Cours de mathématiques du S1

Jean Lécureux
jean.lecureux@universite-paris-saclay.fr
Jeanne Parmentier
jeanne.parmentier@universite-paris-saclay.fr
Pauline Hellio
pauline.hellio@universite-paris-saclay.fr
(Polycopié basé sur le travail de Tony Février)

Septembre 2024

Chapitre 0

Poly : Mode d'emploi et FAQ

L'objectif du cours de maths du S1 est de vous donner les outils et techniques mathématiques de base qui vous serviront à la fois dans les cours de mathématiques suivants et dans beaucoup d'autres cours de science. La plupart d'entre vous auront déjà rencontrés une partie des notions que nous allons reprendre ici, mais beaucoup n'ont pas tout vu et encore moins tout assimilé.
Le poly est, avec les feuilles d'exercices, un des deux supports écrits principaux que nous vous fournissons.
Il est important que vous fassiez l'effort de **prouver** et **de comprendre pourquoi** un résultat donné est vrai. Laissez donc au placard les préjugés (faux d'ailleurs) du genre "les maths ce sont des recettes miracles qu'on ne peut pas comprendre", "je suis nul en maths, je ne peux rien y faire" et essayez de **comprendre en détail**. Il est évidemment possible de progresser à condition de s'investir intelligemment. Gardez cet état d'esprit tout au long de l'UE.

Que contient ce poly ?

Le poly est divisé en chapitres, que nous appelons AAV (pour *Acquis d'Apprentissage Visé*). Les chapitres du poly sont dans l'ordre où nous les traiterons en cours, et les AAV ont un numéro qui n'a pas forcément de rapport avec le numéro du chapitre. Chaque chapitre de cours est suivi d'une feuille d'exercices sur les thèmes du chapitre.
Les AAVs sont regroupés en "blocs" que nous utilisons pour l'évaluation. Pour l'instant vous avez entre les mains la partie du poly qui correspond au premier bloc, donc aux trois premiers AAVs. Nous vous distribuerons la suite au moment de commencer le bloc suivant. Le dernier chapitre de ce premier bloc est constitué par des exercices mêlant les trois premiers AAVs.
Chaque chapitre de cours commence par une liste de "Savoir-Faire" (SF) rattachés au chapitre. Ces SF ont des numéros qui nous servent à nous repérer mais n'ont pas de signification. La liste des SF est donnée sous la forme d'une liste à cocher : vous pouvez cocher le SF par exemple lorsque vous pensez l'avoir assez travaillé, ou bien lorsque vous l'avez officiellement validé lors d'une évaluation (et vous pouvez aussi faire les deux, avec des couleurs différentes par exemple).

Il y a combien de chapitres ?

Lorsque le poly sera complet, les chapitres seront, dans l'ordre :

- AAV 1 : Mener des calculs élémentaires
- AAV2 : Effectuer un exercice élémentaire de géométrie du plan
- AAV3 : Faire le lien entre une fonction et son graphique
- AAV 4 : Connaître et utiliser les fonctions ln et exp
- AAV6 : Discuter du domaine d'étude d'une fonction
- AAV9 : Effectuer un exercice de base utilisant les complexes
- AAV5 : Calculer la limite d'une fonction
- AAV7 : Calculer la dérivée d'une fonction et en étudier le signe
- AAV8 : Calculer les primitifes d'une fonction
- AAV10 : Calculer une intégrale dans un contexte quelconque
- AAV11 : Résoudre une EDO linéaire d'ordre 1
- AAV12 : Résoudre une EDO linéaire d'ordre 2

Chaque chapitre de cours sera encore suivi d'un chapitre d'exercice, avec un chapitre d'exercices de bloc tous les 3 ou 4 AAVs.

Pourquoi autant de couleurs ?

À l'intérieur de chaque chapitre de cours, vous trouverez des explications générales sur les notions du chapitre, des encadrés de différents types, différenciés par leur couleur. Par exemple, les définitions sont présentées comme ceci :

Définition 1:

Une définition est une explication précise de ce qu'est un objet mathématique.

Les définitions sont importantes, et elles sont à apprendre, autant que les théorèmes !
Vous aurez aussi des encadrés appelés *Proposition*, *Lemme*, *Théorème*, comme ceci :

Proposition 1:

Cette propriété est vraie.

Les trois mots signifient plus ou moins la même chose : une propriété mathématique qui est toujours vraie, et que vous pouvez donc utiliser (le lemme est moins important que la proposition, qui est moins importante que le théorème). Ce sont en général les points centraux du cours.
Ces propositions sont souvent suivies par une preuve, qui explique pourquoi la proposition est vraie.
Dans ce polycopié, vous trouverez trois types de preuves : des preuves vertes (le minimum de preuves à faire si vous éprouvez des difficultés), des preuves noires (ce qui est notre attendu) et des preuves rouges (pour aller plus loin).

Preuve à faire par tous :

Cette preuve est simple et fondamentale, donc à lire par tout le monde.

Preuve :

Cette preuve est du niveau attendu.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Cette preuve est plus difficile, pour ceux qui sont plus à l'aise.

Certaines preuves peuvent être présentées sous la forme d'exercices.

En général, la réponse est en-dessous, parfois écrite à l'envers.

Il y a aussi des encadrés *Remarque*

Remarque 1:

Parfois on peut faire une remarque sur le cours, pour faire le lien avec un autre chapitre, ou montrer un point de vue différent.

qui contiennent des informations qui vous seront souvent utiles. Vous trouverez en particulier un certain nombre de QR codes menant à des petites capsules vidéos, tournées par Tony Février, sur chacun des Savoir-Faire des chapitres.
Enfin, il y a des exemples et des petits exercices :

Exemple 1:

Par exemple, comme ça !

Les chapitres d'exercices sont moins colorés, il y aura seulement pour chaque exercice (ou presque) la liste des Savoir-Faire en jeu dans l'exercice :

Savoir faire

- SFxx : Savoir lire le poly

Comment l'utiliser ?

