

Analyse

Julien Duval et Jacek Graczyk

1. séries numériques. p.2.
2. suites et séries de fonctions. p.7.
3. séries entières. p.12.
4. intégrales à paramètre. p.17.
5. intégrales doubles. p.22.

Compléments du cours

6. techniques de sommation. p.26.
7. série exponentielle, nombres e et π , problème de Bâle. p.30.
8. méthode de Feynman. p.45.
9. examens partiel et final 2023. p.48.

1. séries numériques.

a) retour rapide sur les suites.

Une suite (u_n) converge vers l (sa limite) si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour $n \geq N$ on a $|u_n - l| \leq \epsilon$.

Il est commode d'avoir des critères de convergence sans connaître la limite a priori.

suites monotones. Une suite croissante majorée converge (idem pour une suite décroissante minorée).

critère de Cauchy. Une suite (u_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy, i.e. pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour $n, m \geq N$ on a $|u_n - u_m| \leq \epsilon$.

b) séries numériques, premières propriétés.

On veut pouvoir sommer une infinité de nombres, donner un sens par exemple à la somme infinie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

définition. Soit (u_n) une suite. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ converge. Sinon $\sum u_n$ diverge. Quand $\sum u_n$ converge la limite s des sommes partielles s_n est appelée somme de la série et on écrit $s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Enfin u_n est appelé terme général de la série.

exemples.

série géométrique. C'est la série $\sum r^n$, de raison $r \geq 0$. Les sommes partielles $s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$ valent $\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ si $r \neq 1$ et $n+1$ si $r = 1$. Donc $\sum r^n$ converge si et seulement si $r < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

série harmonique. C'est la série $\sum \frac{1}{n}$. Les sommes partielles $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ vérifient que $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Donc s_n ne peut converger vers une limite s . Sinon on aurait à la limite $0 = s - s \geq \frac{1}{2}$.

premières propriétés.

linéarité. Soient a, b deux réels et $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries convergentes de somme s, t . Alors $\sum (au_n + bv_n)$ converge et sa somme est $as + bt$.

En effet si s_n et t_n sont les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ alors la n ème somme partielle de $\sum (au_n + bv_n)$ vaut $as_n + bt_n$ qui tend vers $as + bt$.

oubli des premiers termes. Soit p un entier. Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ sont de même nature, toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

En effet prenons $p = 1$ par exemple. Soient s_n, t_n les sommes partielles de ces deux séries. On a $s_n = u_0 + t_n$ donc (s_n) et (t_n) diffèrent d'une constante. Elles convergent ou divergent simultanément.

comportement du terme général. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors son terme général u_n tend vers 0.

En effet la suite des sommes partielles (s_n) tend vers s . Donc $u_n = s_n - s_{n-1}$ tend vers $s - s = 0$.

remarque. Donc une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est divergente. Mais il existe aussi des séries divergentes dont le terme général tend vers 0, par exemple la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

séries télescopiques. Elles sont de la forme $\sum (a_n - a_{n+1})$ où (a_n) est une suite. Une série télescopique converge si et seulement si la suite (a_n) associée converge.

En effet soit s_n la somme partielle de la série télescopique. On a $s_n = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{n+1}$. Donc la suite (s_n) converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

exemple. La série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge. En effet c'est une série télescopique car $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Or la suite associée $(\frac{1}{n-1})$ converge.

c) critères de convergence, cas positif.

Dans ce paragraphe on se restreint aux séries $\sum u_n$ de terme général positif. Dans ce cas les sommes partielles s_n sont croissantes car $s_n - s_{n-1} = u_n \geq 0$. Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si (s_n) est majorée.

comparaison. Soient $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries avec $u_n, v_n \geq 0$. On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout n . Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi. Autrement dit si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge aussi.

En effet soient s_n, t_n les sommes partielles de $\sum u_n, \sum v_n$. Par hypothèse $s_n \leq t_n$. Maintenant si $\sum v_n$ converge (t_n) est majorée donc (s_n) aussi, d'où la convergence de $\sum u_n$.

remarque. Il suffit d'avoir la comparaison $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang puisque la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes.

exemples.

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. En effet $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge. En effet $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ pour $n \geq 2$. Or $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge.

équivalent. Soient $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries avec $u_n, v_n > 0$. On suppose que $u_n \sim v_n$, i.e. $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

En effet par hypothèse à partir d'un certain rang on a $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2$ donc $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq 2v_n$. Si $\sum v_n$ converge $\sum 2v_n$ aussi donc par comparaison $\sum u_n$ converge. Inversement si $\sum u_n$ converge alors par comparaison $\sum \frac{1}{2}v_n$ converge donc aussi $\sum v_n$.

exemple. $\sum \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ converge. En effet $\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1+(\frac{2}{3})^n}{1+(\frac{4}{5})^n} \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Or $\sum \left(\frac{3}{5}\right)^n$ converge car c'est une série géométrique de raison < 1 .

Les deux règles suivantes utilisent une comparaison avec une série géométrique.

règle de Cauchy. Soit $\sum u_n$ une série avec $u_n \geq 0$. On suppose que $u_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow l$. Alors si $l < 1$ $\sum u_n$ converge et si $l > 1$ $\sum u_n$ diverge.

En effet si $l < 1$ soit r tel que $l < r < 1$. Par hypothèse à partir d'un certain rang on a $u_n^{\frac{1}{n}} \leq r$ soit $u_n \leq r^n$. Donc par comparaison $\sum u_n$ converge puisque $\sum r^n$ converge (série géométrique de raison < 1).

Si $l > 1$ par hypothèse à partir d'un certain rang on a $u_n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ donc $u_n \geq 1$. En particulier u_n ne tend pas vers 0 et $\sum u_n$ diverge.

remarque. Quand $l = 1$ on ne peut rien dire. Par exemple $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $l = 1$ dans les deux cas. En effet $\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 1$ (passer au logarithme et vérifier que $-\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ par croissance comparée) et de même $\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \rightarrow 1$.

exemple. Soit $r > 0$. Alors $\sum n^n r^{n^2}$ converge si $r < 1$ et diverge si $r \geq 1$. En effet $u_n^{\frac{1}{n}} = nr^n$ tend vers $+\infty$ si $r \geq 1$ et vers 0 (par croissance comparée) si $r < 1$.

règle de D'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série avec $u_n > 0$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l$. Alors si $l < 1$ $\sum u_n$ converge et si $l > 1$ $\sum u_n$ diverge.

En effet si $l < 1$ soit r tel que $l < r < 1$. Par hypothèse il existe un rang N tel que pour $n \geq N$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$. En particulier $\frac{u_{N+1}}{u_N} \leq r, \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \leq r, \dots, \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq r$. En multipliant ces inégalités entre elles on obtient $\frac{u_n}{u_N} \leq r^{n-N}$ donc $u_n \leq Cr^n$ où $C = u_N r^{-N}$. Par comparaison $\sum u_n$ converge car $\sum Cr^n$ converge (multiple d'une série géométrique de raison < 1).

Si $l > 1$ par hypothèse à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc u_n devient croissante. En particulier elle ne tend pas vers 0 et $\sum u_n$ diverge.

remarque. Ici encore tout peut arriver quand $l = 1$ (prendre les mêmes exemples $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$).

exemple. $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge pour tout $r > 0$. En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^{n+1}n!}{(n+1)!r^n} = \frac{r}{n+1} \rightarrow 0$.

Pour aller plus loin il est commode de comparer les séries à des intégrales.

définition. Soit $f : [p, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction continue positive. On dit que l'intégrale (généralisée) $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ converge si la fonction $F(x) = \int_p^x f(t)dt$ a une limite (finie) quand $x \rightarrow +\infty$.

remarque. Comme f est positive F est une fonction croissante. En effet si $y > x$ alors $F(y) = \int_p^y f(t)dt = \int_p^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt \geq \int_p^x f(t)dt = F(x)$ par Chasles. Donc $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si F est majorée.

exemple. Soit $\alpha > 0$. Alors $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

En effet pour $\alpha \neq 1$ $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ qui converge quand $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$ $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$ qui diverge quand $x \rightarrow +\infty$.

De même $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ car $F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{du}{u^\alpha}$ par le changement de variable $u = \ln t$ et on se ramène au cas précédent.

comparaison avec une intégrale. Soit $f : [p, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction continue positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n=p}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature, toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

En effet prenons $p = 0$ pour simplifier.

Puisque f est décroissante on a $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$. Donc par Chasles $F(n+1) = \int_0^{n+1} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \dots + \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(0) + \dots + f(n) = s_n$. Si la série converge (s_n est majorée donc $(F(n+1))$ aussi ce qui majore F et l'intégrale converge.

De même $F(n) \geq f(1) + \dots + f(n) = s_n - f(0)$. Si l'intégrale converge ($F(n)$) est majorée donc $(F(n) + f(0))$ aussi ce qui majore (s_n) et la série converge.

exemple. En les comparant avec une intégrale (voir plus haut) les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

d) critères de convergence, cas de signe quelconque.

La première idée est de se ramener au cas positif.

définition. Soit $\sum u_n$ une série. On dit qu'elle converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

proposition. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors elle converge.

En effet posons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Notez que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$. En particulier $|u_n| \geq u_n^+$ et $|u_n| \geq u_n^-$. Maintenant si $\sum u_n$ est absolument convergente $\sum |u_n|$ converge. Donc $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent aussi par comparaison (les termes généraux sont positifs). D'où la convergence de $\sum u_n$ par linéarité.

Mais il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

séries alternées. Elles sont de la forme $\sum (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$. Si (v_n) est décroissante et tend vers 0 alors $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Pour le montrer on analyse le comportement des sommes partielles en séparant indice pair et indice impair. La suite (s_{2n}) est décroissante car $s_{2n+2} - s_{2n} = -v_{2n+1} + v_{2n+2} \leq 0$ (car (v_n) est décroissante). De même la suite (s_{2n-1}) est croissante car $s_{2n+1} - s_{2n-1} = v_{2n} - v_{2n+1} \geq 0$ (toujours car (v_n) est décroissante). De plus $s_{2n-1} \leq s_{2n}$ car $s_{2n} - s_{2n-1} = v_{2n} \geq 0$. Ainsi (s_{2n-1}) est une suite croissante majorée par s_0 donc converge. De même (s_{2n}) est une suite décroissante minorée par s_1 donc converge. Et c'est la même limite car $s_{2n} - s_{2n-1} = v_{2n} \rightarrow 0$.

exemple. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$. Mais elle ne converge absolument que pour $\alpha > 1$ car $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| = \sum \frac{1}{n^\alpha}$ (c'est une série de Riemann).

Les séries alternées rentrent aussi dans le cadre suivant.

règle d'Abel. Soient (v_n) une suite décroissante tendant vers 0 et $\sum u_n$ une série dont les sommes partielles sont bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

En effet soient s_n, t_n les sommes partielles de $\sum u_n, \sum u_n v_n$. Il existe une constante C telle que $|s_n| \leq C$ pour tout n . Calculons t_n en fonction des s_n . On a $t_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = s_0 v_0 + (s_1 - s_0) v_1 + \dots + (s_n - s_{n-1}) v_n = s_0(v_0 - v_1) + \dots + s_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + s_n v_n$ (en regroupant suivant les s_n). Or $|s_n v_n| \leq C v_n \rightarrow 0$. Ce qui reste est une somme partielle de $\sum s_n (v_n - v_{n+1})$. Mais $|s_n (v_n - v_{n+1})| \leq C(v_n - v_{n+1})$ et $\sum C(v_n - v_{n+1})$ converge (multiple d'une série télescopique). Ainsi $\sum s_n (v_n - v_{n+1})$ converge absolument par comparaison, donc converge. Autrement dit la suite de ses sommes partielles converge et (t_n) aussi.

2. suites et séries de fonctions.

a) suites de fonctions.

Soient $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions définies sur un intervalle I (n étant un entier).

définition. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ si pour tout x dans I la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

remarque. Autrement dit pour tout x dans I et pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N (dépendant de x et ϵ) tel que pour $n \geq N$ on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

exemple. Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n$. Alors (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ où $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(1) = 1$. En effet $x^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ si $x < 1$ et $1^n = 1$. Notez que f n'est pas continue alors que les f_n le sont.

On veut durcir la définition de convergence, notamment pour que la continuité passe à la limite. On impose une même vitesse de convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ pour tous les x .

définition. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N (ne dépendant que de ϵ) tel que pour $n \geq N$ on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ pour tout x dans I .

Par définition la convergence uniforme implique la convergence simple. Mais la réciproque est fausse.

exemple. Soit $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$. Alors (f_n) converge uniformément sur \mathbf{R} vers 0. En effet pour tout ϵ on se fixe $N \geq \frac{1}{\epsilon}$. Pour $n \geq N$ on a bien $|\frac{\sin(x)}{n}| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon$ pour tout x .

exemple. On reprend $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$ et $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(1) = 1$. Alors (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ vers f . Supposons le contraire. Prenons $\epsilon = \frac{1}{2}$. Il existerait un rang N tel que pour $n \geq N$ on ait $|x^n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x < 1$, donc en particulier $|x^N| \leq \frac{1}{2}$. Or c'est faux si x est assez proche de 1.

Voici des traductions équivalentes de la convergence uniforme.

définition bis. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I vers f s'il existe une suite numérique (a_n) qui tend vers 0 et telle que $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ pour tout x dans I et pour tout entier n .

notation. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction bornée. On note $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$. C'est la norme uniforme de f sur I .

remarque. C'est bien une norme sur l'espace des fonctions bornées sur I . En particulier elle est homogène ($\|af\|_I = |a|\|f\|_I$ si a est un réel) et vérifie l'inégalité triangulaire ($\|f+g\|_I \leq \|f\|_I + \|g\|_I$). La distance (uniforme) entre deux fonctions f, g vaut $\|f-g\|_I$.

définition ter. La suite (f_n) converge uniformément sur I vers f si $\|f_n - f\|_I \rightarrow 0$.

exemple. Soit $f_n : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

La suite (f_n) converge simplement sur \mathbf{R}^+ vers 0. En effet $f_n(0) = 0$ et si $x > 0$ $f_n(x) = nxe^{-nx} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ par croissance comparée.

Regardons la convergence uniforme sur \mathbf{R}^+ vers 0. Il faut calculer $\|f_n\|_{\mathbf{R}^+}$. Pour cela on étudie la fonction f_n . Comme $f'_n(x) = n(1-nx)e^{-nx}$ f_n croît sur $[0, \frac{1}{n}]$ et décroît sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$. Comme $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ le maximum de f_n est atteint en $\frac{1}{n}$ et vaut $\frac{1}{e}$. Donc $\|f_n\|_{\mathbf{R}^+} = \frac{1}{e}$ et (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur \mathbf{R}^+ . C'est dû à une bosse de hauteur constante qui glisse vers 0.

Par contre $\|f_n\|_{[1, +\infty[} = f_n(1) = ne^{-n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[1, +\infty[$.

Voici un critère de convergence uniforme sans connaître la limite a priori.

critère de Cauchy uniforme. La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I si et seulement si elle est uniformément de Cauchy, i.e. pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour $n, m \geq N$ on a $\|f_n - f_m\|_I \leq \epsilon$.

