Feuille 1 : séries numériques

1 Enoncés

Exercice 1. Soient les fonctions définies par $f(x) = 1+2x^2-x^3+3x^5$, $g(x) = (1-\cos(x))\ln(1+x^2)$, $h(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{e^{x^2}-1}$. Donner leurs développements limités à l'ordre 4 en 0.

Exercice 2.

1. A-t-on $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$? Et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x+\pi x^3$?
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(2x+\sin(x))}{x^4+\tan(x^3)}$.
3. Pour tout réel non nul α, donner un équivalent en 0^+ de $\dfrac{\arctan(x^\alpha)}{1+x^\alpha}$.

Exercice 3.

1. Donner un équivalent en 0^+ et en $+\infty$ de $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$ et de $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
2. Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = (x^3+x^2)^{1/3} - \sqrt{x^2+ax}$.

Exercice 4. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \geq 1)$ converge et calculer la somme de cette série.

Exercice 5. Soit a et b deux nombres réels. On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Déterminer un développement asymptotique du terme u_n sous la forme :
$$u_n = \alpha\ln(n) + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
en exprimant les coefficients α, β et γ en fonction des réels a et b.
2. En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
3. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 6. Pour $\alpha > 0$ réel, on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.

1. En remarquant l'égalité $\dfrac{1}{\alpha n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha n}\,dt$, établir la formule

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^\alpha}\,dt.$$

   En déduire que la série de terme général u_n converge et qu'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

2. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante, strictement positive.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq n u_{2n}$.

2. a) On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Montrer que $nu_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   b) On suppose que $nu_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Est-ce que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge nécessairement ?

3. On suppose encore que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n(u_n - u_{n+1})$ converge aussi et qu'elle a même somme que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 8. Soit a un réel > 0 et β un réel $> 1/2$.
Etudier la convergence des séries dont le terme général u_n est défini successivement par :

$$\begin{array}{lll}
u_n = \frac{1+n^5}{n^2+3^n} & u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} a^n & u_n = \frac{n!}{n^n} \\
u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/3} - \left(\frac{n}{n+a}\right)^{1/2} & u_n = \frac{1}{n^{1+1/n}} & u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\
u_n = 1 - n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) & u_n = \frac{\ln^2(n)}{n^{6/5}+1} & u_n = 1 - \left(\cos\frac{1}{n^\beta}\right)^n
\end{array}$$

Exercice 9. Discuter suivant la valeur du paramètre réel α la nature de la série de terme général

$$u_n = \exp\Big(- \big(\ln(n)\big)^\alpha \Big) \quad , \quad n \geq 2.$$

Exercice 10. (A propos des séries harmonique et anharmonique)
Pour $n \geq 1$, on note $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1. a) En encadrant une intégrale, montrer que

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

b) En déduire l'encadrement

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

puis en déduire un équivalent simple de H_n.

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$.

   a) Déterminer un équivalent simple de $u_{k+1} - u_k$, puis montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(u_{k+1} - u_k)$ converge.

   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite. On a donc établi :

   $$(*) \qquad H_n = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n$$

   avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

3. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

   a) Montrer que $S_{2n} = H_{2n} - H_n$. En déduire que la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ converge vers une limite qu'on précisera.

   b) En déduire enfin que la série anharmonique $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et en donner la somme.

Exercice 11. On pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n) + (-1)^n n}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

2. En déduire la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 12. Grâce au critère des séries alternées, étudier la convergence de la série de terme général :

$$v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Etudier ensuite la convergence absolue de la série.

Exercice 13. Discuter en fonction du paramètre α la convergence et la convergence absolue de la série de terme général : $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \quad (n \geq 2)$.

Problème 1 : calcul de la somme d'une série célèbre.

1. Pour m entier ≥ 1, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(mx)\,dx$. On distinguera les cas $m = 2p$ (m pair) et $m = 2p+1$ (m impair).

2. On définit sur $[0,\pi]$ la fonction h en posant $h(x) = \dfrac{x}{2\sin\left(x/2\right)}$ si $x \in]0,\pi]$ et $h(0) = 1$. Montrer que h est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

3. En utilisant 1), montrer l'égalité $(*)$:

$$-2\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{m=1}^{2N+1}\Big(\int_0^{\pi} h(x)\sin\big((m+\frac{1}{2})x\big)\,dx - \int_0^{\pi} h(x)\sin\big((m-\frac{1}{2})x\big)\,dx\Big).$$

4. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de $M > 0$ telle que, pour tout $M > 0$, on ait :

$(**)$ $$\Big|\int_0^{\pi} h(x)\sin(Mx)\,dx\Big| \leq \frac{C}{M}.$$

(Indication : on pourra intégrer par parties $\int_0^{\pi} h(x)\sin(Mx)\,dx$.)