Le poly contient des chapitres de cours et des chapitres d'exercices. Il ne faut pas forcément lire tout dans l'ordre : il est au contraire conseillé d'alterner entre lecture de cours et résolution des exercices qui correspondent à ce que vous venez de lire. En fait, dans les parties de cours vous trouverez régulièrement des incitations à aller voir un exercice particulier - faites-le !
Les **chapitres de cours** vont alterner entre des notions basiques et d'autres un peu plus difficiles. Vous arrivez avec des niveaux variables, et il est donc logique que le poly puisse être lu à des niveaux différents. Il est donc conçu pour ça : certaines parties doivent être lues par tous, d'autres par ceux qui sont plus à l'aise. La morale, c'est donc qu'il ne faut **pas s'arrêter à toutes les difficultés** : on peut très bien valider l'UE sans avoir compris tout le poly. Par contre, les parties "pour aller plus loin" (écrites en petit) sont conçues pour vous faire avancer dans votre réflexion, ce qui vous sera utile dans le reste de votre scolarité ici.
Le poly n'est pas conçu comme une présentation complète des concepts pour quelqu'un qui

ne l'aurait pas vu : c'est un **complément** par rapport au cours et aux exercices. Il doit donc être lu plutôt après avoir écouté le cours correspondant, ou bien après avoir commencé les exercices, pour revoir les notions et comprendre ce qui aurait pu vous échapper.

Une de ses utilités principales est qu'il peut vous servir de **référence** : il contient (à peu près) tous les résultats dont vous devriez avoir besoin au cours de cette UE. Si vous avez oublié les hypothèses d'un théorème, ou si vous avez besoin d'un résultat que nous n'avons pas vu en cours, votre réflexe doit être de regarder dans le poly en premier lieu (avant d'aller sur Internet, par exemple !).

Vous trouverez aussi dans le poly des questions/exercices qui sont censés suivre votre progression. C'est un bon moyen de vérifier que vous avez assimilé la notion.

Les **exercices** sont évidemment très importants, à chercher par vous-mêmes. La plupart sont modelés sur le type d'exercice que vous pourrez avoir lors des diverses évaluations que nous allons vous faire passer. Il est important de commencer par vérifier que vous savez effectivement faire les exercices les plus basiques (sections "Travailler les savoir-faire"). L'étape d'après est de regarder les exercices du Bloc 1 (à la fin du poly), et enfin les exercices niveau Avancé/Expert (pour lesquels vous pouvez avoir besoin d'indications, n'hésitez pas à nous solliciter).

Nous fournirons la correction de la plupart des exercices en ligne. Néanmoins, il est important de ne pas avoir les corrections à portée de vue lorsque vous êtes en train de chercher : il est essentiel que vous vous rendiez compte de ce que vous arrivez à faire sans aucune sorte d'indication.

Quand lire les chapitres de cours ?

Vous pouvez (et vous êtes même encouragés !) à ouvrir votre poly à n'importe quel moment. Mais l'utilité du cours sera maximale :

- Au moment où vous commencez les exercices du chapitre, pour vous situer dans les concepts et comprendre ce que vous avez besoin d'utiliser
- Au moment où vous révisez et où vous reprenez le chapitre, que ce soit pour une évaluation ou une autre raison.

J'insiste sur un point : si vous n'avez pas lu le chapitre, vous ne pouvez pas être sûr d'avoir atteint le niveau de compréhension que nous vous demandons.

Par contre, il est peu utile de lire le poly avant de commencer le chapitre. Cela ne pose pas de problème spécial, mais vous en retirerez sans doute assez peu.

Quand faire les exercices ?

Tout le temps ! Les exercices sont la base du travail que vous devez effectuer. Vous pouvez commencer par regarder les exercices avant le cours, pour vous rendre compte de ce que vous allez avoir besoin de travailler. Vous pouvez regarder les exercices quand vous êtes en train de lire le cours, pour vérifier que vous avez bien compris un point particulier. Surtout, vous *devez* faire les exercices une fois que vous avez lu et pensez avoir assimilé le cours. C'est à la fois une façon de contrôler ce que vous avez compris et un moyen de vous rendre compte des difficultés.

Vu qu'on a tout les documents, on n'a pas besoin d'écouter en cours ?

Evidemment si ! Même s'il contient beaucoup d'informations, ce poly ne remplace pas le cours au tableau et les séances d'exercices. L'essentiel de ce que vous allez apprendre se fera par vos interactions avec vos enseignants. Les supports de cours ne sont que des supports, ils vont vous aider à progresser mais ne constituent pas l'essentiel du cours.

On a vraiment besoin de tout lire ?

Oui et non. Comme expliqué ci-dessus, certaines parties sont "pour aller plus loin", elles sont plus difficiles et sont réservées aux étudiants les plus aguerris. Mais il est important d'avoir lu les résultats importants, définitions et théorèmes, de chaque chapitre.

Table des matières

Chapitre 1

AAV1 : Mener des calculs élémentaires

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un, ou d'ordre deux de type $x^2 = a$ (SF 8)
- ☐ Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, identités remarquables, fractions...) (SF 9)
- ☐ Savoir résoudre une équation du second degré (SF 10)
- ☐ Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités (SF 200)
- ☐ Savoir résoudre des inéquations simples (SF 1187)
- ☐ Comprendre le concept de variable : ne pas être perturbé par le changement de notations dans un calcul simple (SF 6)

1.1 Présentation générale du chapitre

Le premier chapitre est un peu particulier : c'est un chapitre qui reprend beaucoup de notions qui ont normalement été vues au collège, certaines au lycée, mais qui ont souvent besoin d'être reprises.