En effet si (f_n) converge uniformément vers f alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour $n \geq N$ on a $\|f_n - f\|_I \leq \frac{\epsilon}{2}$. Si de plus $m \geq N$ alors $\|f_n - f_m\|_I = \|(f_n - f) + (f - f_m)\|_I \leq \|f_n - f\|_I + \|f - f_m\|_I \leq \epsilon$. Donc (f_n) est uniformément de Cauchy.

Inversement si (f_n) est uniformément de Cauchy alors pour tout x dans I la suite numérique $(f_n(x))$ est de Cauchy donc converge. On note $f(x)$ sa limite. Montrons que $\|f_n - f\|_I \rightarrow 0$. Pour tout $\epsilon > 0$ on sait qu'il existe un rang N tel que pour $n, m \geq N$ on a $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ pour tout x dans I . En faisant $m \rightarrow +\infty$ on obtient $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ pour tout x dès que $n \geq N$. Donc $\|f_n - f\|_I \leq \epsilon$ dès que $n \geq N$. C'est la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f .

b) propriétés de la limite.

linéarité. Soient $f_n, g_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions et a, b des réels. On suppose que (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur I vers f et g respectivement. Alors $(af_n + bg_n)$ converge uniformément sur I vers $af + bg$.

En effet $\|(af_n + bg_n) - (af + bg)\|_I = \|a(f_n - f) + b(g_n - g)\|_I \leq |a|\|f_n - f\|_I + |b|\|g_n - g\|_I \rightarrow 0$.

continuité. Soient $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers $f : I \rightarrow \mathbf{R}$. Alors f est continue.

En effet fixons x dans I et $\epsilon > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$ tel que si $|y - x| \leq \delta$ alors $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$. Or par convergence uniforme on sait qu'il existe n assez grand tel que $\|f_n - f\|_I \leq \frac{\epsilon}{3}$. De plus f_n est continue donc il existe $\delta > 0$ tel que si $|y - x| \leq \delta$ alors $|f_n(y) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$. On estime $|f(y) - f(x)|$ quand $|y - x| \leq \delta$ en transitant par f_n . On a $|f(y) - f(x)| = |(f(y) - f_n(y)) + (f_n(y) - f_n(x)) + (f_n(x) - f(x))| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq 2\|f_n - f\|_I + |f_n(y) - f_n(x)| \leq \epsilon$.

dérivabilité. Soient $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert. On suppose que (f_n) converge simplement sur I vers f et que (f'_n) converge uniformément sur I vers g . Alors f est dérivable et $f' = g$.

Autrement dit sous ces conditions la dérivée de la limite est la limite des dérivées.

En effet fixons x dans I . Puisque I est ouvert il existe $\delta > 0$ tel que $[x - \delta, x + \delta] \subset I$. On introduit la fonction auxiliaire h sur $[-\delta, \delta]$ définie par $h(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ pour $t \neq 0$ et $h(0) = g(x)$. Dire que f est dérivable en x de dérivée $g(x)$ équivaut à dire que h est continue en 0.

De même on définit h_n sur $[-\delta, \delta]$ par $h_n(t) = \frac{f_n(x+t) - f_n(x)}{t}$ pour $t \neq 0$ et $h_n(0) = f'_n(x)$. Par hypothèse h_n est continue et la suite (h_n) converge simplement vers h . Pour conclure il suffit d'avoir la convergence uniforme de (h_n) , cela entraînera la continuité de h .

Pour cela vérifions que (h_n) est uniformément de Cauchy. Pour $t \neq 0$ on a $|h_n(t) - h_m(t)| = \left| \frac{(f_n(x+t) - f_m(x+t)) - (f_n(x) - f_m(x))}{t} \right| \leq |f'_n(y) - f'_m(y)|$ (pour un certain y entre x et $x+t$) par le théorème des accroissements finis appliqué à $f_n - f_m$. Donc $\|h_n - h_m\|_{[-\delta, \delta]} \leq \|f'_n - f'_m\|_I$ et (h_n) est bien uniformément de Cauchy car (f'_n) l'est puisque (f'_n) converge uniformément.

intégration. Soient $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues. On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f (donc f est continue). Alors $\int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Autrement dit sous ces conditions la limite des intégrales est l'intégrale de la limite.

En effet $|\int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt| = |\int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \|f_n - f\|_{[a, b]} dt = (b - a)\|f_n - f\|_{[a, b]} \rightarrow 0$.

c) séries de fonctions.

définition. Soient $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si la suite des sommes partielles $s_n = f_0 + \dots + f_n$ converge simplement sur I . La limite s de (s_n) est la somme de la série de fonctions et on écrit $s = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

De même la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si (s_n) converge uniformément sur I . Ceci entraîne la convergence simple.

exemple. $\sum x^n$ converge simplement sur $] -1, 1[$ car $s_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \rightarrow s(x) = \frac{1}{1-x}$. La convergence n'est pas uniforme car la fonction $s_n - s$ n'est même pas bornée sur $] -1, 1[$. Mais $\sum x^n$ converge uniformément sur $[-r, r]$ pour $r < 1$ car $\|s_n - s\|_{[-r, r]} = \frac{r^{n+1}}{1-r} \rightarrow 0$.

Voici un critère pratique.

définition. Soient $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions bornées. On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_I$ converge.

Une formulation équivalente est l'existence d'une série numérique $\sum a_n$ qui converge, et telle que $a_n \geq |f_n(x)|$ pour tout x dans I et tout entier n .

proposition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions normalement convergente sur I . Alors elle converge uniformément sur I .

En effet vérifions que la suite des sommes partielles (s_n) est uniformément de Cauchy. On a $\|s_n - s_m\|_I = \|f_{m+1} + \dots + f_n\|_I \leq \|f_{m+1}\|_I + \dots + \|f_n\|_I = t_n - t_m$ si t_n est la nième somme partielle de la série $\sum \|f_n\|_I$. Or (t_n) converge donc elle est de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour $n \geq m \geq N$ on a $|t_n - t_m| \leq \epsilon$ donc a fortiori $\|s_n - s_m\|_I \leq \epsilon$.

exemples.

$\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur \mathbf{R} car $\|\frac{\sin(nx)}{n^2}\|_{\mathbf{R}} = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur $[-r, r]$ pour tout $r > 0$ car $\|\frac{x^n}{n!}\|_{[-r, r]} = \frac{r^n}{n!}$ et $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge.

Il existe des séries de fonctions qui convergent uniformément mais pas normalement. Par exemple $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas normalement sur \mathbf{R}^+ ($\|\frac{(-1)^n}{x+n}\|_{\mathbf{R}^+} = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge) mais elle converge uniformément par le critère suivant (prendre $f_n(x) = (-1)^n$ et $g_n(x) = \frac{1}{x+n}$).

règle d'Abel uniforme. Soient $f_n, g_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions. On suppose les sommes partielles de $\sum f_n$ uniformément bornées et la suite (g_n) décroissante et uniformément convergente vers 0. Alors $\sum f_n g_n$ converge uniformément sur I .

En effet soit (s_n) la suite des sommes partielles de $\sum f_n$. Il existe une constante C telle que $|s_n(x)| \leq C$ pour tout x dans I et tout entier n . On va voir que la suite des sommes partielles (t_n) de $\sum f_n g_n$ est uniformément de Cauchy. On calcule $t_n - t_m = f_{m+1}g_{m+1} + \dots + f_n g_n = (s_{m+1} - s_m)g_{m+1} + \dots + (s_n - s_{n-1})g_n = -s_m g_{m+1} + s_{m+1}(g_{m+1} - g_{m+2}) + \dots + s_{n-1}(g_{n-1} - g_n) + s_n g_n$. On estime ceci en valeurs absolues en utilisant la borne C et le fait que $(g_n(x))$ est une suite positive décroissante. On a $|t_n(x) - t_m(x)| \leq Cg_{m+1}(x) + C(g_{m+1}(x) - g_{m+2}(x)) + \dots + C(g_{n-1}(x) - g_n(x)) + Cg_n(x) = 2Cg_{m+1}(x)$. Donc $\|t_n - t_m\|_I \leq 2C\|g_{m+1}\|_I$. Or par hypothèse $\|g_m\|_I \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$.

propriétés de la somme.

Elles se déduisent des résultats analogues pour les suites de fonctions quand on les applique à la suite des sommes partielles de la série de fonctions. Au niveau des hypothèses l'accent est mis sur la convergence normale (mais la convergence uniforme suffirait).

continuité. Soient $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues bornées. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I . Alors sa somme $s = \sum f_n$ est continue sur I .

dérivabilité. Soient $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions dérivables sur un intervalle I ouvert, avec f'_n bornée. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur I et que $\sum f'_n$ converge normalement sur I . Alors la somme $s = \sum f_n$ est dérivable sur I et $s' = \sum f'_n$ (on peut dériver terme à terme la série de fonctions).

intégration. Soient $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues. On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$. On note $s = \sum f_n$ sa somme (qui est continue sur $[a, b]$). Alors $\int_a^b s(t)dt = \sum (\int_a^b f_n(t)dt)$ (on peut intégrer terme à terme la série de fonctions).

exemples.

$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur tout intervalle $[-r, r]$ donc sa somme s est continue sur \mathbf{R} . De plus comme $(\frac{x^n}{n!})' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ la série des dérivées est la même que la série de fonctions. Donc s est dérivable sur \mathbf{R} et vérifie $s' = s$. Enfin $s(0) = 1$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ par unicité de la solution d'une équation différentielle à condition initiale fixée.

$\sum x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$ (donc a fortiori sur $[0, r]$) si $r < 1$ car $\|x^n\|_{[-r, r]} = r^n$ et $\sum r^n$ converge si $r < 1$. Sa somme vaut $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Donc $\int_0^r \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\int_0^r t^n dt)$. D'où la formule $-\ln(1-r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}$ pour $r < 1$.

3. séries entières.

Ce sont les séries de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$ où (a_n) est une suite numérique (généralisation des polynômes). On s'intéresse d'abord au lieu où la série entière converge.

a) rayon de convergence.

définition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Son rayon de convergence est défini par $R = \sup\{r \geq 0 \text{ tel que la suite } (|a_n| r^n) \text{ est majorée}\}$ (le sup peut être $+\infty$).

exemples.

$\sum x^n$. La suite (r^n) tend vers 0 si $r < 1$, vaut 1 si $r = 1$ et tend vers $+\infty$ si $r > 1$. Elle est majorée exactement quand $r \leq 1$ d'où $R = 1$.

$\sum \frac{x^n}{n!}$. On sait que $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge pour tout $r \geq 0$ donc la suite $(\frac{r^n}{n!})$ tend vers 0 pour tout $r \geq 0$ d'où $R = +\infty$.

$\sum n! x^n$. La suite $(n! r^n)$ tend vers $+\infty$ dès que $r > 0$ car $\frac{1}{n! r^n} = \frac{(r^{-1})^n}{n!} \rightarrow 0$ d'après ce qui précède. D'où $R = 0$.

proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors $\sum a_n x^n$ diverge si $|x| > R$ et converge absolument si $|x| < R$. De plus $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$ pour tout $r < R$.

En effet la suite $(|a_n| |x|^n)$ n'est pas majorée si $|x| > R$ donc $(a_n x^n)$ ne tend pas vers 0 et $\sum a_n x^n$ diverge. La convergence absolue sur $] -R, R[$ résulte de la convergence normale sur $[-r, r]$ pour tout $r < R$. Pour celle-ci fixons ρ tel que $r < \rho < R$. On a $\|a_n x^n\|_{[-r, r]} = |a_n| r^n = |a_n| \rho^n (\frac{r}{\rho})^n \leq C (\frac{r}{\rho})^n$ où C majore $(|a_n| \rho^n)$. Or $\sum C (\frac{r}{\rho})^n$ converge donc par comparaison $\sum \|a_n x^n\|_{[-r, r]}$ aussi.

remarques.

1) Donc $\sum |a_n| r^n$ diverge si $r > R$ et converge si $0 \leq r < R$. C'est une définition alternative du rayon de convergence.

2) On ne peut rien dire a priori sur le comportement de la série entière en $x = \pm R$. Prenons par exemple les séries entières $\sum x^n$, $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum \frac{x^n}{n^2}$. Elles ont toutes un rayon de convergence 1 (exercice pour les deux dernières). Or la première diverge en ± 1 , la deuxième diverge en 1 et converge en -1 mais pas absolument (série alternée) et la troisième converge absolument en ± 1 .

Voici des règles pratiques de calcul du rayon de convergence.

règle de Cauchy. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On suppose que $|a_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow L$ (éventuellement $+\infty$). Alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{L}$.

En effet $(|a_n| r^n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow rL$. Donc par la règle de Cauchy pour les séries numériques $\sum |a_n| r^n$ converge si $rL < 1$ et diverge si $rL > 1$ d'où $R = \frac{1}{L}$.

règle de D'Alembert. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$. On suppose que $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \rightarrow L$ (éventuellement $+\infty$). Alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{L}$.

En effet $\frac{|a_{n+1}| r^{n+1}}{|a_n| r^n} \rightarrow rL$. Donc par la règle de D'Alembert pour les séries numériques $\sum |a_n| r^n$ converge si $rL < 1$ et diverge si $rL > 1$ d'où $R = \frac{1}{L}$.

exemple. Le rayon de convergence de $\sum \frac{n^n}{n!} x^n$ est $\frac{1}{e}$. En effet $\frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = (1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ car en passant au logarithme $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 1$.

b) propriétés de la somme.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie sur $] -R, R[$.

continuité. $s(x)$ est continue sur $] -R, R[$.

En effet $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$ ($r < R$) donc sa somme est continue sur $[-r, r]$ car les monômes $a_n x^n$ sont continus. Ceci est vrai pour tout $r < R$ donc sur $] -R, R[$.

dérivabilité. $s(x)$ est dérivable sur $] -R, R[$ et $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ (on peut dériver terme à terme une série entière).

La série des dérivées $\sum n a_n x^{n-1}$ est de même rayon de convergence. En effet si $r > R$ la suite $(|a_n| r^n)$ n'est pas majorée donc $(n|a_n| r^{n-1})$ aussi. Et si $r < R$ fixons ρ tel que $r < \rho < R$. Il existe C tel que $|a_n| \rho^n \leq C$. On a $n|a_n| r^{n-1} = n|a_n| \rho^{n-1} (\frac{r}{\rho})^{n-1} \leq n \frac{C}{\rho} (\frac{r}{\rho})^{n-1} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Donc $(n|a_n| r^{n-1})$ est majorée.

Ainsi $\sum a_n x^n$ converge simplement vers $s(x)$ et la série des dérivées converge normalement sur $[-r, r]$ pour tout $r < R$. Donc $s(x)$ est dérivable sur $] -R, R[$ et $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

exemple. On sait que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $] -1, 1[$. Donc par dérivation terme à terme $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ sur $] -1, 1[$.

dérivées d'ordre supérieur. En appliquant ce qui précède à $s'(x)$ on voit que $s(x)$ a une dérivée seconde sur $] - R, R[$ et $s''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. En répétant ceci on voit que $s(x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ (possède des dérivées à tout ordre) sur $] - R, R[$ et $s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$.

relation coefficients et somme. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $s(x)$. Alors $a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}$. Autrement dit la série entière est égale à la série de Taylor de sa somme en 0.