5. Déduire de $(*)$ et $(**)$, l'égalité $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

6. Montrer finalement l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème 2 : Etude de la convergence de séries oscillantes.

A) **Une première méthode**

1. Lorsque la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_{2n}+a_{2n+1})$ sont de même nature.

2. Application : on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n\sin(\ln n)}{n}$. Montrer que

$$a_{2n}+a_{2n+1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sin(\ln n)}{n}$.

3. Montrer en revanche que cette série ne converge pas absolument. (Question plus difficile. On pourra par exemple montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{|\sin(\ln n)|}{n}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy en considérant l'ensemble $I_k = \Big[E(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi})+1, E(e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi})\Big]$ pour k assez grand.)

B) **Une seconde méthode**

1. Soit une fonction f définie sur $[1, +\infty[$ et de classe C^1. Montrer que

$$\int_n^{n+1} (t-n)f'(t)\,dt = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt.$$

   On appelle u_n le membre de gauche. En déduire que

$$\sum_{n=N+1}^{M} f(n) = \int_N^M f(t)\,dt + \sum_{n=N}^{M-1} u_n$$

   avec $|\sum_{n=N}^{M-1} u_n| \leq \int_N^M |f'(t)|\,dt$.

2. On considère maintenant $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$.

   a) Montrer que $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{2x^{3/2}}$ pour $x \geq 1$.

   b) En déduire que $|\sum_{n=N}^{M-1} u_n| \leq \dfrac{3}{\sqrt{N}}$.

   c) En faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ puis en intégrant par parties, établir la majoration $|\int_N^M \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,dt| \leq \dfrac{4}{\sqrt{N}}$.

   d) Déduire de tout cela que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ converge. (On utilisera le critère de Cauchy.)

2 Programme semaine 37

On essaie de faire les exercices 1, 2, 3, 4 et 6.
Les exercices 1, 2 et 3 nécessitent de revoir les développements limités et la notion d'équivalent.
Les exercices 4 et 6 n'utilisent que la définition d'une série convergente.
Des indications
Pour l'exercice 4, décomposer la fraction $\dfrac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$ puis vérifier que u_n s'écrit sous la forme $a_n - a_{n+1}$. Montrer ensuite que $\sum_{n=1}^{N} u_n = a_1 - a_{N+1}$ (somme télescopique) et conclure.
Pour l'exercice 6, dans 1) repérer une somme géométrique. Pour majorer une intégrale, penser à majorer l'intégrande.

3 Programme semaine 38

On essaie de faire les exercices 7, 8 et 9.
Des indications
Pour l'exercice 7, dans 2), si les suites extraites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors la suite (a_n) converge vers cette limite ; dans 3), on sépare, on rééchelonne et on regroupe.
Pour l'exercice 8, dans 1) on peut utiliser le critère de d'Alembert ; dans 2) le critère de Cauchy ; dans 3) le critère de d'Alembert ; dans 4) on cherche un équivalent en utilisant le DL de $(1+u)^\alpha$ en 0 ; dans 5) on cherche un équivalent simple ; dans 6) on peut utiliser le critère de d'Alembert ;

dans 7) on cherche un équivalent en utilisant le DL de $\ln(1+u)$ en 0 ; dans 8) on fait un DL pour déterminer un équivalent simple.
Dans l'exercice 9, on distingue les cas $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$.

4 Programme semaine 39

On essaie de faire les exercices 5 (ou 10), 11, 12 et 13.
Des indications
Pour l'exercice 5, dans 1) on fait apparaitre $\ln(1+1/n)$ et $\ln(1+2/n)$ qu'on développe en utilisant $\ln(1+u) = u - u^2/2 + u^2\epsilon(u)$ avec $\epsilon(u) \to 0$ quand $u \to 0$. Dans 3), on remarque que u_n est le terme général d'une série télescopique.
Pour l'exercice 11, dans 1), on calcule $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n}$ et on en cherche un équivalent simple. Dans 2), on écrit alors $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$ et on peut conclure.
Pour l'exercice 13, on utilise la méthode expliquée dans l'exercice 11 (méthode dite de "l'éclatement"). On considère le cas $\alpha > 0$ (seul cas intéressant) et on décompose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n$. On cherche un équivalent simple de v_n et on conclut.
Pour l'exercice 12, on fait apparaitre le "côté alterné" de v_n en effectuant par exemple le changement de variable $t = u + n\pi$.

5 Les problèmes

Ils sont proposés à la sagacité du lecteur. Des corrigés ne sont pas prévus, a priori.