1.1.1 Calculer

Calculer peut vouloir dire plusieurs choses différentes suivant les contextes. En général, le but est de partir d'une expression mathématiques qui nous est donnée (par exemple, 15×31 ou $(2x+3)^2 - 3a^2$) et, par une suite de transformations connues, arriver à une expression plus simple.
Beaucoup de calculs peuvent être faits par calculatrice, ordinateur, smartphone... Cependant, l'intérêt d'apprendre à calculer par vous-même est multiple. Le principal, de notre point de vue, est d'entraîner notre cerveau pour pouvoir aller plus loin dans les notions. Un autre avantage est de pouvoir aller plus vite : votre cerveau est toujours disponible avec vous, et il n'y a pas besoin de lancer une interface.
Les symboles mathématiques ont un sens, qu'il faut bien sûr comprendre. Cela dit, on ne peut pas effectuer de calculs en revenant systématiquement au sens premier des objets : en général, on utilise un certain nombre de **règles** sans avoir besoin d'y re-penser. Il est important de connaître ces règles ! Un des buts de ce chapitre est de revoir la plupart

des règles de calcul que l'on utilise couramment qui mettent en jeu les quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division).

1.1.2 Variables et inconnues

J'espère que cela ne vous fait plus peur : en mathématiques, on utilise très souvent des lettres, pour désigner des nombres ou d'autres objets mathématiques. L'utilité des lettres est de pouvoir calculer avec n'importe quelle valeur possible !
Ces lettres peuvent avoir des statuts différents. Le premier est celui de *variable* : la lettre peut désigner n'importe quel nombre (ou autre). Par exemple quand on écrit l'égalité $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, a et b désignent *n'importe quel* nombre (réel) : on dit que l'égalité est vraie *pour tous* les nombres réels. [1]
La deuxième utilité principale des lettres est d'écrire des équations : là encore, la lettre désigne un nombre quelconque, mais l'objectif est différent : on écrit une égalité qui n'est pas valable pour tous les nombres, et on cherche pour lesquels elle est vraie.

Warning :

Quand on écrit une égalité comportant des variables, il faut toujours préciser quelles sont les valeurs que peuvent prendre ces variables.

Exemple 2:

- On peut dire "pour tous nombres réels a, b, c on a $a(b+c) = ab+ac$". On ne peut pas écrire "$ad - bc = 0$" si on ne sait pas qui sont a, b, c et d.
- Si on écrit "Résoudre $x^2 = y^2$", on sous-entend qu'il faut trouver x et y, dans un ensemble qu'il faut préciser ! (Est-ce qu'on cherche des réels ? Des entiers ?)

Notation 1

Les lettres utilisées en mathématiques suivent en général des conventions :

- Les lettres $a, b, c, \ldots$ désignent souvent des nombres réels quelconques,
- les lettres x, y, z désignent souvent des inconnues d'une équation, parfois des coordonnées en géométrie, ou des arguments d'une fonction numérique
- les lettres n, m désignent souvent des nombres entiers
- les lettres s, t désignent souvent des paramètres qui varient

Ces conventions ne sont pas systématiques et peuvent être ignorées dans certains cas. Néanmoins elles peuvent vous aider à comprendre plus rapidement les formules que vous voyez.
Un peu plus tard vous verrez une utilisation assez fréquente de lettre grecques. Les plus fréquentes en maths (en plus de π) sont : α (alpha), β (beta), γ (gamma), δ (delta), ε (epsilon), θ (theta), λ (lambda), μ (mu), ν (nu), ω (omega).

1. Vous verrez plus tard que cette égalité peut être fausse dans d'autres cas, par exemple si a et b sont des matrices...

1.1.3 Conseils généraux pour calculer

Chacun arrive avec ses compétences, et tout le monde n'est pas autant à l'aise pour effectuer des calculs. C'est normal. Cela dit, il y a des conseils simples à suivre qui devraient vous permettre de vous améliorer simplement :

- Chaque ligne de calcul doit être justifiée ou justifiable. Cela veut dire qu'il faut que vous sachiez quelle règle vous utilisez à tout moment. Si vous en utilisez plusieurs en même temps, peut-être est-il utile de faire plus d'étapes ?
- Anticipez ! Avant de commencer un calcul, réfléchissez à comment vous allez l'effectuer, combien de temps il va vous prendre, si vous avez besoin d'un brouillon ou pas...
- Prenez votre temps. Il n'y a rien de très glorieux à pouvoir faire un calcul en deux fois moins d'étapes. Par contre, il y a un grand risque de se tromper.
- Ayez un grand espace où écrire, que ce soit une feuille de papier, un tableau ou autre chose. N"ayez pas peur de gâcher du papier ! Si non, vous allez retomber dans les erreurs de l'item ci-dessus.
- Faites attention à écrire des expressions qui ont un sens. Chaque ligne de votre calcul doit vouloir dire quelque chose. Par exemple, ne confondez pas les symboles $\Leftrightarrow$ et $=$!

1.2 Simplification d'expressions algébriques

Dans cette section, nous allons vous présenter les règles qu'on utilise pour manipuler des nombres. Les mathématiciens changent parfois de point de vue et les appellent **axiomes** : les axiomes sont des règles de départ qu'on se donne, et à partir desquelles tout le reste va découler.
Dans cette partie, on vous donne donc vous donner plusieurs axiomes à partir desquels vous pouvez démontrer le reste des résultats de cette section, et faire les exercices associés.

1.2.1 Développement

Définition 2: Règles du produit

Soient a, b, c trois réels, alors

- (A_1) : $ab = ba$. *Le produit est dit commutatif.*
- (A_2) : $(ab)c = a(bc)$. *Le produit est dit associatif.*
- (A_3) : $a(b + c) = ab + ac$. *Le produit est dit distributif.*

C'est quoi développer une expression ?

Développer c'est utiliser l'axiome (la règle) (A_3), qui transforme un produit (dont l'un des facteurs est une somme) en une somme. L'un des objectifs de cette section est que vous sachiez développer.
Ces règles étant fixées, on peut maintenant jouer avec.

Proposition 2: Identités remarquables

Soient a, b deux réels alors en définissant $a^2 = a \times a$, on a

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Preuve à faire par tous :

Commençons par prouver le point 1 :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &\underset{(1)}{=} (a+b)(a+b) \\
&\underset{(2)}{=} (a+b)a + (a+b)b \\
&\underset{(3)}{=} a(a+b) + b(a+b) \\
&\underset{(4)}{=} a^2 + ab + ba + b^2 \\
&\underset{(5)}{=} a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

- Dans la preuve précédente, justifiez quel axiome ou quelle définition est utilisée à chaque étape.