En effet $s^{(k)}(0)$ est le terme constant de $s^{(k)}(x)$ et vaut $k!a_k$ d'après ce qui précède.

unicité. Soient $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence > 0 dont les sommes s, t sont égales au voisinage de 0. Alors $a_n = b_n$ pour tout n .

En effet on sait que $s(x) = t(x)$ donc $s^{(n)}(x) = t^{(n)}(x)$ près de 0 par dérivation successive. En particulier $s^{(n)}(0) = t^{(n)}(0)$ d'où $a_n = b_n$.

intégration. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $s(x)$. Fixons $[c, d] \subset] - R, R[$. Alors $\int_c^d s(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{n+1}$

En effet $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[c, d]$ donc on peut l'intégrer terme à terme. On a $\int_c^d s(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (\int_c^d a_n t^n dt) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{n+1}$.

En particulier $t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la primitive de $s(x)$ sur $] - R, R[$ qui s'annule en 0 puisque $t(x) = \int_0^x s(t)dt$.

c) développement en série entière.

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On veut savoir si elle est égale à la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence > 0 . Si c'est le cas on dit que f est développable en série entière près de 0.

analyse du problème. On dégage des conditions nécessaires. Il faut déjà que f soit de classe \mathcal{C}^∞ près de 0. De plus $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$. Et puisque le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est > 0 il existe $\epsilon > 0$ tel que $(|a_n| \epsilon^n)$ est majorée. Donc il existe des constantes C, D telles que $|f^{(n)}(0)| \leq Cn!D^n$ pour tout n (ici $D = \frac{1}{\epsilon}$).

Cela ne suffit pas car il existe des fonctions f de classe \mathcal{C}^∞ non nulles près de 0 mais avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n . Ce sont les fonctions plates en 0. Elles ne sont pas développables en série entière près de 0 car leur série de Taylor en 0 est identiquement nulle alors qu'elles ne le sont pas.

exemple. f définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ est plate en 0. En effet elle est de classe \mathcal{C}^∞ en dehors de 0. De plus $f'(0) = 0$ car $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ (par croissance comparée). Puis on vérifie par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ pour un certain polynôme P_n . Donc $\frac{f^{(n)}(x)}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ (toujours par croissance comparée) d'où $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Voici une condition nécessaire et suffisante.

proposition. f est développable en série entière près de 0 si et seulement si f est de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage I de 0 et il existe des constantes C, D telles que $\|f^{(n)}\|_I \leq Cn!D^n$ pour tout n .

En effet supposons l'estimée vraie. La formule de Taylor-Lagrange dit que $f(x) = s_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$. Ici $s_n(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ est la nième somme partielle de la série de Taylor de f et c est compris entre 0 et x . Donc $|f(x) - s_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(c)| \leq C(D|x|)^{n+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ si $|x| < \frac{1}{D}$. D'où $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ près de 0.

Inversement supposons f développable en série entière. Donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R[$. Soit $r < \rho < R$. On a $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$. Donc $\|f^{(k)}\|_{[-r,r]} \leq \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) |a_n| r^{n-k}$. Or $(|a_n| \rho^n)$ est majorée par A puisque $\rho < R$. Donc $\|f^{(k)}\|_{[-r,r]} \leq \frac{A}{\rho^k} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) (\frac{r}{\rho})^{n-k} = \frac{A}{\rho^k} \frac{k!}{(1-\frac{r}{\rho})^{k+1}} = \frac{\rho A}{\rho-r} k! (\frac{1}{\rho-r})^k$ qui est de la forme voulue. L'égalité résulte du fait que $\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) x^{n-k}$ est la dérivée kième de $\frac{1}{1-x}$ donc vaut $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

remarque. Soit f de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I (contenant 0). On suppose qu'il existe une constante C telle que $\|f^{(n)}\|_I \leq C$ pour tout n . Alors la même démonstration donne que f est développable en série entière sur I tout entier.

exemple. $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont développables en série entière sur \mathbf{R} car leurs dérivées successives sont $\pm \sin(x)$ ou $\pm \cos(x)$ qui sont bornées par 1. On a $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ pour tout x .

d) compléments.

résolution d'équations différentielles.

On peut résoudre certaines équations différentielles en cherchant a priori une solution sous forme de série entière. La démarche est la suivante. On rentre dans l'équation différentielle la série entière inconnue. On en déduit une relation de récurrence sur ses coefficients. On calcule les coefficients grâce à la condition initiale. On calcule le rayon de convergence ce qui justifie a posteriori la démarche.

exemple. On veut résoudre l'équation différentielle (E) $(1-x)y' = 3y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

On cherche $y(x)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On rentre $y(x)$ dans (E). On a $(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3 a_n x^n$. Le premier membre vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - n a_n) x^n$ après décalage de l'indice de la première somme. Par identification au second membre on obtient la relation de récurrence $(n+1)a_{n+1} - n a_n = 3a_n$ soit (R) $(n+1)a_{n+1} = (n+3)a_n$ pour tout n .

Or $y(0) = a_0 = 1$. Donc par (R) $a_1 = 3a_0 = 3$, $2a_2 = 4a_1$ soit $a_2 = \frac{4 \times 3}{2}$, $3a_3 = 5a_2$ soit $a_3 = \frac{5 \times 4}{2}$. Montrons que $a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ par récurrence. Si c'est vrai pour a_n on a $(n+1)a_{n+1} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2}$ par (R) d'où $a_{n+1} = \frac{(n+3)(n+2)}{2}$. Ainsi $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$ et son rayon de convergence est 1 par la règle de D'Alembert car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{n+1} \rightarrow 1$. Donc $y(x)$ est bien solution de (E) sur $] -1, 1[$.

En fait $y(x) = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)'' = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x})'' = \frac{1}{(1-x)^3}$. On aurait pu trouver ceci directement en résolvant (E) comme équation différentielle linéaire d'ordre 1.

opérations sur les séries entières.

Soient $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ deux séries entières de somme $s(x), t(x)$ et de rayon de convergence R, R' . On note $r = \min(R, R')$.

addition. $\sum (a_n + b_n) x^n$ converge sur $] -r, r[$ et sa somme vaut $s(x) + t(x)$.

produit. Soit $p_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l$. Alors $\sum p_n x^n$ converge sur $] -r, r[$ et sa somme vaut $s(x)t(x)$.

Cela provient du résultat suivant sur les séries numériques.

produit de Cauchy. Soient $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries numériques absolument convergentes de somme s, t . Soit $p_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l$. Alors $\sum p_n$ converge absolument et sa somme vaut st .

Regardons d'abord le cas $u_n, v_n \geq 0$. Notons s_n, t_n et r_n les sommes partielles de $\sum u_n, \sum v_n$ et $\sum p_n$. On a $r_n = \sum_{k+l \leq n} u_k v_l$ et $s_n t_n = \sum_{k, l \leq n} u_k v_l$. Donc $r_n \leq s_n t_n \leq r_{2n}$. Ainsi (r_n) est majorée car (s_n) et (t_n) le sont, donc (r_n) converge vers une limite r et par passage à la limite $r \leq st \leq r$ d'où l'égalité.

Pour le cas général soit $q_n = \sum_{k+l=n} |u_k| |v_l|$ et ρ_n la somme partielle de $\sum q_n$. Comme $|p_n| \leq q_n$ et $\sum q_n$ converge par ce qui précède, $\sum p_n$ converge absolument. De plus $|s_n t_n - r_n| \leq \sum_{n+1 \leq k+l \leq 2n} |u_k| |v_l| = \rho_{2n} - \rho_n \rightarrow 0$ car (ρ_n) converge.

4. intégrales à paramètre.

On veut étudier la régularité de $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ où f est une fonction de deux variables. On s'intéresse d'abord à ces fonctions.

a) fonctions de deux variables.

Soit $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de deux variables définie sur un rectangle $Q = I \times J$.

notation. Pour $u = (x, y)$ vecteur de \mathbf{R}^2 on note $\|u\| = \max(|x|, |y|)$. Elle induit la distance $d(p, q) = \|p - q\|$ sur \mathbf{R}^2 . On dit que $p_n \rightarrow p$ dans \mathbf{R}^2 si $\|p_n - p\| \rightarrow 0$.

continuité. La fonction f est continue en p si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ (dépendant de ϵ et p) tel que si $\|q - p\| \leq \delta$ alors $|f(q) - f(p)| \leq \epsilon$. Elle est continue si elle est continue en tout point de Q .

caractérisation séquentielle. f est continue en p si et seulement si pour toute suite (p_n) telle que $p_n \rightarrow p$ alors $f(p_n) \rightarrow f(p)$.

opérations. Soient $f, g : Q \rightarrow \mathbf{R}$ continues. Alors $f + g, fg$ et $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) sont continues.

composition. Soient $f : Q' \rightarrow \mathbf{R}$ et $\phi : Q \rightarrow Q'$ continues alors $f \circ \phi$ est continue sur Q . La continuité de $\phi = (u, v)$ se définit par celles de ses composantes u et v .

continuité uniforme. La fonction $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ (ne dépendant que de ϵ) tel que si $\|p - p'\| \leq \delta$ alors $|f(p) - f(p')| \leq \epsilon$.

proposition (Heine). Soit $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ continue sur un rectangle Q fermé borné. Alors f est uniformément continue.

On raisonne par l'absurde. Si f n'est pas uniformément continue il existe $\epsilon > 0$ et deux suites (p_n) et (p'_n) dans Q telles que $\|p_n - p'_n\| \rightarrow 0$ mais $|f(p_n) - f(p'_n)| \geq \epsilon$. Or par compacité de Q on peut supposer, quitte à extraire, que $p_n \rightarrow p$ dans Q . Donc $p'_n \rightarrow p$ aussi et $f(p_n) \rightarrow f(p)$ et $f(p'_n) \rightarrow f(p)$ par continuité de f en p . Ceci contredit $|f(p_n) - f(p'_n)| \geq \epsilon$.

dérivées partielles. La dérivée partielle de f par rapport à x en $p = (a, b)$ est la dérivée en a (si elle existe) de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, b)$. On la note $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$. Définition similaire pour $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$.

exemple. Soit $f(x, y) = \cos(x + y)e^{-y}$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sin(x + y)e^{-y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -(\sin(x + y) + \cos(x + y))e^{-y}$.

opérations. Soient $f, g : Q \rightarrow \mathbf{R}$ dont les dérivées partielles existent. Alors celles de $f + g, fg$ et $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) existent aussi. On a $\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$. Formules similaires pour $\frac{\partial}{\partial y}$.

remarque. Si f a des dérivées partielles en $p = (a, b)$ on a les développements limités $f(x, b) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - a) + o(x - a)$ et $f(a, y) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - b) + o(y - b)$ (ici $o(h)$ est une fonction de la forme $\epsilon(h)h$ avec $\epsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$). On voudrait plus, un développement limité autorisant des variations à la fois en x et en y .

différentiabilité. f est différentiable en p s'il existe une forme linéaire $l : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ qui approche bien f près de p au sens où $f(q) = f(p) + l(q - p) + o(\|q - p\|)$. Nécessairement $l(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)x + \frac{\partial f}{\partial y}(p)y$. C'est la différentielle de f en p notée $d_p f$. Sa matrice dans la base canonique est $(\frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p))$. On dit que f est différentiable si elle est différentiable en tout point.

remarque. L'existence des dérivées partielles ne garantit pas la différentiabilité. Soit $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $(x, y) \neq 0$ et $f(0) = 0$. On vérifie que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent partout. Si f était différentiable en 0 sa restriction à la diagonale ($y = x$) serait dérivable en 0. Or ce n'est pas le cas car $f(x, x) = \frac{|x|}{\sqrt{2}}$.

Cependant on a le résultat suivant.

proposition. Soit $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur Q . Alors f est différentiable (et sa différentielle varie de façon continue, autrement dit f est \mathcal{C}^1).

En effet soient $p = (a, b)$ et $q = (x, y)$. Par le théorème des accroissements finis il existe u entre a et x tel que $f(q) - f(a, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, y)(x - a)$. De même il existe v entre b et y tel que $f(a, y) - f(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, v)(y - b)$. Donc $f(q) - f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - b) + o(\|q - p\|)$. Ici le reste est $(\frac{\partial f}{\partial x}(u, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(p))(x - a) + (\frac{\partial f}{\partial y}(a, v) - \frac{\partial f}{\partial y}(p))(y - b)$. Par continuité les différences de dérivées partielles tendent bien vers 0 quand $q \rightarrow p$.

composition. Soient $f : Q' \rightarrow \mathbf{R}$ et $\phi : Q \rightarrow Q'$ différentiables. Alors $f \circ \phi$ est différentiable et $d_p(f \circ \phi) = d_{\phi(p)}f \circ d_p\phi$.

Ici la différentiabilité de $\phi = (u, v)$ est celle de ses composantes u et v et sa différentielle est $d_p\phi = (d_pu, d_pv)$. On a encore un développement limité $\phi(q) = \phi(p) + d_p\phi(q - p) + o(\|q - p\|)$. Montrons la formule de composition.

On a $f(\phi(q)) = f(\phi(p)) + d_{\phi(p)}f(\phi(q) - \phi(p)) + o(\|\phi(q) - \phi(p)\|) = f(\phi(p)) + d_{\phi(p)}f(d_p\phi(p)(q - p)) + d_{\phi(p)}f(o(\|q - p\|)) + o(\|\phi(q) - \phi(p)\|)$. D'où le résultat puisque les deux derniers termes sont des $o(\|q - p\|)$.

remarque.

La différentielle $d_p\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(p) & \frac{\partial u}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(p) & \frac{\partial v}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

En écrivant matriciellement la formule de composition (avec (u, v) comme coordonnées sur Q') on a que $\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x} = (\frac{\partial f}{\partial u} \circ \phi) \frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial f}{\partial v} \circ \phi) \frac{\partial v}{\partial x}$. Idem pour $\frac{\partial}{\partial y}$.

exemple. Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ différentiable et $g = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ son écriture en coordonnées polaires. Alors $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta$.

b) intégrales à paramètre.

Soit $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de deux variables sur $Q = I \times [a, b]$. On note $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ (quand cela a un sens).

continuité. On suppose f continue sur Q . Alors F est continue sur I .

En effet soit $I' \subset I$ un intervalle fermé borné et $Q' = I' \times [a, b]$. Comme f est continue sur Q' elle y est uniformément continue. En particulier pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour x, x' dans I' si $|x - x'| \leq \delta$ alors $|f(x, t) - f(x', t)| \leq \epsilon$. Donc $|F(x) - F(x')| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x', t)| dt \leq (b - a)\epsilon$ dès que $|x - x'| \leq \delta$. Autrement dit F est continue sur I' , puis sur I en faisant varier I' .

dérivabilité. On suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur Q . Alors F est dérivable sur I et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ (on peut dériver sous le signe intégrale).

