Université Paris-Saclay, Faculté des Sciences d'Orsay, M1 MFL

TD2 MMC Fluides/Mécanique des Fluides
Théorèmes de transport et équations bilan

1 Ressaut hydraulique dans un canal

On considère un écoulement stationnaire incompressible dans un canal ouvert de largeur L suivant y et de pente négligeable (fond perpendiculaire Ã z). On s'intéresse à la formation d'un ressaut (changement brutal de la profondeur de H_1 en amont, à H_2 en aval ; ce changement s'effectue sur une distance suivant x comparable à la profondeur, avec $H_1 < H_2$). Pour simplifier l'analyse, on considérera l'écoulement bidimensionnel (2C2D) dans le plan (x,z) en supposant qu'en amont et en aval du ressaut les vitesses d'écoulement $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont horizontales (suivant x) et uniformes suivant la hauteur et que le profil de pression est hydrostatique. La géométrie de l'écoulement est représentée sur la Figure 1. On choisira un volume de contrôle approprié pour effectuer les bilans des différentes grandeurs.

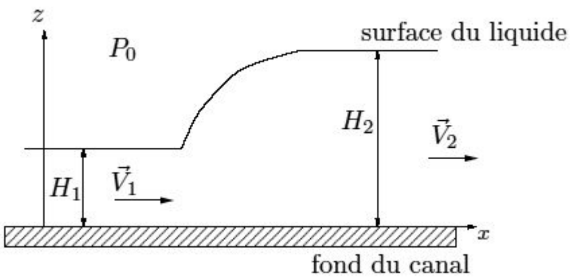

Figure 1: Schéma du ressaut hydraulique

1. Exprimer la pression $P(z)$ en amont et en aval du ressaut en fonction de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur z considérée et de la pression atmosphérique P_0.
2. *Equation de conservation de la masse.* En écrivant la conservation de la masse globale sur le volume de contrôle, en déduire la relation liant V_1, H_1, V_2, H_2. Commenter vis à vis de ce qu'on appelle parfois la conservation du débit D_v qu'on exprimera ici en fonction de V_1, H_1, et L et de V_2, H_2, et L.
3. *Equation de transport de la quantité de mouvement.*
   (a) Montrer que l'équation-bilan de la quantité de mouvement sur le volume de contrôle conduit à la relation:
   $$\frac{1}{2}\ g\ H_1^2 + V_1^2\ H_1 = \frac{1}{2}\ g\ H_2^2 + V_2^2\ H_2,$$
   où g est l'accélération de la pesanteur.
   (b) Calculer V_1 et V_2 en fonction de H_1, H_2 et g.
   (c) En introduisant les nombres sans dimensions suivants (nombres de Froude amont et aval, et rapport des hauteurs):
   $$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gH_1}}, \quad Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gH_2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{H_2}{H_1},$$
   exprimer Fr_1 et Fr_2 en fonction de α.

(d) Montrer que pour $\alpha > 1$ on a $Fr_1 > 1$ (régime super-critique ou torrentiel) et $Fr_2 < 1$ (régime sous critique ou fluvial).

(e) Application numérique pour un canal de largeur $L = 1$ m avec le débit $D_v = 1{,}5$ $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^{-1}$ sur une hauteur d'eau initiale $H_1 = 0{,}2$ m, calculer Fr_1 puis H_2 et Fr_2.

4. *Bilan énergétique.*

(a) Montrer que l'équation-bilan de la densité d'énergie, peut se mettre ici sous la forme

$$-\overset{\circ}{Q} = \oiint_{sc} \rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

où $\overset{\circ}{Q}$ est la puissance dissipée sous forme de chaleur dans le volume de contrôle (VC) par la turbulence et SC est la surface de contrôle.

(b) En déduire l'expression de la puissance dissipée dans le ressaut en fonction du débit volumique D_v, des grandeurs V et H en amont et aval, ainsi que de ρ et g.

(c) Application numÃ©rique pour le canal. En déduire l'échauffement de l'eau entre l'entrée et la sortie du ressaut (on donne $C_p = 4,18$ kJ·kg^{-1}·K^{-1} pour l'eau).

5. *Vitesse de propagation d'un mascaret.* Un mascaret est une surélévation brusque des eaux qui se produit dans certains estuaires au moment du flux de marée, et qui progresse rapidement (à la célérité c) sous la forme d'une vague "déferlante" (voir Figure **??**). En amont du front d'onde, la hauteur d'eau est H_2 et la vitesse d'écoulement est V_2 ($V_2 < c$); en aval, la hauteur d'eau est H_1 ($H_1 < H_2$) avec une vitesse qu'on considérera comme nulle (l'eau est considérée immobile).

(a) Représenter la situation du mascaret sur un schéma.

(b) Par un changement de référentiel adéquat pour utiliser les résultats obtenus pour le ressaut, en déduire la vitesse de propagation c du mascaret en fonction de H_1 et H_2.

(c) Dans le cas où la hauteur du ressaut est faible ($H_2 \simeq H_1$), comment s'exprime alors simplement la vitesse de propagation du mascaret?

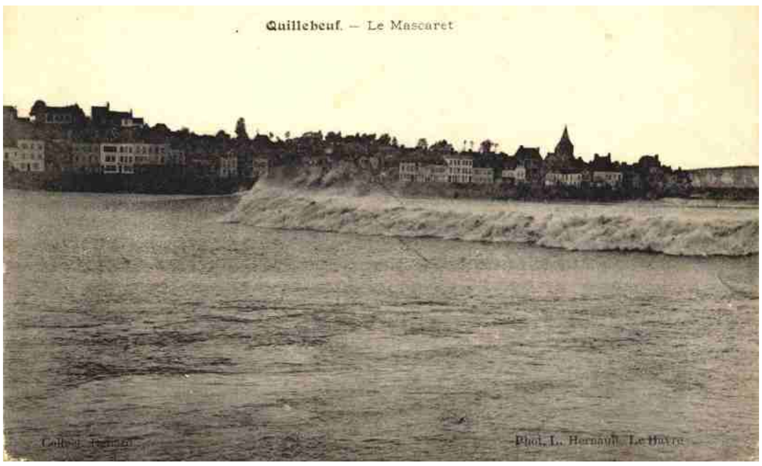

Figure 2: Mascaret remontant la Seine au niveau de Quillebeuf en 1920.