(1) : par définition d'un carré $a^2 = a \times a$.

(2) : axiome (A_3) avec comme terme de gauche $a+b$.

(3) : axiome (A_1).

(4) : axiome (A_3) et définition du carré.

(5) : axiome (A_1) et factorisation par ab.

- En vous inspirant de la preuve précédente, démontrez les deux dernières propriétés.

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\
&= (a-b)a - (a-b)b \\
&= a(a-b) - b(a-b) \\
&= a^2 - ab - ba + b^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= (a+b)a - (a+b)b \\
&= a(a+b) - b(a+b) \\
&= a^2 + ab - ba - b^2 \\
&= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

Passons à la pratique de td.

Remarque 2: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 9 : Développer*.

Questions :

- Faites deux exemples de l'exercice 9.
- Comment expliqueriez-vous la différence entre un axiome et une proposition (ou théorème) ? C'est quoi pour vous démontrez un résultat ?

Un axiome est un postulat qu'on juge vrai et à partir duquel on élabore une théorie. Il n'est donc pas à prouver. A partir de ces axiomes, on peut démontrer des résultats c'est-à-dire écrire une série d'étapes toutes justifiables par un argument clair utilisant ces axiomes et menant au résultat. Une proposition, un théorème est un de ces résultats.

1.2.2 Factorisation

C'est quoi factoriser ?

Factoriser c'est faire l'opération inverse du développement. Cela consiste à repérer des termes communs aux différents termes d'une somme et de mettre ces termes communs en facteur.

A quoi ça sert ?

Factoriser permet d'obtenir des expressions synthétiques élégantes qui pourront être réutilisées après pour savoir par exemple quand une expression s'annule ou encore quel est le signe d'une expression.

Remarque 3: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 9 : Factoriser.*

Questions :

- Faites les trois premières questions de l'exercice 10.

1.2.3 Calcul sur les fractions

Définition 3: Axiomes

Soient a, b deux réels et c, d deux réels non nuls.

- (A_4) : $\dfrac{ab}{ac} = \dfrac{b}{c}$.
- (A_5) : $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$.
- (A_6) : $\dfrac{a}{c} \times \dfrac{b}{d} = \dfrac{ab}{cd}$.

Proposition 3: Réduction au même dénominateur

Soient a, b deux réels non nuls, alors

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

Preuve :

- Démontrer cette propriété en n'utilisant que les axiomes proposés ci-dessus.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{b}{ab} + \frac{a}{ba} && \text{d'après l'axiome}(A_4) \\ &= \frac{a+b}{ab} && \text{d'après l'axiome}(A_5) \end{aligned}$$

Et en pratique ?

Remarque 4: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 9 : Savoir réduire deux fractions au même dénominateur.*

Questions :

- Faites deux exemples de l'exercice 8.

1.2.4 Calcul de puissances

Définition 4: Axiome

Voici un axiome que vous avez le droit d'utiliser pour travailler sur les puissances : soient a deux réels et n, p deux entiers relatifs.

- (A_7) : $a^0 = 1$.
- (A_8) : $a^{p+n} = a^p a^n$.

Proposition 4:

Soient a, b deux réels, n un entier relatif.

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- $(ab)^n = a^n b^n$.
- si $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Dans la preuve ci-dessous, trouver quel axiome/propriété permet de justifier chacun des numéros :

- $1 \underset{(1)}{=} a^0 \underset{(2)}{=} a^{n-n} \underset{(3)}{=} a^n a^{-n}$ donc $a^{-n} \underset{(4)}{=} \dfrac{1}{a^n}$.

Cette preuve s'adresse à ceux qui ont déjà vu la principe de récurrence :

- Montrons la propriété par récurrence :
  Initialisation : $(ab)^0 \underset{(5)}{=} 1 \underset{(6)}{=} a^0 b^0$.
  Hérédité : On suppose qu'au rang n, $(ab)^n = a^n b^n$.
  On veut montrer qu'au rang $n+1$, $(ab)^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$.

  Or $(ab)^{n+1} \underset{(7)}{=} (ab)^n (ab) \underset{(8)}{=} (a^n b^n)(ab) \underset{(9)}{=} a^n a b^n b \underset{(10)}{=} a^{n+1} b^{n+1}$.
  Ceci achève la récurrence.
- Montrons la propriété par récurrence :
  Initialisation : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^0 = 1 = \dfrac{a^0}{b^0}$.
  Hérédité : On suppose qu'au rang n, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
  On veut montrer qu'au rang $n+1$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} = \dfrac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$.
  Or $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} \underset{(11)}{=} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \left(\dfrac{a}{b}\right) \underset{(12)}{=} \left(\dfrac{a^n}{b^n}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right) \underset{(13)}{=} \dfrac{a^n a}{b^n b} \underset{(14)}{=} \dfrac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$.
  Ceci achève la récurrence. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

(1) : (A_7)
(2) : $n-n=0$
(3) : (A_8)
(4) : on divise des deux côtés par le même nombre et on utilise (A_4) pour simplifier.
(5) : (A_7)
(6) : (A_7)
(7) : (A_8)
(8) : Hypothèse de récurrence
(9) : (A_8)
(10) : (A_1)
(11) : (A_8)
(12) : Hypothèse de récurrence
(13) : (A_6)
(14) : (A_8)

Il est temps d'utiliser toutes ces formules en pratique, pour cela :

Questions :

- Faites les questions 1, 4, 5 de l'exercice 11.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

1.3 Equations algébriques

1.3.1 Vocabulaire

Qu'est-ce qu'une équation ?

Une équation est une égalité mathématique contenant une ou plusieurs variables. Nous traitons ici d'équation sur les réels. Vous verrez dans le futur des équations sur les complexes et même des équations sur les fonctions (équations différentielles) très utiles pour modéliser des phénomènes physiques, biologiques, chimiques, économiques ...