En effet comme plus haut $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continue sur Q' . En particulier pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $x, x + h$ dans I' si $|h| \leq \delta$ alors $|\frac{\partial f}{\partial x}(x + h, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \epsilon$. Maintenant $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} dt$. Par le théorème des accroissements finis ceci vaut $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x + u, t) dt$ pour un certain u (dépendant de t) compris entre 0 et h . Donc $|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt| \leq \int_a^b |\frac{\partial f}{\partial x}(x + u, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| dt \leq (b - a)\epsilon$ dès que $|h| \leq \delta$. D'où la dérivabilité de F et le calcul de F' sur I' , puis sur I en faisant varier I' .

exemple. Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

Comme $\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue F est continue. $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

L'estimée $F(x) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2} \frac{\pi}{4}$ dit que $F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Comme $\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue F est dérivable et $F'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2} dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$ (par le changement de variable $tx = u$). Donc $F' + G' = 0$ où $G(x) = (\int_0^x e^{-u^2} du)^2$ et $F + G$ est constante. Or $F(0) + G(0) = \frac{\pi}{4}$ et $F(x) + G(x) \rightarrow (\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt)^2$ en $+\infty$. D'où le calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) le cas généralisé.

On veut aussi étudier la régularité d'intégrales généralisées à paramètre.

intégrales généralisées.

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ continue. Rappelons que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite (finie) l quand $x \rightarrow +\infty$ et on pose $\int_a^{+\infty} f(t)dt = l$.

remarque. Dans ce cas $\int_x^{+\infty} f(t)dt = l - F(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Dans le cas positif, comme F est croissante il suffit de la majorer pour avoir la convergence. Cela donne le principe de comparaison.

comparaison. Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}^+$ continues telles que $f \leq g$. Alors si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge aussi.

exemple. Les intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$. Elles peuvent servir d'échelle de comparaison.

Dans le cas général la méthode la plus simple est de se ramener au cas positif.

convergence absolue. Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ continue. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument si $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

proposition. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument alors elle converge.

En effet soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x |f(t)|dt$. On a $|F(x') - F(x)| = |\int_x^{x'} f(t)dt| \leq \int_x^{x'} |f(t)|dt = G(x') - G(x)$ pour $a \leq x \leq x'$. Donc si $x_n \rightarrow +\infty$ (en croissant) alors $|F(x_n) - F(x_m)| \leq G(x_n) - G(x_m)$ pour $n \geq m$. Or $(G(x_n))$ converge donc est de Cauchy d'où $(F(x_n))$ est de Cauchy donc converge. Donc F a une limite en $+\infty$ par la caractérisation séquentielle des limites.

exemple. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge absolument donc converge.

Soit maintenant $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de deux variables définie sur $Q = I \times [a, +\infty[$. On s'intéresse à la régularité de $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dt$ sur I .

continuité. On suppose f continue sur Q et dominée, i.e. il existe $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}^+$ continue telle que $|f(x, t)| \leq g(t)$ sur Q et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge. Alors F est continue sur I .

En effet soit $\epsilon > 0$. Comme $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge il existe $b > a$ assez grand tel que $\int_b^{+\infty} g(t)dt \leq \epsilon$. Maintenant $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt + \int_b^{+\infty} f(x, t)dt$ par Chasles. La première intégrale est continue en x (paragraphe b) et la seconde est petite par domination. Donc $|F(x') - F(x)| \leq |\int_a^b f(x', t)dt - \int_a^b f(x, t)dt| + 2 \int_b^{+\infty} g(t)dt \leq 3\epsilon$ si $|x' - x| \leq \delta$.

dérivabilité. On suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, est continue sur Q et est dominée. Il existe $k : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}^+$ continue telle que $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq k(t)$ sur Q et $\int_a^{+\infty} k(t)dt$ converge. Alors F est dérivable sur I et $F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

En effet soit $\epsilon > 0$. Il existe $b > a$ assez grand tel que $\int_b^{+\infty} k(t)dt \leq \epsilon$. Maintenant $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}(\int_a^b f(x+h, t)dt - \int_a^b f(x, t)dt) + \int_b^{+\infty} \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} dt$. Le premier terme est proche de $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$ (paragraphe b). Par le théorème des accroissements finis le second s'écrit $\int_b^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x+u, t)dt$ (u dépendant de t). Donc $|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt| \leq \epsilon + \int_b^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)|dt + \int_b^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x}(x+u, t)|dt \leq \epsilon + 2 \int_b^{+\infty} k(t)dt \leq 3\epsilon$ si $|h| \leq \delta$.

exemple. On veut calculer $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx)dt$.

Comme $e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx)$ est continue et dominée par $e^{-\frac{t^2}{2}}$ F est continue.

Comme $\frac{\partial}{\partial x}(e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx)) = -te^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx)$ est continue et dominée par $Ce^{-\frac{t^2}{2}}$ (par croissance comparée) F est dérivable et $F'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx)dt$.

Or $-\int_0^a te^{-\frac{t^2}{2}} \sin(tx)dt = e^{-\frac{a^2}{2}} \sin(ax) - x \int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(tx)dt$ par intégration par parties. On obtient donc $F'(x) = -xF(x)$ en faisant tendre a vers $+\infty$.

Autrement dit F est solution de l'équation différentielle $y' = -xy$ avec condition initiale $y(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (par le changement de variable $\frac{t}{\sqrt{2}} = u$). Donc $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

5. intégrales doubles.

a) définition.

On va définir l'intégrale de $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ où Q est le carré unité $[0, 1]^2$ (pour simplifier mais tout ce qui suit s'étend à un rectangle quelconque). Pour cela on discrétise f . On regarde une subdivision de Q en petits carrés et on remplace f par son sup ou son inf sur chaque petit carré. On construit ainsi des sommes de Darboux supérieure et inférieure et on espère qu'elles convergent vers la même limite quand la subdivision devient de plus en plus fine.

sommes de Darboux. Soit $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ bornée. Soit τ_n la subdivision régulière de Q en 2^{2n} petits carrés. Soit q un carré de τ_n . On pose $s(q) = \sup_q f$ et $i(q) = \inf_q f$. La somme de Darboux supérieure est la moyenne des $s(q)$, c'est donc $s_n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{q \in \tau_n} s(q)$. De même la somme de Darboux inférieure est $i_n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{q \in \tau_n} i(q)$.

Clairement $i_n \leq s_n$. De plus les subdivisions τ_n sont de plus en plus fines (on coupe chaque carré de τ_n en quatre pour obtenir les carrés de τ_{n+1}). Donc (i_n) est croissante et (s_n) est décroissante. Comme ces suites sont bornées (par les bornes de f) elles convergent.

définition. La fonction f est intégrable (au sens de Riemann) si les suites (s_n) et (i_n) ont même limite. Cette limite commune est l'intégrale de f notée $\iint_Q f dx dy$.

remarque. En choisissant un point a dans chaque carré q de τ_n on définit la somme de Riemann correspondante de f comme la moyenne des $f(a)$, c'est donc $r_n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{q \in \tau_n} f(a)$. Si f est intégrable (r_n) tend aussi vers l'intégrale puisque $i_n \leq r_n \leq s_n$.

proposition. Soit $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ continue. Alors f est intégrable.

En effet comme Q est fermé borné f est uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour z, z' dans Q si $\|z - z'\| \leq \delta$ alors $|f(z) - f(z')| \leq \epsilon$. Soit maintenant N assez grand pour que $\frac{1}{2^N} \leq \delta$. Pour toute subdivision τ_n avec $n \geq N$ les carrés q de τ_n sont de taille $\leq \delta$. Donc $\sup_q f - \inf_q f \leq \epsilon$ d'où $s_n - i_n \leq \epsilon$. Autrement dit $s_n - i_n \rightarrow 0$.

propriétés. Soient $f, g : Q \rightarrow \mathbf{R}$ continues.

linéarité. Soient λ, μ réels. Alors $\iint_Q (\lambda f + \mu g) dx dy = \lambda \iint_Q f dx dy + \mu \iint_Q g dx dy$.

croissance. Si $f \leq g$ alors $\iint_Q f dx dy \leq \iint_Q g dx dy$.

inégalité triangulaire. $|\iint_Q f dx dy| \leq \iint_Q |f| dx dy$.

On voudrait considérer aussi des fonctions possédant peu de discontinuités.

définition. Soit $D \subset Q$. Pour la subdivision τ_n on note a_n l'aire de la réunion des carrés q rencontrant D . La suite (a_n) est décroissante. On dit que D a une aire nulle (au sens de Jordan) si $a_n \rightarrow 0$.

exemple. Soit $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Alors son graphe a une aire nulle.

En effet g est uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$. Il existe n assez grand tel que si $|x - x'| \leq \frac{1}{2^n}$ alors $|g(x) - g(x')| \leq \epsilon$. Donc le graphe de $g|_{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]}$ est contenu dans la réunion d'au plus $\epsilon 2^n + 2$ carrés de τ_n . En sommant on obtient $a_n \leq 2\epsilon$.

proposition. Soit $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ bornée. On suppose f continue sur $Q \setminus D$ où D a une aire nulle. Alors f est intégrable.

En effet supposons f à valeurs dans $[m, M]$. Soit $\epsilon > 0$. Comme D est d'aire nulle il existe N assez grand tel que la réunion U des carrés de τ_N rencontrant D a une aire $\leq \epsilon$. Par hypothèse f est continue sur la réunion V des autres carrés de τ_N . Puisque V est fermé borné f y est uniformément continue. Donc il existe $n \geq N$ assez grand tel que si z, z' sont dans V avec $\|z - z'\| \leq \frac{1}{2^n}$ alors $|f(z) - f(z')| \leq \epsilon$. Soit maintenant q un carré de τ_n . S'il est dans V on a $\sup_q f - \inf_q f \leq \epsilon$. S'il est dans U on a $\sup_q f - \inf_q f \leq M - m$. Donc pour les sommes de Darboux $s_n - i_n \leq \frac{\epsilon}{2^{2n}} \text{card}\{q \mid q \subset V\} + \frac{M-m}{2^{2n}} \text{card}\{q \mid q \subset U\} \leq \epsilon + (M - m) \text{aire}(U) \leq (M - m + 1)\epsilon$. D'où $s_n - i_n \rightarrow 0$.

exemple. Soit $U \subset Q$. On note $\mathbf{1}_U$ sa fonction indicatrice qui vaut 1 sur U et 0 en dehors de U . Les discontinuités de $\mathbf{1}_U$ ont lieu sur la frontière de U notée ∂U . Si ∂U a une aire nulle alors $\iint_Q \mathbf{1}_U dx dy = \iint_U dx dy$ est bien définie. C'est l'aire de U . C'est le cas pour un domaine bordé par une courbe assez régulière (\mathcal{C}^1 par morceaux).

définition. Soit $U \subset Q$ tel que ∂U a une aire nulle. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ continue et bornée. On pose $\iint_U f dx dy = \iint_Q g dx dy$ où $g = f$ sur U et $g = 0$ en dehors de U .

En effet les discontinuités de g ont lieu dans ∂U qui a une aire nulle donc g est intégrable.

Les propriétés de linéarité, croissance et inégalité triangulaire s'étendent à ce cadre. On a de plus additivité par rapport au domaine d'intégration.

additivité. Soient $U, V \subset Q$ disjoints tels que $\partial U, \partial V$ ont une aire nulle. Soit $f : U \cup V \rightarrow \mathbf{R}$ continue bornée. Alors $\iint_{U \cup V} f dx dy = \iint_U f dx dy + \iint_V f dx dy$.

b) Fubini.

On veut calculer une intégrale double par deux intégrales simples successives.

théorème (Fubini). Soit $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ continue sur $Q = [a, b] \times [c, d]$. Alors on a $\iint_Q f dx dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx = \int_c^d (\int_a^b f(x, y) dx) dy$.

En effet prenons $Q = [0, 1]^2$ pour simplifier et regardons la première égalité. D'abord $F(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$ est une intégrale à paramètre. Elle est donc continue puisque f est continue, et on peut considérer son intégrale.

Estimons maintenant l'intégrale double par ses sommes de Darboux. Pour un carré $q = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \times [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$ on a $\frac{1}{2^{2n}} \inf_q f \leq \frac{1}{2^n} \int_{\frac{l}{2^n}}^{\frac{l+1}{2^n}} f(\frac{k}{2^n}, y) dy \leq \frac{1}{2^{2n}} \sup_q f$.

Donc en sommant sur tous les carrés on obtient $i_n \leq \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq k \leq 2^n - 1} F(\frac{k}{2^n}) \leq s_n$.

Or la somme est une somme de Riemann de F , elle tend donc vers $\int_0^1 F(x) dx$. Et i_n et s_n tendent toutes les deux vers l'intégrale double, d'où le résultat.

exemple. Calculer de deux manières $I = \iint_{[0,1]^2} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx dy$.

D'une part $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} (\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy) dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ par Fubini.

D'autre part $\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{x+y}{(1+y^2)(1+x^2)} - \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)}$ par décomposition en éléments simples (en x). Donc $I = \iint_{[0,1]^2} \frac{x+y}{(1+y^2)(1+x^2)} dx dy - I$ autrement dit $I = \iint_{[0,1]^2} \frac{x}{(1+y^2)(1+x^2)} dx dy$ (rôles symétriques de x et y). Par Fubini $I = (\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx) (\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy) = \frac{\pi \ln(2)}{8}$.

Conclusion $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi \ln(2)}{8}$.

variante. Soient $g, h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ continues avec $g \leq h$. Soit U la partie de $[a, b] \times [c, d]$ comprise entre les graphes de g et h . Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ continue. Alors $\iint_U f dx dy = \int_a^b (\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy) dx$ (énoncé similaire dans l'autre sens).

exemples.

- Calculer l'aire de $D^+ = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. On a $\iint_{D^+} dx dy = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$ (changement de variable $x = \sin(\theta)$).

- Calculer $I = \iint_T e^{x^2} dx dy$ où $T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. On a $I = \int_0^1 e^{x^2} (\int_0^x dy) dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e-1}{2}$.

c) changement de variables.

définition. Un difféomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ est une bijection entre deux ouverts, de classe \mathcal{C}^1 ainsi que son inverse (U est ouvert s'il contient un voisinage de chacun de ses points). Son jacobien $\text{jac}\phi(z)$ est $\det(d_z\phi) = \frac{\partial u}{\partial x}(z)\frac{\partial v}{\partial y}(z) - \frac{\partial u}{\partial y}(z)\frac{\partial v}{\partial x}(z)$ (u, v composantes de ϕ).

exemple. Le passage en coordonnées polaires $\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est un difféomorphisme entre $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ et $\mathbf{R}^2 \setminus L$ où L est le demi-axe des $x \leq 0$. Son jacobien est r .

théorème (changement de variables). Soit ϕ un difféomorphisme défini sur un voisinage d'un rectangle fermé borné Q . Soit $f : \phi(Q) \rightarrow \mathbf{R}$ continue. Alors on a $\iint_{\phi(Q)} f dudv = \iint_Q f \circ \phi |\text{jac}\phi| dx dy$ ((u, v) coordonnées sur $\phi(Q)$).

Prenons $Q = [0, 1]^2$ et posons $I = \iint_{\phi(Q)} f dudv$. Soit τ_n la subdivision régulière en 2^{2n} carrés q . Par additivité $I = \sum_q \iint_{\phi(q)} f dudv$. Choisissons un point a dans chaque carré q . Par continuité uniforme de $f \circ \phi$ on a $I \sim \sum_q f(\phi(a)) \text{aire}(\phi(q))$. De plus $\frac{\text{aire}(\phi(q))}{\text{aire}(q)} \sim |\text{jac}\phi|(a)$ (voir plus bas). Donc $I \sim \frac{1}{2^{2n}} \sum_q f(\phi(a)) |\text{jac}\phi|(a)$. Mais ceci est une somme de Riemann de $f \circ \phi |\text{jac}\phi|$. Elle tend vers $\iint_Q f \circ \phi |\text{jac}\phi| dx dy$.

