E$, en précisant concrètement E, permettant de décrire tous les triplets possibles $(\text{groupe}, \text{scène}, \text{temps})$.

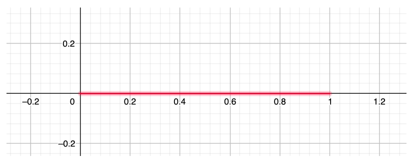
Exercice 9 ().
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, dessiner les différentes situations possibles d'intersection entre un plan et une droite.

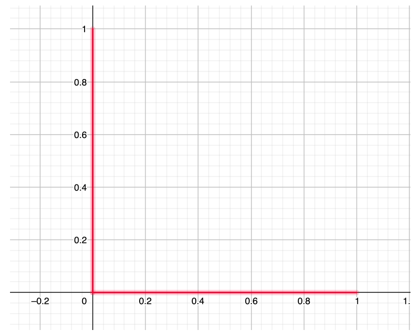
Exercice 10 ().
Quels sont les vecteurs communs des deux ensembles suivants ?

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \qquad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$$

Exercice 11 ().
(prérequis : exercice 8)
Laquelle des trois représentations ci-dessous correspond à l'ensemble $[0,1] \times [0,1]$? On le note aussi $[0,1]^2$.







Exercice 12 ().
(prérequis : exercice 8)
Sur une image, la couleur d'un pixel est définie par un triplet (r, g, b) où r, g et b sont trois nombre entiers entre 0 et 255 indiquant respectivement le niveau de rouge, de vert et de bleu du pixel.
Écrire sous la forme d'un produit cartésien l'ensemble des couleurs possibles d'un pixel.

Exercice 13 ().
On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tous les éléments de E sont aussi dans F. On note alors $E \subset F$.

1. Est-ce que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$?
2. On rappelle que pour une matrice carrée M, la*trace* (notée $\mathrm{tr}(M)$) est la somme de ses coefficients diagonaux. Comparer en terme d'inclusion les deux ensembles suivants :

$$\Big\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0 \Big\} \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$