Exemple 3: d'équations algébriques

- $2x - 2 = x + 4$.
- $x^2 - x + 15 = 5x$.

Qu'est ce que résoudre une équation ?

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs que peuvent prendre les variables de l'équation pour que l'égalité soit vérifiée.

Exemple 4:

Résoudre $2x - 2 = x + 4$, c'est trouver tous les x réels vérifiant cette égalité.

Qu'est-ce que l'ordre d'une équation ?

L'ordre est la puissance maximale sur la variable.

Exemple 5:

- $2x - 2 = x + 4$ est d'ordre 1.
- $x^2 - x + 15 = 5x$ est d'ordre 2.

1.3.2 Equations d'ordre 1

Définition 5:

Voici une liste d'axiomes (de règles) que vous avez le droit d'utiliser : soient a, b deux réels.

- (A_9) : si $a = b$ alors pour tout c réel, on a $a + c = b + c$.
- (A_{10}) : si $a = b$ alors pour tout c réel, on a $ac = bc$.

Voici une démarche guidée vous permettant de résoudre une équation algébrique d'ordre 1 générale.

Questions :

Soient a, b, c, d quatre réels, on cherche à résoudre $ax + b = cx + d$.

- On commence par supposer $a \neq c$: résoudre alors l'équation.

$$\begin{aligned} ax + b = cx + d &\iff ax - cx + b = d && (A_9) : \text{on ajoute } -cx \\ &\iff ax - cx = d - b && (A_9) : \text{on ajoute } -b \\ &\iff (a-c)x = d - b && (A_3) : \text{à l'envers pour factoriser par } x \\ &\iff x = \frac{d-b}{a-c} && (A_{10}) : \text{on multiplie par } \frac{1}{a-c} + (A_6) \end{aligned}$$

- A quel endroit l'hypothèse $a \neq c$ est-elle cruciale ?

Quand on utilise l'axiome (A_{10}), on a besoin que le dénominateur de la fraction soit non nul sinon on divise par 0.

- On suppose maintenant $a = c$, sous quelle condition $ax + b = cx + d$ a-t-elle des solutions ? Combien en a-t-elle alors ?

Donc il y a des solutions seulement si $b = d$ et si c'est le cas, tous les x conviennent. Il y a dans ce cas une infinité de solutions.

$$ax + b = cx + d \iff b = d \quad (A_9) : \text{on ajoute } -cx$$

Remarque 5: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux premières minutes de la vidéo : *SF 8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un ou deux de type $x^2 = a$.*

Questions :

- Faites les questions 1 et 3 de l'exercice 1.

1.3.3 Equations d'ordre 2

L'objectif de cette partie est de résoudre les équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Pour cela, nous commençons par le cas $b = 0$. Nous verrons que ce cas particulier permet de déduire le cas général.

Racines carrées

Proposition 5: Racines d'un trinôme du second degré

Soient a un réel,

- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réelle.
- Si $a \geq 0$, l'équation a pour solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Preuve à faire par tous :

- Démontrer le premier point.

  Si $a < 0$ alors $x^2 = a < 0$. Ceci est absurde car $x^2 \geq 0$. Donc il n'y a pas de solution réelle.

- Dans le cas $a \geq 0$, factoriser $x^2 - a$ à l'aide d'une identité remarquable.

  $$\begin{aligned} x^2 - a &= x^2 - (\sqrt{a})^2 && \text{par définition d'un carré sachant que a est positif} \\ &= (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) && \text{d'après le troisième point de la proposition 2} \end{aligned}$$

- En déduire les solutions de $x^2 = a$.

  $$\begin{aligned} x^2 - a = 0 &\iff (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 && \text{par définition d'un carré sachant que a est positif} \\ &\iff x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0 && \text{car si un produit est nul, un des facteurs est nul} \\ &\iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} && (A_9) \end{aligned}$$

Passons à la pratique :

Remarque 6: La vidéo associée

Il est temps de consulter les quatre premières minutes de la vidéo : *SF 8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un ou deux de type $x^2 = a$.*

Questions :

- Faites la question 5 de l'exercice 1.

Trinômes du second degré

Etudions maintenant les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ en toute généralité. Nous allons voir que cette équation peut se ramener à une équation du type $x^2 = a$ grâce à la méthode de factorisation canonique.

Qu'est-ce que la factorisation canonique ?

Nous avons vu que $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. L'idée de la factorisation canonique consiste simplement à réécrire cette identité sous la forme $x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$.

Qu'est-ce que ça apporte de faire ça ?

L'intérêt est que cette réécriture permet de transformer des termes de la forme $x^2 + 2ax$ sous la forme d'une différence de deux carrés. Cette transformation va, on va le voir, être cruciale pour se ramener à une équation du type $x^2 = a$ qu'on sait résoudre par la section précédente.

Proposition 6: Racines d'un trinôme du second degré

Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$, notons $\Delta = b^2 - 4ac$ et (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions distinctes

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  et on peut alors factoriser le trinôme associé ainsi

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_+)(x - x_-).$$

- Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une solution

$$x_+ = \frac{-b}{2a}$$

  et on peut alors factoriser le trinôme associé ainsi

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_+)^2.$$

- Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution réelle.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- Dans la preuve suivante, justifier tous les points marqués par un chiffre.

On cherche à trouver les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$. L'idée pour cela consiste pour cela à écrire $ax^2 + bx + c$ sous la forme d'un produit car alors trouver les x annulant $ax^2 + bx + c$ revient à annuler les termes du produit.

On a

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &\underset{(1)}{=} a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\
&\underset{(2)}{=} a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) \\
&\underset{(3)}{=} a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}) \\
&\underset{(4)}{=} a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})
\end{aligned}$$

S'offre alors à nous deux cas : soit $\Delta < 0$ $\underset{(5)}{alors}$ cette quantité ne s'annule jamais. Soit $\Delta \geq 0$ alors

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &\underset{(6)}{=} a(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) \\
&\underset{(7)}{=} a(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a})
\end{aligned}$$

Donc $ax^2 + bx + c = 0 \underset{(8)}{\iff} x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Si $\Delta > 0$, on a donc deux racines distinctes, si $\Delta = 0$, elles sont égales toutes deux à $-\dfrac{b}{2a}$.