Estimons l'aire de $\phi(q)$. Sur q on a $\phi(z) = \phi(a) + d_a\phi(z-a) + o(\|z-a\|)$. Donc après translation $\phi(q)$ est contenu dans le parallélogramme $(1 + \epsilon)d_a\phi(q)$. Or l'aire d'un parallélogramme engendré par deux vecteurs est la valeur absolue du déterminant de ces deux vecteurs. Donc $\text{aire}(\phi(q)) \leq (1 + \epsilon)^2 |\det(d_a\phi)| \text{aire}(q)$. En raisonnant avec ϕ^{-1} on voit aussi que $\phi(q)$ contient $(1 - \epsilon)d_a\phi(q)$ après translation. Donc $\text{aire}(\phi(q)) \geq (1 - \epsilon)^2 |\det(d_a\phi)| \text{aire}(q)$.

exemple. Calculer $I = \iint_{A^+} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ où $A^+ = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Par passage en coordonnées polaires $I = \iint_{[\epsilon, a] \times [0, \frac{\pi}{2}]} e^{-r^2} r dr d\theta$. Par Fubini $I = \frac{\pi}{2} \int_{\epsilon}^a r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4} (e^{-\epsilon^2} - e^{-a^2})$. Quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $a \rightarrow +\infty$ on obtient $\iint_{(\mathbf{R}_+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4}$. Or ceci est aussi limite quand $a \rightarrow +\infty$ de $\iint_{[0, a]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ qui vaut $(\int_0^a e^{-x^2} dx)^2$ par Fubini. On retrouve ainsi la valeur de l'intégrale de Gauss.

variante. Soit $K \subset \mathbf{R}^2$ fermé borné tel que ∂K a une aire nulle. Soit ϕ un difféomorphisme défini sur un voisinage de K . Soit $f : \phi(K) \rightarrow \mathbf{R}$ continue. Alors $\iint_{\phi(K)} f dudv = \iint_K f \circ \phi |\text{jac}\phi| dx dy$.

exemple. Calculer l'aire de $E = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. $E = \phi(D)$ où D est le disque unité et $\phi(x, y) = (ax, by)$ de jacobien ab . Donc $\iint_E dudv = ab \iint_D dx dy = \pi ab$.

6. séries numériques.

a) sommation par paquets.

exemple. Soit $u_n = (-1)^n$. La série $\sum u_n$ ne converge pas car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$. Mais $(u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + \dots = 0 + 0 + \dots$ converge. Posons $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum v_n$ est convergente. Donc la nature de la sommation (convergence ou divergence) $u_0 + u_1 + \dots$ dépend de l'organisation des termes en paquets. De plus, la valeurs de la somme dépend du regroupement des termes $u_0 + (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \dots = 1$. Mais si on demande que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, l'organisation en paquets ne change pas la nature de la série.

Théorème 1. *Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. On ne modifie pas la nature de la série $\sum u_n$ en regroupant les termes par paquets de $p \in \mathbb{N}$ termes, p étant un entier fixé. De plus, en cas de convergence les sommes sont égales.*

Proof. Pour présenter l'argument, prenons $p = 2$. Soient $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $V_n = v_0 + \dots + v_n$ où $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Donc, $V_n = S_{2n}$ et $S_{2n+1} = V_n + u_{2n+1}$. Si S_n converge, alors V_n converge. Réciproquement, si V_n et u_n convergent, S_{2n} et S_{2n+1} convergent et $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

□

exemple. On va étudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. La série est alternée mais $|u_n|$ ne décroît pas. En effet, si n est paire,

$$|u_n| = u_n = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1+(-1)^{n+1}} = |u_{n+1}|.$$

On ne peut pas donc appliquer le critère de convergence pour les séries alternées. Le regroupement des termes deux-à-deux paraît naturel puisque les signes alternent.

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+(-1)^{2n}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+(-1)^{2n+1}} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{-1}{2n(2n+1)}.$$

La série $\sum v_n$ converge absolument car $|v_n| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

b) utilisations de DL dans l'étude de convergence.

Pour déterminer la nature de $\sum u_n$ on peut effectuer un développement limité du terme u_n au voisinage de $+\infty$. On arrive souvent à faire apparaître des termes en $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, etc.

exemple. La série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \log n}$ converge-elle? Par algèbre,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+(-1)^n \frac{\log n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+y_n},$$

où $y_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}$. On écrit DL d'ordre 1 en 0 pour la fonction $y \mapsto \frac{1}{1+y}$,

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y(1 + \epsilon(y)), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \epsilon(y) = 0.$$

Donc, $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n^2} (1 + \epsilon(\log n/n))$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente. Observons que $\frac{\log n}{n^2} (1 + \epsilon(\log n/n)) \sim \frac{\log n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ pour n assez grand. Car $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la série $\sum (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n^2} (1 + \epsilon(\log n/n))$ converge absolument. Finalement, $\sum u_n$ converge aussi comme la somme de deux séries convergentes.

c) encadrement du reste de $\sum(-1)^n u_n$ lorsque u_n décroît vers 0.

Nous avons déjà vu que la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ avec le terme général u_n décroissant vers 0 converge et sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ est comprise pour tout $n \in \mathbb{N}$ entre les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n(-1)^k u_k$ et S_{n+1} .

Corollaire 1. *Le reste R_n d'une série alternée $\sum(-1)^n u_n$, $u_n \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, dont la valeur absolue u_n du terme général décroît vers 0 est majoré en valeur absolue par*

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

exemple. Combien de termes faut-il prendre pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ à 0,0001 près?

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente par le critère de convergence pour les séries alternées. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Par corollaire,

$$\left| S - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| = |R_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Pour $n = 10^4$, $|R_n| < 10^{-4}$. Il suffit donc de prendre 10^4 termes pour s'approcher à S moins que 0,0001.

d) application du théorème d'Abel

Les séries $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ convergent pour tout $\alpha > 0$ et $x/2\pi \notin \mathbb{Z}$. En effet,

$$\left| \sum_{k=0}^n \cos kx \right| = \left| \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) \right| = \left| \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \right) \right| \leq \frac{|e^{i(n+1)x} - 1|}{|e^{ix} - 1|} \leq \frac{|e^{i(n+1)x}| + 1}{|e^{ix} - 1|} = \frac{2}{|e^{ix} - 1|}.$$

De la même façon,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \Im \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) \right| = \left| \Im \left(\frac{e^{i(n+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} \right) \right| \leq \frac{|e^{i(n+1)x} - e^{ix}|}{|e^{ix} - 1|} \leq \frac{|e^{i(n+1)x}| + 1}{|e^{ix} - 1|} = \frac{2}{|e^{ix} - 1|}.$$

Car $\frac{1}{n^\alpha}$ décroît vers 0 pour tout $\alpha > 0$, le critère d'Abel s'applique aux $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\cos nx}{n^\alpha}$. En particulier, les séries $\sum \frac{\sin n}{n}$ et $\sum \frac{\cos n}{n}$ convergent.

Exercice 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Exercice 2. Supposons que $\sum u_n$ converge. Déterminer la nature de $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

e) les séries et intégrales généralisées.

Théorème 2. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $\int_0^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$, on dit que f' est intégrable. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.*

Proof. Notons par (s_n) la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ et par (t_n) la suite définie par la formule $t_n = \int_0^n f(x) dx$. Soient $p < N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=p}^N f(n) - \int_p^{N+1} f(x) dx = \sum_{n=p}^N \int_n^{n+1} (f(n) - f(x)) dx = \sum_{n=p}^N \int_n^{n+1} \left(\int_x^n f'(t) dt \right) dx.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{n=p}^N f(n) - \int_p^{N+1} f(x) dx \right| \leq \sum_{n=p}^N \int_n^{n+1} \left(\int_n^x |f'(t)| dt \right) dx \leq \sum_{n=p}^N \int_n^{n+1} \left(\int_n^{n+1} |f'(t)| dt \right) dx = \sum_{n=p}^N \int_n^{n+1} |f'(t)| dt = \int_p^{N+1} |f'(t)| dt.$$

Comme $\int_0^{+\infty} |f'(t)| dt$ converge, elle satisfait la propriété de Cauchy: pour tout $\epsilon > 0$ il existe p_0 tel que pour tout $p < N$,

$$\int_p^N |f'(t)| dt \leq \epsilon.$$

Ainsi, par la propriété de Cauchy, les suites (s_n) et (t_n) sont de même nature.

$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \neq 0$, alors $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge. La même est vraie pour (t_n) .

Supposons maintenant que $\alpha = 0$. $[M]$ signifie la partie entière de $M \in \mathbb{R}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe M_0 tel que pour tout $x > M_0$, $|f(x)| < \epsilon$. D'où, si $M > M_0 + 1$,

$$\left| \int_0^M f(x) dx - t_{[M]} \right| = \left| \int_{[M]}^M f(x) dx \right| \leq \int_{[M]}^{[M]+1} |f(x)| dx < \epsilon.$$

Cela montre que la suite (t_n) et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature. □

Exercice 3. Déterminer la nature de $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$.

Solution:

La fonction $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{x} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 . De plus,

$$\int_1^{+\infty} \left| \left(\frac{\sin \sqrt{x}}{x} \right)' \right| dx = \int_1^{+\infty} \left| \frac{\frac{1}{2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{3/2}} + \frac{1}{x^2} \right) dx < +\infty,$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx = -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\cos \sqrt{x})' x^{-1/2} dx = \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} (\cos \sqrt{x}) x^{-3/2} dx.$$

Le module de la dernière intégrale est majoré par

$$\int_1^{+\infty} x^{-3/2} dx = 2.$$

Par le Théorème 2, la série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ est convergente.

Exercice 4. Trouver la nature de $\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$ et $\sum \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}$.

7. série exponentielle, nombres e, π et le problème de Bâle.

a) convergence uniforme en points d'adhérence.

convergence diagonale.

Proposition 1. *Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers $f : A \mapsto \mathbb{R}$.*

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \in A$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = f(a)$.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. La fonction limite f est continue en a donc $\exists \delta > 0$ tel que $|a - x_n| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x_n)| < \epsilon$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a - x_n| < \delta$ et $\|f - f_n\|_A < \epsilon$. Alors,

$$|f(a) - f_n(x_n)| \leq |f(a) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)| \leq \epsilon + \|f - f_n\|_A \leq 2\epsilon.$$

□

extension de la convergence uniforme. Supposons que A est une partie de \mathbb{R} . On définit la fermeture \bar{A} de A comme l'ensemble de tous les points d'adhérence de A . Donc $\bar{A} \supset A$ et $\partial A := \bar{A} \setminus A$ s'appelle la frontière ou le bord de A .

Proposition 2. *Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $I \supset \bar{A}$ qui converge uniformément sur A vers $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Alors, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \bar{A} et $f \in C^0(\bar{A})$.*

Preuve. Soit $x \in \bar{A}$. La suite $(f_n(x))$ satisfait la condition de Cauchy. En effet, soit $\epsilon > 0$ et $A \ni x_k \mapsto x$. Puisque $\|f_n\|_A$ converge, il existe N tel que pour tout $n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_A < \epsilon$. Alors,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_m(x_k)| + |f_m(x_k) - f_m(x)|.$$

Par continuité de f_n et f_m en x , on trouve x_k tel que $|f_n(x) - f_n(x_k)| < \epsilon$ et $|f_m(x) - f_m(x_k)| < \epsilon$. Ainsi, pour tout $n, m \geq N$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq 2\epsilon + \|f_n - f_m\|_A < 3\epsilon.$$

La condition de Cauchy est uniforme car N ne dépend pas de x et donc,

$$\|f_n - f_m\|_{\bar{A}} \leq 3\epsilon.$$

Par la condition uniforme de Cauchy, $f \in C^0(\bar{A})$.

□

Corollaire 1. *Soit A une partie de \mathbb{R} . Si A n'est pas majoré (minoré), on inclut $+\infty$ ($-\infty$) au \bar{A} . Supposons que $f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ convergent uniformément sur A . Soit $a \in \partial A$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in C^0(A)$ et $\lim_{A \ni x \rightarrow a} f_n(x) = \alpha_n \in \mathbb{R}$ alors la suite (α_n) est convergente et*

$$\lim_{A \ni x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{A \ni x \rightarrow a} f_n(x)$$

Preuve. Si $a \in \mathbb{R}$, la condition $\lim_{x \rightarrow a^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \alpha_n \in \mathbb{R}$ permet de prolonger chaque f_n sur $A \cup \{a\}$ par continuité. La suite (f_n) converge uniformément sur $A \cup \{a\}$ par Proposition 2. Théorème 1 du cours implique que la fonction limite f est continue sur $A \cup \{a\}$, donc

$$\lim_{A \ni x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n.$$

Si $a = -\infty$, A n'est pas minoré. Soit $H : x \in]-\infty, 0[\mapsto \frac{1}{x}$. On considère $g_n(x) = f_n \circ H(x)$, $x \in B =]M, 0[\cap H^{-1}(A)$ pour un certain $M < 0$. La suite de fonctions continues (g_n) converge uniformément sur B vers $g = f \circ H$ et $\lim_{B \ni x \rightarrow 0^-} g_n(x) = \alpha_n$. On applique le cas précédent pour conclure,

$$\lim_{A \ni x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{B \ni x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n.$$

□

miscelania.

Définition 1. Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On dit que $f : J \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne de constante $K > 0$ si pour tous $x, y \in J$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Lemma 1. Soit $g : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Si $f_n : J \mapsto \mathbb{R}$ convergent uniformément sur $J \subset \mathbb{R}$, $f_n(J) \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément sur J .

Preuve. Soit $K > 0$ une constante de Lipschitz de g sur J .

$$\|g \circ f_n - g \circ f\|_J = \sup_{x \in J} |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| \leq K \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| \leq K \|f_n - f\|_J.$$

□

Proposition 3. Si $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sont tous K -lipschitzienne et convergent simplement sur $[a, b]$, alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

Preuve. La fonction limite $f = \lim f_n$ est aussi K -lipschitzienne. Soit $\epsilon > 0$. On trouve un ensemble fini $X \subset [a, b]$ avec la propriété suivante: pour tout $y \in [a, b]$, $\exists y_* \in X$ tel que $|y_* - y| < \epsilon/K$. La suite (f_n) converge uniformément vers f sur X car $\#X < +\infty$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\|f - f_n\|_X < \epsilon$. Soient $y \in [a, b]$ et $y_* \in X$. Par la propriété lipschitzienne,

$$|f(y) - f_n(y)| \leq |f(y) - f(y_*)| + |f(y_*) - f_n(y_*)| + |f_n(y_*) - f_n(y)| \leq 2\epsilon + \|f - f_n\|_X \leq 3\epsilon$$

et puisque $y \in [a, b]$ est arbitraire,

$$\|f - f_n\|_{[a, b]} \leq 3\epsilon.$$

□

continuité uniform. On dit que $f \in C^0(I)$ est uniformément continue sur I si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. On a démontré la proposition de Heine, section 4, qui dit que si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, alors f est uniformément continue.

remarque. Chaque fonction lipschitzienne est uniformément continue.

le cas complexe-exercices. Soit $r > 0$. Le disque ouvert $\mathbb{D}(0, r) \subset \mathbb{C}$ centré en 0 de rayon r est un ensemble de points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} < r$. Le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$ est $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Finalement, le cercle du centre 0 et rayon r est noté par $S(0, r) = \overline{\mathbb{D}}(0, r) \setminus \mathbb{D}(0, r)$. Une autre notation du cercle $\partial\mathbb{D}(0, r)$

Exercice 1. Montrer que tous les lemmes, corollaires, propositions précédents peuvent être généralisés dans le cas complexe en remplaçant les intervalles ouverts/fermés finis par les disques ouverts/fermés. Si dans l'hypothèse on considère plus généralement une partie A de \mathbb{R} , on la remplace par un disque ouvert. Par exemple, Corollaire 1 peut être reformulé dans la façon suivante:

Corollaire 2. *Supposons que $f_n : \mathbb{D}(0, r) \mapsto \mathbb{R}$, convergent uniformément sur $\mathbb{D}(0, r)$ et que $f_n \in C^0(\mathbb{D}(0, r))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \partial\overline{\mathbb{D}}(0, r)$. Si $\lim_{z \rightarrow a} f_n(z) = \alpha_n \in \mathbb{C}$ alors la suite (α_n) est convergente et*

$$\lim_{z \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{z \rightarrow a} f_n(z)$$

Proposition 4. [Dini] *Si $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sont tous croissantes et convergent simplement sur $[a, b]$ vers une fonction continue $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.*

Preuve. La démonstration est très similaire à celle de Proposition 3. La fonction limite est continue sur $[a, b]$, donc uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$. Choisissons $\delta > 0$ tel que si $|z - z'| \leq \delta$ alors $|f(z) - f(z')| \leq \epsilon$. Aussi, il existe un ensemble fini X tel que pour tout $y \in [a, b]$ ils existe $y_*, y^* \in X$ tels que $y_* \leq y \leq y^*$ et $y^* - y_* \leq \delta$. En particulier, $|f(y) - f(y_*)| \leq \epsilon$.

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur X car $\#X < +\infty$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\|f - f_n\|_X < \epsilon$. Soit $y \in [a, b]$. Par la continuité uniforme de f sur $[a, b]$ et le choix de N ,

$$\begin{aligned} |f(y) - f_n(y)| &\leq |f(y) - f(y_*)| + |f(y_*) - f_n(y_*)| + |f_n(y_*) - f_n(y)| \leq 2\epsilon + f_n(y) - f_n(y_*) \\ &\leq 2\epsilon + f_n(y^*) - f(y^*) + f(y^*) - f_n(y) \leq 4\epsilon. \end{aligned}$$

Comme $y \in [a, b]$ est arbitraire,

$$\|f - f_n\|_{[a, b]} \leq 4\epsilon.$$

□

b) logarithme népérien

On peut définir le logarithme népérien pour tout $x > 0$ par la formule intégrale,

$$\log x := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

La fonction $\log x$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et est donc la bijection sur son image. En effet, par le théorème fondamental de calculs

$$(\log x)' = \frac{1}{x} > 0.$$

En fait, le logarithme népérien est de classe $C^{+\infty}(\mathbb{R}_+^*)$ car $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/x$ l'est. Le logarithme est concave, $(\log x)'' < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. En particulier, le graphe du logarithme se trouve en dessous de la tangente $y = x - 1$ au point $(1, \log 1)$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\log x \leq x - 1. \tag{1}$$

propriétés du logarithme.

Lemma 2. Pour tout $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \text{et} \quad \log a^n = n \log a .$$

Proof. Observons que la dérivée de $g(x) = \log(ax) - \log a - \log x$ est égale à 0 pour tout $x \in]0, +\infty[$. Donc, $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = C$. Car $g(1) = \log 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0 \Rightarrow C = 0$. La première formule est démontrée.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on procède par récurrence: Si $n = 0$ alors $\log a^0 = \log 1 = 0$. Supposons que la formule soit vraie pour $n \geq 0$. On a $\log a^{n+1} = \log(a^n \cdot a) = \log a^n + \log a = (n+1) \log a$.

Si $n = -1$, par additivité du logarithme $\log a^{-1} + \log a = \log a^{-1}a = \log 1 = 0$. Si $n < -1$, alors $\log a^n = \log a^{-(-n)} = -\log a^{-n} = -(-n) \log a = n \log a$. \square

Lemma 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = +\infty$$

Proof. La fonction $\log : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ est strictement croissante donc il suffit de montrer qu'elle n'est pas majorée. La suite $(\log 2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ car $\log 2 > \log 1 = 0$. La première limite découle de la deuxième et la relation $\forall x > 0 \log x = -\log \frac{1}{x}$. \square

Corollaire 3. La fonction $\log : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ est une bijection.

définition du nombre e . Par Corollaire 3, il existe un unique nombre $e > 1$ tel que

$$\log e = 1. \tag{2}$$

la fonction exponentielle. On définit $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ comme la fonction réciproque de logarithme $x \mapsto \log x$.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exp(a+b) = \exp(a) \exp(b). \tag{3}$$

En effet, posons $x = \exp a$ et $y = \exp b$. Lemma 2 implique que

$$\log(xy) = \log x + \log y = a + b$$

et $xy = \exp(a+b)$. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\exp(x))^{-1} = \exp(-x) \tag{4}$$

car, par (3)

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \exp(-x)$$

Par le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque, $\exp x$ est dérivable. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\exp x)' = \frac{1}{(\log y)'_{|y=\exp x}} = y_{|y=\exp x} = \exp x .$$

Lemma 4. La fonction exponentielle $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp x$ est une unique solution du problème de Cauchy $y' = y$ aux conditions initiales $y(0) = 1$ sur \mathbb{R} .

Preuve. Supposons qu'il existe une autre fonction dérivable $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x)$ telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(f(x) \exp(-x))' = f'(x) \exp(-x) - f(x) \exp(-x) = 0$$

et $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \exp(-x) = C$. La condition initiale $1 = f(0) = C$ et (4) donnent $f(x) = \exp(x)$. \square

développement de $\exp x$ en série. Soit $v : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Newton a proposé une méthode d'approximation pour résoudre le problème de Cauchy autonome,

$$y' = v(y), y \in I; \quad y(t_0) = a, (x_0, a) \in I \times \mathbb{R}.$$

Notamment, on considère sur I des approximations successives de l'équation intégrale $y = \int_{x_0}^x v(t)dt + y_0$,

$$y_0(x) = y_0, \quad y_1(x) = \int_{x_0}^x y_0(t)dt + y_0, \quad \dots, \quad y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x y_n(t)dx + y_0, \quad \dots$$

Dans le cas de $I = \mathbb{R}$ et $v(x) = x$ avec la condition initiale $x_0 = 1, y_0 = 1$, on obtient la suite

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + x, \quad y_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad \dots, \quad y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad \dots$$

Posons $0! = 1$ et $x^0 = 1$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$.

Proposition 5. La série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur chaque intervalle $[a, b]$ vers la fonction $x \mapsto \exp(x)$.

Preuve. Soit $I = [-a, a], a > 0$. On va montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ où $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur I . Observons que

$$\|u_n\|_I = \sup_{|x| \leq a} \frac{|x|^n}{n!} = \sup_{0 \leq x \leq a} \frac{x^n}{n!} = \frac{a^n}{n!}.$$

La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ converge par le critère de d'Alembert.

Car $u_n(x)$ sont dérivable, $u'_n(x) = u_{n-1}(x)$ pour tout $n > 0$ et $u_0(x)' = 0$, la série de dérivées terme-à-terme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

converge normalement sur I . De plus, $u_n \in C^1(I)$. Par le théorème du cours (Théorème B'), la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est une fonction de classe $C^1(I)$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Donc, la fonction limite $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ satisfait l'équation différentielle $S(x)' = S(x)$ sur $\mathbb{R} = \bigcup_{a>0} [-a, a]$. On vérifie que $S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$ et on conclut par Lemme 4 que $\exp x = S(x)$ sur \mathbb{R} .

□

remarque. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ . En effet, $\|R_n\|_{\mathbb{R}_+} = \sup_{\mathbb{R}_+} \sum_{k \geq n+1} \frac{x^k}{k!} \geq \sup_{\mathbb{R}_+} \frac{x^n}{n!} = +\infty$.

Corollaire 4. Le nombre $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est irrationnel.

Preuve. Par définition, $1 = \log e \Leftrightarrow \exp(1) = e$. Supposons que $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, i.e. si $m \in \mathbb{N}^*$ divise p et q alors $m = 1$, tels que

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Posons $a := p(q-1)! - (q!) \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} a &= \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots + \\ &< \frac{1}{(q+1)} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(q+2)^n} \right) = \frac{q+2}{(q+1)^2} \leq \frac{q+2}{q+3}, \end{aligned}$$

est d'un côté un nombre entier strictement positive, $a \geq 1$, et de l'autre côté plus petit que $\frac{3}{4}$, contradiction. □

Proposition 6. Pour tout $w \in \mathbb{Q}$, $\exp(w) = e^w$.

Proof. Il suffit de montrer l'égalité pour $w > 0$ car $\exp(-w) = 1/\exp(w)$. Soit $w = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence, $\exp(p) = \exp(\sum_{k=1}^p 1) = \prod_{k=1}^p \exp(1) = e^p$. D'où,

$$(\exp(p/q))^q = \exp(q(p/q)) = \exp(p) = e^p = e^{q(p/q)} = \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^q \Leftrightarrow \exp(p/q) = e^{\frac{p}{q}}.$$

□

Corollaire 5. La fonction $x \in \mathbb{Q} \mapsto e^x$ peut être étendue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par la formule

$$e^x = \lim_{\mathbb{Q} \ni y \rightarrow x} e^y.$$

Preuve. L'ensemble \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} et $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp x$ est une fonction continue sur \mathbb{R} . On applique Proposition 6 pour conclure. □

c) le cas complexe

On considère aussi les séries complexes, $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$. On dit que la série complexe $\sum a_n$ converge vers $S \in \mathbb{C}$ si la suite de sommes partielles

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers S , c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S - S_n| = 0$.

On vérifie directement que $\sum a_n$ converge vers S ssi $\sum \operatorname{Re}(a_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(a_n)$ convergent vers $\operatorname{Re}(S)$ et $\operatorname{Im}(S)$ respectivement.

On dit que $\sum a_n$ converge absolument si $\sum |a_n|$ est convergente. Nous avons

$$\max(|\operatorname{Re}(a_n)|, |\operatorname{Im}(a_n)|) \leq |a_n| \leq |\operatorname{Re}(a_n)| + |\operatorname{Im}(a_n)|$$

et donc $\sum |a_n| < +\infty \Leftrightarrow \sum |\operatorname{Re} a_n| < +\infty$ et $\sum |\operatorname{Im} a_n| < +\infty$.

Proposition 7. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge absolument. On pose $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$. Alors, $\sum c_n$ converge absolument et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Preuve.

$$\sum_{k=0}^n |c_k| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k |a_j| \cdot |b_{k-j}| \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^n |b_k| \right)$$

d'où la convergence absolue de $\sum c_n$.

De plus,

$$\left| \sum_{k=0}^n c_k - \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_n \right) \right| \leq \sum_{k=n}^{2n} |c_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

fonction exponentielle complexe. On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

La série converge absolument car $\exp(|z|)$ est bien définie.

Lemma 5.

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

Proof. Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$ convergent absolument. Proposition 7 donne

$$\begin{aligned} \exp(a) \exp(b) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k b^{n-k}}{((n-k)!(k!))} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{((n-k)!(k!))} a^k b^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \exp(a+b). \end{aligned}$$

□

On note par $\bar{z} = a - ib$ le conjugué de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\exp(ix)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} = \exp(-ix).$$

Lemme 5 implique que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \exp(\bar{ix}) = \exp(ix) \exp(-ix) = \exp(0) = 1$$

et

$$|\exp(ix)| = 1.$$

les fonctions sin et cos. Soit $z = a + ib$. Alors,

$$\exp(z) = \exp(a) \exp(ib)$$

où $i^2 = -1$. Donc, il suffit de bien comprendre la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(ix) \in \mathbb{C}$. Définissons

$$\begin{aligned} \sin x &:= \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} \\ \cos x &:= \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}. \end{aligned}$$

On obtient facilement les développements de $\sin x$ et $\cos x$ en séries entières:

$$\sin x = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n - (-ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

On observe que $\sin x$ est une fonction impaire et $\cos x$ est paire.

De plus, la dérivée terme-à-terme donne des relations suivantes pour $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\sin x)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^{2k+1})'}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.$$

$$(\cos x)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^{2k})'}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin x.$$

remarque. On peut aussi définir $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe,

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

formule trigonométrique. Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

On obtient que $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

Lemma 6. *Il existe $x > 0$ tel que $\cos x = 0$.*

Preuve. Supposons que pour tout $x > 0$, $\cos x > 0$. Cela signifie que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sin x$ est strictement croissante. Soit $\delta > 0$. Donc pour tout $x \geq \delta > 0$, $\sin x \geq \sin \delta > 0$. Par le théorème fondamental du calcul,

$$\cos x = \cos \delta - \int_{\delta}^x \sin t dt < \cos \delta - (x - \delta) \sin \delta \leq 1 - (x - \delta) \sin \delta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Si δ est assez petit, $\cos \delta > 0$. Par TVI, il existe $x > \delta$, tel que $\cos x = 0$, contradiction. Donc, en effet on a démontré l'existence de $x > 0$ tel que $\cos x = 0$. □

Définition 2. On note $\frac{\pi}{2} = \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\}$. Autrement dit, $\frac{\pi}{2}$ est la plus petite racine positive de l'équation $\cos x = 0$.

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ est continue en 0 et $\cos 0 = 1$, donc $\frac{\pi}{2} > 0$.

Nous avons que

$$\left| \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right|^2 = \sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \implies \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

car $\sin x$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Aussi,

$$\cos 2x + \iota \sin 2x = \exp(2\iota x) = (\exp(\iota x))^2 = (\cos x + \iota \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\iota \sin x \cos x.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{et} \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

On pose $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\cos \pi = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Ensuite,

$$\exp(\iota \pi) = -1 \implies \exp(2\iota \pi) = 1$$

et donc pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z + 2\iota \pi) = \exp(z) \exp(2\iota \pi) = \exp(z).$$

Corollaire 6. *La fonction exponentielle $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp z$ est $2\pi\iota$ périodique.*

Chaque fonction périodique, continue et non-constante a une unique période $T > 0$. Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$ sont de période 2π . En effet, supposant qu'il existe $T \in]0, 2\pi[$ tel que $\cos T = \cos 0 = \cos 2\pi$. Par Théorème de Rolle, il existe $T_1 \in]0, T[$ et $T_2 \in]T, 2\pi[$ où la dérivée $(\cos x)' = -\sin x$ s'annule. Par parité de $\cos x$ et imparité de $\sin x$,

$$\begin{aligned} \exp(\iota(\pi - x)) &= -\exp(-\iota x) \iff \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi - x) = \sin x. \\ \exp(\iota(\pi + x)) &= -\exp(\iota x) \iff \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\sin x$ ne s'annule pas sur $]0, \pi[$. L'égalité $\sin(x + \pi) = -\sin x$ signifie que $\sin x$ ne s'annule sur $]\pi, 2\pi[$ non plus. Donc $T_1 = \pi = T_2$, contradiction.