(1) : (A_3) : factorisation par a.
(2) : proposition 2 : c'est la première identité remarquable utilisée à l'envers.
(3) : proposition 3 : on réduit au même dénominateur.
(4) : par définition de Δ.
(5) : $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et on ajoute lui ajoute un carré donc $(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.
(6) : proposition 2 : c'est la troisième identité remarquable.
(7) : (A_3) : on factorise chaque terme par -1.
(8) : Un produit est nul si un des termes du produit est nul.

Remarque 7: Racines complexes

Notez que dans le cas où le discriminant est négatif, il n'y a pas de racine réelle mais on verra plus tard qu'il y a deux racines complexes conjuguées.

Proposition 7: Signe d'un trinôme

Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$, notons $\Delta = b^2 - 4ac$ et (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$, notons x_-, x_+ ses deux racines alors
  - si $a > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est négatif sur $[x_-, x_+]$ et positif ailleurs.
  - si $a < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est positif sur $[x_-, x_+]$ et négatif ailleurs.
- Si $\Delta \leq 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

On a vu que $ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+)$ dans le cas où $\Delta > 0$.

- Faire un tableau de signes sur $\mathbb{R}$, contenant le signe de $x - x_-$.
- Ajoutez à ce même tableau le signe de $x - x_+$.
- Ajoutez alors le signe de $ax^2 + bx + c$ au tableau.

x	$-\infty$		x_-		x_+		$+\infty$
$x - x_-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_+$		$-$		$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

Dans le cas où $\Delta = 0$:

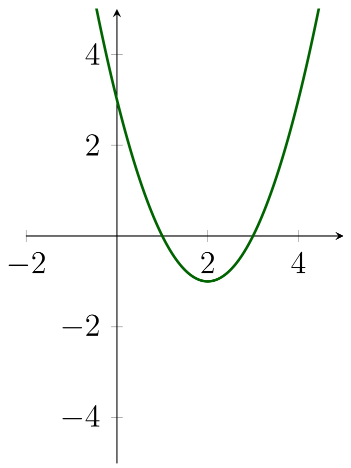
- Comment s'écrit $ax^2 + bx + c$ sous forme factorisée ? En déduire son signe.

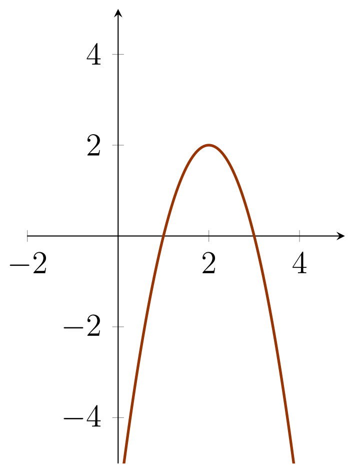
Puisque les deux racines sont égales, on obtient $ax^2 + bx + c = a(x - x_+)(x - x_+) = a(x - x_+)^2$.
Le carré étant positif, le signe ne dépend que du signe de a.

Dans le cas $\Delta < 0$: ax^2+bx+c ne s'annule pas donc s'agissant d'une fonction continue, elle est de signe constant. Vous verrez dans le chapitre limites que quand x tend vers $+\infty$, ax^2+bx+c tend vers $+\infty$ si $a > 0$ et $-\infty$ sinon. Ainsi ax^2+bx+c est du signe de a.

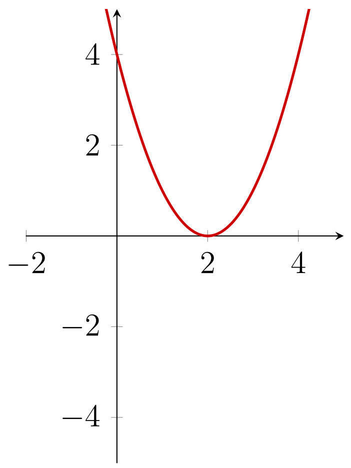
Et visuellement, ça donne quoi ?

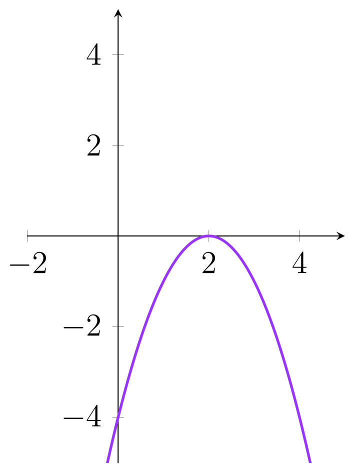
Voici à quoi ressemble le tracé d'un trinôme du second degré. Dans le cas où $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles. Il y a donc deux traversées de l'axe des abscisses, ce qui fait changer de signe deux fois d'où les deux cas de figure suivant.



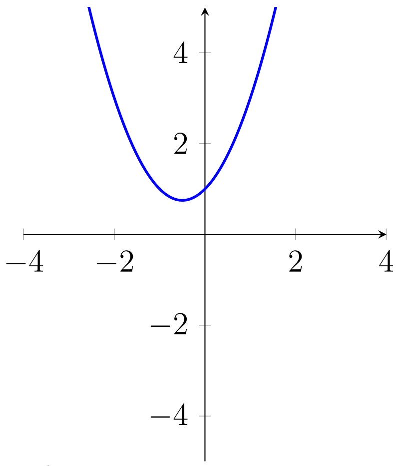


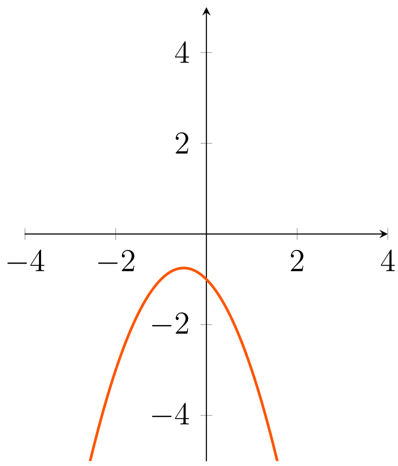
Si $\Delta = 0$, le trinôme ne coupe l'axe des abscisses qu'une fois, il reste donc du même côté de l'axe et ne change pas de signe.