Corollaire 7. *Les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$ sont de période 2π . La fonction exponentielle $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(z)$ est de période $2\pi\iota$.*

Proposition 8. *Le cercle unitaire $|z| = 1$ est de périmètre 2π .*

Proof. L'application $t \in [0, 2\pi[\mapsto \exp(it)$ est une bijection sur le cercle unitaire. La dérivée de cette application est de module 1, $|(\exp(it))'| = |\iota \exp(it)| = 1$. La longueur du cercle unitaire est donnée par

$$\int_0^{2\pi} |(\exp(it))'| dt = 2\pi.$$

□

notation. On utilise souvent la notation $e^z := \exp(z)$. On peut aussi interpréter cette formule comme une extension de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ aux nombres complexes. D'où les formules

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{\iota x} = \cos x + \iota \sin x$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad z = |z| e^{\iota \arg z}.$$

injectivité et image de l'exponentielle. La fonction exponentielle $z \mapsto \exp(z)$ est injective sur chaque bande horizontale $B_a = [a\iota, (a + 2\pi)\iota[\times \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, l'image de B_a par la fonction exponentielle est \mathbb{C}^* . En effet,

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \iff \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) \equiv \operatorname{Im}(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'image du segment $I_x = [\iota a + x, \iota(a + 2\pi) + x]$, $x \in \mathbb{R}$, est le cercle $|z| = e^x$. Donc,

$$\exp(B_a) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \exp(I_x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{z \in \mathbb{C} : |z| = e^x\} = \mathbb{C}^*.$$

logarithme complexe. La fonction exponentielle n'a pas la fonction réciproque sur \mathbb{C}^* au sens usuel. Mais, la restriction de la fonction \exp à chaque bande B_a ,

$$z \in B_a \mapsto \exp z \in \mathbb{C}^*$$

a une fonction réciproque

$$g_a : \mathbb{C}^* \mapsto B_a$$

donnée par la formule

$$g_a(z) = \ln |z| + \iota \arg z, \quad \arg z \in [a, a + 2\pi[. \quad (5)$$

En effet,

$$e^y = z = |z|e^{\iota \arg z} = e^{\ln |z| + \iota \arg z}.$$

La condition $y \in B_a$ se traduit par $\operatorname{Im}(y) \in [a, a + 2\pi[$. Mais la fonction $g_a : \mathbb{C}^* \mapsto B_a$ n'est pas continue! Toute la demi-droite $\arg z = a$ est locus de discontinuité de g_a . Pour avoir la réciproque continue nous devons considérer g_a seulement sur $\mathbb{C}^* \setminus \{z \in \mathbb{C} : \arg z = a\}$. En résumé, l'exponentielle sur l'intérieur $\overset{\circ}{B}_a$ de B_a a une fonction réciproque continue g_a donnée sur l'ensemble $\mathbb{C}^* \setminus \{z \in \mathbb{C} : \arg z = a\}$ par la formule (5). On appelle g_a une branche de \ln .

Par abus de la notation, on remplace g_a par $\ln z$ avec la précision nécessaire que $\ln z$ est définie sur $\mathbb{C}^* \setminus \{z \in \mathbb{C} : \arg z = a\}$. La formule

$$\ln z = \ln |z| + \iota \arg z,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, ne définit pas une fonction (c'est une multi-fonction)!

la branche principale. On note par $\log z$ la fonction

$$z \in \mathbb{C}^* \setminus]-\infty, 0] \mapsto \ln z.$$

Exercice 2. L'équation $\cos z = \frac{5}{3}$ a-t-elle des solutions?

solution: Soit $z = a + \iota b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} 2 \cos z &= e^{\iota z} + e^{-\iota z} = e^{-b}(\cos a + \iota \sin a) + e^b(\cos a - \iota \sin a) = \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (e^{-b} + e^b) \cos a = \frac{10}{3} \\ (e^{-b} - e^b) \sin a = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cosh b = (e^{-b} + e^b) = \frac{10}{3} \\ a = 0 \pmod{\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

Par exemple, $z = \iota \ln 3$ est une solution de $\cos z = 2$. Le nombre des solutions n'est pas fini.

inégalités élémentaires. On a besoin quelques estimations.

Lemma 7. Pour tout $|z| \leq 1$,

$$\frac{(n+1)^2}{(n+2)!(n+2)} |z|^{n+1} \leq \left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} |z|^{n+1}.$$

Preuve. On a que,

$$\begin{aligned} \left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{(n+2)^k} = \frac{(n+2)|z|^{n+1}}{(n+1)!(n+2-|z|)} \\ &\leq \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} |z|^{n+1}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| &= \left| e^z - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{z^k}{k!} + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| \geq \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| - \left| e^z - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{z^k}{k!} \right| \\ &\geq |z|^{n+1} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+3}{(n+2)(n+2)!} \right) \geq |z|^{n+1} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!(n+2)}. \end{aligned}$$

□

Lemma 8. Soit $\rho < 1$. Il existe $C > 0$ telle que pour tout $|z| \leq \rho$,

$$|\log(1+z)| \leq C|z|.$$

Preuve. Par l'inégalité triangulaire et la croissance de la fonction logarithme réelle,

$$|\log(1+z)| \leq |\log|1+z|| + |\arg(1+z)| \leq \max(\log(1+|z|), \log(1-|z|)) + \arcsin|z|. \quad (6)$$

Considérons la fonction réelle $\phi : [-\rho, \rho] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\phi(0) = 1$ et pour tout $x \neq 0$, $\phi(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$. Car ϕ est continue sur $[-\rho, \rho]$, il existe $C' \in \mathbb{R}$ telle que $\sup_{|x| \leq \rho} |\phi(x)| = C'$. D'où, $\forall |x| \leq \rho$,

$$|\log(1+x)| \leq C'|x|.$$

Nous avons $\arcsin|x| \leq C''|x|$ pour tout $|x| \leq \rho$. Par (6),

$$|\log(1+z)| \leq (C' + C'')|z|.$$

□

Lemma 9. Soit $\rho < 1$. Il existe $c > 0$ telle que pour tout $|z| \leq \rho$,

$$|\log(1+z) - z| \leq c|z|^2.$$

Proof. Soit $y = \log(1+z) - z$. Par Lemme 7 pour $n = 1$,

$$|e^y - 1 - y| \leq \frac{3}{4}|y|^2 \implies |z - \log(1+z)| \leq \frac{3C^2}{4} |z|^2$$

On pose $c = \frac{3C^2}{4}$.

□

Lemma 10. Soit $a > 0$. La fonction $z \in \mathbb{D}(0, a) \mapsto \exp z$ est lipschitzienne.

Proof. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{D}(0, a)$. Par Lemme 7 pour $n = 0$,

$$|e^{z_1} - e^{z_2}| = |e^{z_1}| |e^{z_2 - z_1} - 1| \leq 2e^{\operatorname{Re}(z_1)} |z_2 - z_1| \leq 2e^a |z_2 - z_1|.$$

□

d) produit infini

suite de fonctions $(1 + \frac{x}{n})^n$.

Proposition 9. La suite $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de polynômes converge uniformément sur tout intervalle $[-a, a]$, $a > 0$ vers la fonction exponentielle $x \mapsto \exp x$.

Preuve. Considérons $v_n(x) = n \log(1 + \frac{x}{n})$ qui sont bien définies pour tout $n > 1/a$. Par DL₂(0) pour des fonctions v_n et v_{n+1} ,

$$|v_{n+1}(x) - v_n(x)| = \left| \left(\frac{x^2}{2n} - \frac{x^2}{2(n+1)} \right) + o(x^2/n^2) \right| = \frac{x^2}{2n(n+1)} + o(x^2/n^2)$$

Cela montre que la série télescopique $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_n - v_{n+1})$ converge normalement sur $[-a, a]$ et ainsi (v_n) converge uniformément sur $[-a, a]$ vers $v(x) = x$. La fonction exponentielle $x \mapsto \exp x$ est lipschitzienne sur $[-a, a]$ donc $(\exp v_n)$ converge uniformément vers $\exp x$ sur $[-a, a]$. □

le cas complexe.

Proposition 10. La suite $f_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ de polynômes converge uniformément sur tout $\mathbb{D}(0, r)$, $r > 0$, vers la fonction exponentielle $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp z$.

Proof. Les fonctions $v_n(z) = n \log(1 + \frac{z}{n})$ sont bien définies pour tout $n > 1/(2r)$. Par Lemma 9, $|v_n(z) - z| \leq \frac{C|z|^2}{n^2}$. D'où,

$$|v_{n+1}(z) - v_n(z)| = |(v_n(z) - z) - (v_{n+1}(z) - z)| \leq \frac{2Cr^2}{n^2}.$$

Cela montre que la série télescopique $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_n(z) - v_{n+1}(z))$ converge normalement sur $\mathbb{D}(0, r)$ et ainsi (v_n) converge uniformément sur $\mathbb{D}(0, r)$ vers $v(z) = z$. La fonction exponentielle $x \mapsto \exp x$ est lipschitzienne sur $\mathbb{D}(0, r)$ donc $(\exp v_n)$ converge uniformément vers $\exp z$ sur $\mathbb{D}(0, r)$. □

remarque. On peut se passer du logarithme dans la démonstration grâce à l'astuce suivante pour $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall z \in \mathbb{D}(0, r)$,

$$\begin{aligned} |e^{nz} - (1+z)^n| &= |(e^z)^n - (1+z)^n| = |e^z - (1+z)| \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{kz} (1+z)^{n-1-k} \right| \\ &\leq \frac{3}{4} |z|^2 \sum_{k=0}^{n-1} |e^{kz}| (1+|z|)^{n-1-k} \leq \frac{3}{4} |z|^2 n e^{n|z|} (1+|z|)^n \end{aligned}$$

Mettons $z := \frac{z}{n}$ dans la majoration,

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \frac{3}{4} \frac{|z|^2}{n} e \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leq \frac{3}{4} \frac{r^2}{n} e \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \leq \frac{3}{4} \frac{r^2}{n} e^{r+1}$$

car la suite $(1 + \frac{r}{n})^n$ est croissante vers e^r .

argument d'Euler. L'objectif est de montrer la formule:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(\pi n)^2}\right).$$

Euler a traité

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

comme un polynôme infini avec les racines $\dots - n\pi, \dots, 0, \dots, n\pi, \dots$

Tout polynôme fini $W(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$, avec les racines α_i non-nulles, s'écrit

$$W(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) = a_0 \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right),$$

donc nous avons la première relation de Viète

$$a_0 = a_n(-1)^n \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n.$$

Une autre relation de Viète donne,

$$a_0 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}\right) = -a_1.$$

Pour Euler

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (z^2)^k}{(2k+1)!}$$

est un polynôme infini en z^2 sans racines nulles. On pose $y = z^2$ et définit

$$E(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^k}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{6}y + \frac{1}{120}y^2 + \dots$$

Par Viète,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\pi n)^2} = \frac{1}{6}$$

car $a_0 = 1$.

démonstration de l'argument d'Euler.

Théorème 1. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le polynôme W_n défini par

$$W_n(z) = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{\iota z}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{\iota z}{2n+1}\right)^{2n+1} \right)$$

La suite de polynômes $W_n(z)$ converge uniformément vers $\sin z$ sur chaque disk $\mathbb{D}(0, r)$. De plus, il est facile de trouver toutes les racines de W_n . En effet,

$$W_n(z) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\iota z}{2n+1}\right) = \xi \left(1 - \frac{\iota z}{2n+1}\right)$$

où ξ est une racine d'unité d'ordre $2n + 1$, i.e. $\xi = \exp\left(\frac{2k\ell\pi}{2n+1}\right)$, $k \in \mathbb{N} \cap [-n, n]$. Donc,

$$z_k = (2n + 1)\iota \frac{1 - \xi}{\xi + 1} = (2n + 1)\iota \frac{\xi^{-1/2} - \xi^{1/2}}{\xi^{1/2} + \xi^{-1/2}} = (2n + 1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n + 1}\right).$$

Ainsi,

$$W_n(z) = Cz \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n + 1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right), \quad (7)$$

où

$$C = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{W_n(z)}{z} = W_n'(0) = 1.$$

La formule (7) montre que $\frac{W_n(z)}{z}$ dépend seulement de la variable $y = z^2$. On pose

$$E_n(y) = \frac{W_n(z)}{z}$$

qui est un polynôme de degré n . Calculons les coefficients de E_n ,

$$\begin{aligned} \frac{W_n(z)}{z} &= \frac{1}{2\iota z} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \frac{\iota^k z^k}{(2n+1)^k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \frac{(-1)^k \iota^k z^k}{(2n+1)^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(y) &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \frac{(-1)^k y^k}{(2n+1)^{2k+1}} = 1 - \binom{2n+1}{3} \frac{y}{(2n+1)^3} + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{6} \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2} y + \dots \end{aligned}$$

Par la formule de Viète,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{6} \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}. \quad (8)$$

On définit une suite de fonctions $e_k(x) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ par la formule,

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2x+1}\right)} & \text{si } x \in [k, +\infty[\\ (x-k+1)e_k(k) & \text{si } x \in]k-1, k[\\ 0 & \text{si } x \in [0, k-1] \end{cases}$$

Toute la fonction $e_k : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ est continue sur \mathbb{R}_+ . L'équation (8) s'écrit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e_k(n) = \frac{1}{6} \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}.$$

Comme $\tan x \geq x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\|e_k\|_{\mathbb{R}_+} = \left(\inf_{x \geq k} (2x+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2x+1}\right) \right)^{-1} \leq \frac{1}{(k\pi)^2}$$

et donc la série $\sum e_k(x)$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ . Calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e_k(x) = \frac{1}{(k\pi)^2}.$$

Par Corollary 1,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^2}.$$

De l'autre coté,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e_k(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2} = \frac{1}{6}.$$

□

produit infini d'Euler.

Théorème 2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right).$$

Proof. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons défini les polynômes W_n

$$\begin{aligned} W_n(z) &= \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2n+1)^{2k+1}}. \end{aligned}$$

On a aussi trouvé une autre représentation de $W_n(z)$,

$$W_n(z) = z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right),$$

La suite de polynômes $W_n(z)$ converge uniformément vers $\sin z$ sur chaque disk $\mathbb{D}(0, r)$. On préfère travailler avec les polynômes $V_n(z) = \frac{W_n(z)}{z}$ qui tendent simplement vers la fonction

$$V(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que la suite de fonctions (V_n) tend uniformément vers V sur chaque disque $\mathbb{D}(0, r)$.

Fixons $z \neq 0$ et considérons les fonctions $v_k : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{C}$ définies par

$$v_k(n) = \begin{cases} \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right)}\right) & \text{si } n \geq k \\ V_n(z) & \text{si } n < k \end{cases}$$

On va montrer que Les fonctions v_k sont uniformément bornées,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|v_k\|_{\mathbb{N}^*} \leq M.$$

Pour tout $n, j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right) \geq (j\pi)^2$$

et $\forall x > -1$, $\log(1+x) \leq x$. Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |v_k(n)| &\leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{|z|^2}{(j\pi)^2}\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^k \log\left(1 + \frac{|z|^2}{(j\pi)^2}\right)\right) \leq \exp\left(\sum_{j=1}^k \frac{|z|^2}{(j\pi)^2}\right) \\ &\leq \exp\left(|z|^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}\right) \leq \exp(2|z|^2) =: M. \end{aligned}$$

Pour montrer que la suite de fonctions (v_k) converge uniformément on va établir la convergence normale de la série télescopique $\sum_{k \geq 1} (v_k - v_{k-1})$ sur \mathbb{N}^* .