Si $\Delta < 0$, le trinôme ne coupe pas l'axe des abscisses, il reste donc du même côté de l'axe et ne change pas de signe.





Passons à la pratique :

Remarque 8: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux vidéos : *SF 10 : Savoir résoudre une équation du second degré.*

Questions :

- Faites les deux premières questions de l'exercice 12.
- Expliquez avec des mots comment on s'y est pris pour déterminer le signe d'un trinôme dans ce paragraphe.
- Quels sont les trinômes toujours positifs parmi les suivant : $x^2 + 4x + 4, -x^2 + 4x + 4, x^2 + x + 1$?

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ est toujours positif.

Les discriminants des deux autres sont dans l'ordre : 32 et −3. Donc le second change de signe.

Le troisième n'a pas de racines réelles donc est de signe constant. Le signe est celui de $a = -1$.

Donc le troisième est toujours négatif.

1.3.4 Autre type d'équations

Remarque 9: La vidéo associée

Il est temps de consulter les quatre dernières minutes de la vidéo : *SF 8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un ou deux de type $x^2 = a$.*

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.
- Faites la question 6 de l'exercice 1.

1.4 Inégalités

L'objectif de cette section est faire un travail analogue à ce qui précède mais sur des inégalités et pas des égalités. Comme les sections précédentes, on ne fait pas de la magie, les calculs sur les inégalités se basent sur quelques axiomes élémentaires qu'on utilise pour les preuves. Nous vous invitons donc à retenir ces axiomes et à les utiliser dès que vous voulez montrer une inégalité (et n'utiliser qu'eux et pas d'autres règles dangereuses).

1.4.1 Axiomes élémentaires

Définition 6:

Voici une liste d'axiomes (de règles) que vous avez le droit d'utiliser pour travailler sur les inégalités : soient a, b deux réels.

- (A_{11}) : si $a \leq b$ alors pour tout c réel, on a $a + c \leq b + c$.
- (A_{12}) : si $a \leq b$ alors pour tout c positif, on a $ac \leq bc$.
- (A_{13}) : si $a \leq b$ alors pour tout c négatif, on a $ac \geq bc$.
- (A_{14}) : si $0 < a \leq b$ ou si $a \leq b < 0$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

A partir de ces axiomes, on peut démontrer les propriétés suivantes :

Proposition 8:

- Si $a \geq b$ alors $-a \leq -b$
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

Preuve à faire par tous :

Démontrez ces trois affirmations en n'utilisant que les axiomes ci-dessus.

La première propriété est issu de l'axiome (A_{13}) en multipliant par $c = -1$.

Seconde propriété :

$a \leq b$	$\Longrightarrow a + c \leq b + c$	(A_{11})on ajoute c
Or $c \leq d$	$\Longrightarrow b + c \leq b + d$	(A_{11})on ajoute b
Donc	$a + c \leq b + d$	on réunit les deux inégalités précédentes.

Troisième propriété :

$a \leq b$	$\Longrightarrow ac \leq bc$	(A_{12})on multiplie par $c \geq 0$
Or $c \leq d$	$\Longrightarrow bc \leq bd$	(A_{12})on multiplie par $b \geq 0$
Donc	$ac \leq bd$	on réunit les deux inégalités précédentes.

1.4.2 Pratique

Remarque 10: La vidéo associée

Il est temps de consulter les trois vidéos : *SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités (1), (2), (3).*

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.
- Faites l'exercice 19

1.5 Inéquations

1.5.1 Vocabulaire

Qu'est-ce qu'une inéquation ?

Une inéquation est une inégalité mathématique contenant une ou plusieurs variables.

Exemple 6: d'inéquations algébriques

- $2x - 2 \leq x + 4$.
- $x^2 - x + 15 < 5x$.

Qu'est ce que résoudre une inéquation ?

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs que peuvent prendre les variables de l'inéquation pour que l'inégalité soit vérifiée.

Exemple 7:

Résoudre $2x - 2 \leq x + 4$, c'est trouver tous les x réels vérifiant cette inégalité.

Qu'est-ce que l'ordre d'une inéquation ?

L'ordre est la puissance maximale sur la variable.

Exemple 8:

- $2x - 2 \leq x + 4$ est d'ordre 1.
- $x^2 - x + 15 < 5x$ est d'ordre 2.

1.5.2 Ordre 1

On étudie dans cette section les inéquations de la forme $ax + b \leq cx + d$ pour a, b, c, d des réels.

Remarque 11: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 1187 : Savoir résoudre des inéquations simples (1/3).*

Questions :

- Faire la question 2 de l'exercice 20.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

1.5.3 Autres inéquations

Remarque 12: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux vidéos : *SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples (2/3) et (3/3)*

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.
- Faire les questions 2 de l'exercice 22 et 1 de l'exercice 21.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV1

1.6 Travailler les savoir-faire

Dans cette section, vous trouverez les exercices d'entraînement sur les savoir-faire spécifiques.

Exercice 1

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 2.1, 2.2, 2.3.1 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Résoudre les équations suivantes :

1. $x + 1 = 12$.
2. $x - 4 = 2x + 6$.
3. $-x + 2 = 4x - 5$
4. $x^2 = 16$
5. $x^2 - 15 = 10$
6. $\dfrac{x-1}{2x+6} = -1$.
7. $\dfrac{4x+1}{3x-7} = 2$.

Exercice 2

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 2.3.1 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Trouver les solutions des équations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x^2} - 25 = 0$.
2. $x^4 = 12$.

Exercice 3

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 2.1, 2.2 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Existe-t-il une (des) solution(s) à l'équation, $3(u+4)+1-6u = 3(1-u)+1$, pour la variable u ? Justifier la réponse.