En effet, si $n \leq k$ alors

$$|v_k(n) - v_{k-1}(n)| = 0.$$

Pour $n > k$,

$$\begin{aligned} \|v_k - v_{k-1}\|_{n>k} &= \sup_{n>k} \frac{|z|^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \|v_{k-1}\|_{\mathbb{N}^*} \\ &\leq \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2} \|v_{k-1}\|_{\mathbb{N}^*} \leq \frac{M|z|^2}{k^2}, \end{aligned}$$

et $\sum_{k=2}^{+\infty} \|v_k - v_{k-1}\|_{\mathbb{N}^*} < +\infty$. On applique Corollary 1 pour $A = \mathbb{N}^*$, (v_k) et $a = +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_k(n) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{z^2}{(j\pi)^2}\right) = \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(j\pi)^2}\right) \end{aligned}$$

□

7. méthode de Feynman.

Si $I = [a, b]$ ou $a, b \in \mathbb{R}$, et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ bornée, on pose $\int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. Dans Théorème 1, I n'est pas nécessairement borné ou fermé. Une fonction bornée $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est Riemann intégrable ou simplement intégrable si l'intégrale $\int_I |f(t)|dt$ existe et est finie.

Théorème 1 (Version générale). *Soit I, J deux intervalles de \mathbb{R} . Supposons que $f : I \times J \mapsto \mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes:*

1. **[existence]** $t \in J \mapsto f(x, t)$ est continue sauf pour peut-être un nombre fini de points et $\int |f(x, t)|dt < +\infty$ pour tout $x \in I$. La fonction $F(x) = \int_J f(x, t)dt : I \mapsto \mathbb{R}$ est donc bien définie.
2. **[dérivabilité]** Pour tout $t \in J$ sauf pour peut-être un nombre fini de points, la dérivée $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ existe et est continue en t pour tout $x \in I$,
3. **[domination]** Il existe une fonction intégrable $\Theta : J \mapsto \mathbb{R}$ qui domine uniformément $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| \leq \Theta(t)$ pour tout $x \in I$ et $t \in J$.

Alors F est une fonction de classe C^1 et pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_J f(x, t)dt = \int_J \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt.$$

exemple 1.

Calculer l'intégrale

$$I_1 := \int_0^1 \frac{t^2 - 1}{\ln t} dt.$$

L'idée est d'introduire un paramètre x à la place de 2. Cela permet d'appliquer Théorème 1 à une fonction $f(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln t}$ à deux variables $(x, t) \in [0, 2] \times (0, 1)$. On va vérifier les hypothèses de Théorème 1.

existence. $t \in]0, 1[\mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est continue pour tout $x \in [0, 2]$. Soit $x > 0$. La fonction $f(x, t)$ n'est pas définie pour $t = 0$ et $t = 1$.

Puisque, $t^x = 1 + x \ln t + o(x \ln t)$ pour t proche de 1 et $\ln t \rightarrow -\infty$ lorsque t tend vers 0, $\lim_{t \rightarrow 1} f(x, t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = 0$. On prolonge $f(x, t)$ par continuité sur $[0, 1]$ en posant $f(x, 0) = 0$ et $f(x, 1) = 1$. Pour $x = 0$, $f(0, t) = 0$ pour tout $t \in]0, 1[$. On met $f(0, 0) = 0$ et $f(0, 1) = 0$. Observons que la fonction de deux variable $f(x, t)$ n'est pas continue sur le rectangle fermé $[0, 2] \times [0, 1]$ car $f(x, t)$ n'est pas continue au point $(0, 1)$. Par contre, $f(x, t)$ est continue sur $]0, 2[\times [0, 1]$. Dans tous les cas, $t \in]0, 1[\mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est intégrable pour tout $x \in [0, 2]$ et donc $F(x) = \int_0^1 f(x, t)dt$ est bien définie sur $[0, 2]$.

dérivabilité. Calculons

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{t^x - 1}{\ln t} = \frac{1}{\ln t} \frac{\partial}{\partial x} t^x = \frac{1}{\ln t} \frac{\partial}{\partial x} e^{x \ln t} = \frac{1}{\ln t} (t^x \ln t) = t^x.$$

La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ est bien définie et continue pour tout $(x, t) \in [0, 2] \times [0, 1] \setminus \{(0, 0)\}$. Posons $\Theta(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$.

domination. Clairement,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{t^x - 1}{\ln t} \right| = t^x \leq 1 = \Theta(t)$$

et $\int_0^1 \Theta(t) dt = 1$.

Toutes les hypothèses du Théorème 1 sont satisfaites. D'où

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{t^x - 1}{\ln t} dt = \int_0^1 t^x dt = \frac{t^{x+1}}{x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{x+1}$$

et par intégration

$$F(2) - F(0) = \int_0^2 F'(x) dx = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Puisque, $F(0) = 0$, on obtient $F(2) = I_1 = \ln 3$.

exemple 2.

Calculer l'intégrale

$$I_2 := \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt.$$

L'idée est d'introduire un paramètre x en utilisant le facteur e^{-tx} , pour tout $x > 0$. On pose $f(x, t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$ et

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

Observons que pour $x = 0$, l'intégrale $\int_0^\infty |f(0, t)| dt = \infty$ mais pour tout $x > 0$ $|f(x, t)| e^{-xt}$ est intégrable car $|\sin t| \leq |t|$.

On fixe $a > 0$ et on considère $x \geq a$. Puisque $|\sin t| \leq 1$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| = |\sin t e^{-tx}| \leq e^{-ta} := \Theta(t),$$

et $\int_0^\infty \Theta(t) dt < \infty$. D'où

$$F'(x) = \int_0^\infty (\sin t) e^{-tx} dt = \frac{e^{-tx}(\cos t + x \sin t)}{1 + x^2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Nous avons que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. Alors,

$$-F(a) = F(\infty) - F(a) = -\int_a^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = -\arctan x \Big|_a^\infty = -\frac{\pi}{2} + \arctan a. \quad (1)$$

On va montrer que $\lim_{a \rightarrow 0} F(a) = 0$. Puisque $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ converge, $N(y) = \int_y^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ tend vers 0 lorsque $y \rightarrow \infty$. Pour tout $M, a > 0$

$$\begin{aligned} \int_M^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-at} dt &= \int_M^\infty (-\cos t)' \frac{e^{-at}}{t} dt = -\cos t \frac{e^{-at}}{t} \Big|_M^\infty + \int_M^\infty \cos t \frac{-ae^{-at}t - e^{-at}}{t^2} dt \\ &= \cos M \frac{e^{-aM}}{M} + \int_M^\infty \cos t \frac{(e^{-at})'}{t} dt - \int_M^\infty \cos t \frac{e^{-at}}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $t > 0$, $|\cos M| \leq 1$ et $e^{-at} \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \int_M^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-at} dt \right| &\leq \frac{1}{M} + \int_M^\infty \frac{(e^{-at})'}{t} dt + \int_M^\infty \frac{dt}{t^2} \\ &\leq \frac{2}{M} + \frac{1}{M} \int_M^\infty (e^{-at})' dt \\ &\leq \frac{3}{M}. \end{aligned} \quad (2)$$

On pose $M = 1/\sqrt{a}$ dans (2). Par TAF,

$$\begin{aligned}
|F(a) - F(0)| &\leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} |f(a, t) - f(0, t)| dt + \left| \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty} f(a, t) - f(0, t) dt \right| \\
&\leq a \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \sup_{x \in [0, a]} \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| dt + \left| \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty} f(a, t) dt \right| + \left| \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty} f(0, t) dt \right| \\
&\leq a \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \sup_{x \in [0, a]} |(\sin t) e^{-tx}| dt + 3\sqrt{a} + N(1/\sqrt{a}) \\
&\leq 4\sqrt{a} + N(1/\sqrt{a})
\end{aligned}$$

qui montre que $F(a) \rightarrow F(0)$. L'inégalité (1) donne $F(0) = I_2 = \frac{\pi}{2}$.

exemple 3.

Calculer l'intégrale

$$I_3 := \int_0^{\pi/2} \frac{t dt}{\tan t}.$$

En intégrant par partie,

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{t \cos t}{\sin t} dt = \int_0^{\pi/2} t (\ln \sin t)' dt = t \ln \sin t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt = - \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt$$

on obtient une intégrale "classique" qu'on calcule en première année d'analyse complexe par le théorème des résidus. La question d'introduction d'un paramètre à l'intégrale I_3 n'est pas si triviale. On propose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x \tan t) dt}{\tan t},$$

$I_3 = F(1)$. L'intégrale I_3 est impropre en 0. Contrairement à l'exemple 2, $f(x, t)$ est positive pour tout $x \in [0, 1]$. De plus, $f(0, t) = 0$. On calcule l'équivalente de $f(x, t)$ en 0,

$$f(x, t) \sim xt/t = x,$$

donc $f(x, t)$ se prolonge par continuité en $(x, 0)$ par $f(x, 0) = x$. On pose $f(x, \pi/2) = 0$. Alors, $f(x, t)$ est positive et continue sur $[0, 1] \times [0, \pi/2]$, donc pour tout $x \in [0, 1]$, $\int_0^{\pi/2} |f(x, t)| dt < +\infty$.

Calculons

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = \frac{\tan t}{1 + (x \tan t)^2} \frac{1}{\tan t} = \frac{1}{1 + (x \tan t)^2}.$$

Alors,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| \leq 1 := \Theta(t)$$

et $\int_0^{\pi/2} \Theta(t) dt = \pi/2$. On applique Théorème 1,

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (x \tan t)^2},$$

et on change de variable, $s = x \tan t$, $ds = x(1 + (\tan t)^2) dt = \frac{x^2 + s^2}{x} dt$,

$$F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{x ds}{(x^2 + s^2)(1 + s^2)} = \frac{x}{1 - x^2} \left(\int_0^{\infty} \frac{ds}{x^2 + s^2} - \int_0^{\infty} \frac{ds}{1 + s^2} \right) = \frac{x}{1 - x^2} \left(\frac{\pi}{2x} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + x}.$$

D'où

$$I_3 = F(1) - F(0) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1 + x} = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Les réponses aux questions doivent être précisément justifiées. Les documents et calculatrices sont interdits, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Barème indicatif: 22pts + Bonus 3pts

Durée 2 heures

Exercice 1. [Vrai ou Faux] (4pts)

Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second cas.

1. Si $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{u_n}$ est nécessairement divergente?
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ est nécessairement convergente?
3. La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec le terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$, est-elle convergente, absolument convergente?
Indication: Pour étudier la convergence, soit utiliser la méthode DL, soit étudier la convergence de $\sum_{n \geq 2} \left(u_n - \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

Exercice 2. [Séries numériques] (5pts)

1. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ de terme général ($n \geq 1$):

$$(a) u_n = \frac{(1 + \sqrt[n]{n})^n}{3^n} \quad (b) u_n = e^{-((\ln n)^2)} \quad (c) u_n = \frac{(-1)^n (1 + \sin \frac{1}{n})}{n + 2}$$

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)$ est convergente. En utilisant une représentation télescopique du terme général $\ln \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right) = v_{n-1} - v_n$, où (v_n) est une suite que l'on déterminera, calculer sa somme.

Exercice 3. [Suites de fonctions] (6pts)

On considère la suite de fonctions linéaires par morceaux $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{-3}(x - n^2) & \text{si } x \in [n^2, 2n^2] \\ n^{-3}(3n^2 - x) & \text{si } x \in [2n^2, 3n^2] \\ 0 & \text{si } \mathbb{R}_+ \setminus [n^2, 3n^2] \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f_n(x)$ pour $n = 1$ et $n = 2$.
2. Montrer que f_n est continue sur \mathbb{R}_+ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction qu'on précisera.
4. Calculer $\|f_n\|_{\mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)|$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R}_+ ?
5. Avons-nous l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$?

Exercice 4. [Séries de fonctions] (7pts)

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par $f_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

On admet que $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Rappel:* la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ est strictement croissante et positive.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ de la dérivée terme-à-terme de f converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$f'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$

5. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
6. Montrer que si $x \in]0, \frac{1}{n}[$ alors

$$|f'(x)| \geq \sum_{k=1}^n \frac{e^{-kx}}{k} \geq e^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

7. En utilisant le théorème d'accroissements finis, montrer que f n'est pas dérivable en 0.
8. La série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

Exercice 5 (Bonus). (3pts)

On reprend Exercice 4. Trouver l'équivalent de $f'(x) = - \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ en 0^+ .

Indication: Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sim_{0^+} \frac{1}{x}.$$

Les réponses aux questions doivent être précisément justifiées. Les documents et calculatrices sont interdits, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Barème indicatif: **20+3=4+8+8+3.**

Durée 2 heures

Exercice 1. [Questions de cours] (4 pts)

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.
- Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} u_n$ est-elle nécessairement convergente?
- Calculer les deux dérivées partielles de $f(x, y) = \sin(1 - x^2 + y^2)$.
- La fonction $f(x, t) = \frac{x(x-t^2)+t^2}{x^2+t^2}$ si $(x, t) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 1$, est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 2. [Calcul d'Euler] (8 pts)

Introduction: Euler dans ses efforts pour résoudre le problème de Basel a voulu "accélérer" la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Son objectif a été d'identifier sa valeur numérique.

Considérons la série entière $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

- Justifier que $S(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $] - 1, 1[$.
- Montrer que pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

En déduire que $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

- Montrer que $S(x)$ est continue sur $[0, 1]$.
- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par

$$g(x) = \ln(x) \ln(1-x) + S(1-x) + S(x).$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = S(1)$.

- En calculant la dérivée de g pour tout $x \in]0, 1[$, montrer que g est une fonction constante égale à $S(1)$ pour tout $x \in]0, 1[$.
- En calculant $g(\frac{1}{2})$ montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}.$$

Exercice 3. [Intégrale à paramètre] (8pts)

On considère la fonction $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{(t+1)x}}{1+t} \ln(t+1) dt$. On s'intéresse à la valeur $F(x)$ proche de 0 et à l'étude de la fonction F .

1. Montrer que F est bien définie et continue sur \mathbb{R} . Montrer que F est positive et calculer $F(0)$. *Indication: on peut faire le changement de variable $s = \ln(1+t)$.*
2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale à paramètre (formuler précisément le théorème du cours qu'on utilisera). En déduire que F est croissante sur \mathbb{R} .
3. L'approximation du premier ordre de $F(x)$ en 0 est: $F(0) + xF'(0)$. L'expliciter.
4. En intégrant par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x F'(x) = e^{2x} \ln 2 - \int_0^1 \frac{e^{(t+1)x}}{t+1} dt$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{(t+1)x}}{t+1} dt \leq \frac{e^{2x} - e^x}{x}$.
6. En déduire, un encadrement de $x F'(x)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x} F'(x)$.

Partie Bonus (3pts)

7. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} F(x)$.
8. Montrer que $F(x)$ est équivalent à $\ln 2 \int_1^x \frac{e^{2s}}{s} ds$ en $+\infty$.