Exercice 4

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un

Pour quelles valeurs de x et de y l'équation, $32t + x = y \times t + 15$, admet-elle une infinité de solutions en t ?

Exercice 5

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un

En écrivant une équation du 1er degré, trouver deux nombres entiers naturels pairs et consécutifs dont la somme est égale à 206.

Exercice 6 *Fractions*

Savoir faire

- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)

Déterminer une fraction comprise entre 7 et 8.

Ecrire de 10 façons différentes, la fraction 3/4.

Exercice 7

Savoir faire

- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 1.4 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Réduire les expressions suivantes en la forme x^α

$2^\dagger_1)$ $x \cdot x^2, \ \dfrac{x^3}{x^{1/2}}, \ \dfrac{1}{x^{-1/2} \cdot x}$

$2^\dagger_2)$ $\dfrac{x^{1/3} \cdot x}{x^{2/3} \cdot x^2}$

$2_3)$ $\dfrac{(x^{5/4} \cdot x)^2}{\sqrt{x} \cdot x^4}$

$2_4)$ $\dfrac{(x^{1/2} \cdot x^{3/2} \cdot x)^2}{x^{-1/2} \cdot x^{-1/4} \cdot x^{-5/4}}$

$2_5)$ $\dfrac{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^3}{x \cdot x^4 \cdot x^9 \cdot x^{16}}$

$2^\dagger_6)$ $\dfrac{x^{-1} \cdot x^{-1/2} \cdot x^{-1/3}}{x^3 \cdot x^2 \cdot x}$

$2^\dagger_7)$ $\dfrac{(x^{1/3} \cdot x^{-1/2})^2}{x^{2/5} \cdot x^{1/2} \cdot x^3}$

$2_8)$ $\dfrac{x^{2/3} \cdot x^{-11/2} \cdot x^2}{x^{7/3} \cdot x^{-1} \cdot x^{1/3}}$

$2_9)$ $\dfrac{x^{2/7} \cdot x^{-3}(x^{2/5} \cdot x^{-1/3})^5}{\sqrt{x} \cdot x^{3/2}}$

$2_{10})$ $\dfrac{x \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/3} \cdot x^{1/4} \cdot x^{2/7}}{x^4 \cdot x^{-1/2} \cdot x^{1/3} \cdot x^{1/12}}$

$2^\dagger_{11})$ $\dfrac{(-x)^3}{x^{1/4}(-2x)^2}$

$2^\dagger_{12})$ $\dfrac{x^{-2} \sqrt[5/2]{x}}{(2\sqrt{2}x)^{2/3}}$

$2_{13})$ $\dfrac{x^a \cdot x^b \cdot x^c}{x^d \cdot x^e \cdot x^f}, \ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

$2^*_{14})$ $\dfrac{(\sqrt[3]{x})^{1/3}(3\sqrt[5]{x})^{1/5}(5\sqrt{7}x)^{1/7}}{x^3 \cdot x^5 \cdot x^7}$

$2^*_{15})$ $\dfrac{(2\sqrt{5}x)^2(2\sqrt{7}x^{1/4})^6(-2\sqrt[6]{11}x)^3}{x^{2/7} \cdot x^{-1/5}}$

Exercice 8 *Calcul avec des fractions*

Savoir faire

- SF11 : Savoir enchaîner des calculs simples
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 1.3 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Réduisez au même dénominateur :

1. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2x+1}$
2. $\dfrac{a}{2x^2+3} + \dfrac{b}{4a^2+x}$
3. $\dfrac{x}{4x^2+2x+2} + \dfrac{1}{2x+3}$
4. $\dfrac{2a+b}{4a^2+2a+3ab+1} + \dfrac{4b}{5a+2b}$

Exercice 9 *Développer une expression littérale*

Savoir faire

- SF11 : Savoir enchaîner des calculs simples
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 1.1 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Développez et simplifiez lorsque nécessaire :

1. $(4x^2 + 2x + 3)(3x + 2)$
2. $(2x^3 + 4x^2 + 3x)(2x + 3) + 4x^3$
3. $(2a + 4b + c)(a + b + c)$
4. $(2x + 3y)(3x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x + 1) + 3y^2$

Exercice 10

Savoir faire

- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 1.2 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Factorisez dans $\mathbb{R}$:

1. $3x+3-(x+1)^2$
2. $(2x+1)^2-(4x+3)^2$
3. $x^5-5x^4+4x^3$
4. x^3-1

Bonus : Si vous savez le faire, factorisez également ces expressions dans $\mathbb{C}$

Exercice 11 *Simplifications*

Savoir faire

- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)
- SF33 : Savoir utiliser les règles de calculs avec exp pour simplifier une expression
- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\dfrac{2^4 3^5}{5^3 3^2 2^2}$.
2. $\sqrt{128}$.
3. $\dfrac{t}{t^2 x}$.
4. $\dfrac{n 8^{n+1}}{(n+1)8^n}$.
5. $\dfrac{256}{484}$.
6. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}$.
7. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$.
8. $e^{2\ln(2)}-\ln(\dfrac{4}{3})-\ln(3)$.
9. $\dfrac{(e^2)^2}{e^8 e^{-2}}$.

Exercice 12

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 2.3.2 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2+3x+1=0$
2. $4x^2-3x+5=0$
3. $x^2-8x+2=0$
4. $3x^2-5x-1=0$

Exercice 13

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré

Pour quels $a \in \mathbb{R}$, $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède-t-il 1 comme solution ?

Exercice 14

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré

Résoudre l'équation $x + 4 = x^2$.

Exercice 15

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré

Résoudre l'équation suivante, $b^2 - \dfrac{3}{b^2} - 2 = 0$.

Exercice 16

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF250 : Connaître les relations coefficients/racines pour un trinôme du second degré

Un père a 25 ans de plus que son fils et le produit de leur âge en années est de 116 (années^2). Calculer les âges respectifs du père et du fils.

Exercice 17

Savoir faire

- SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités
- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 3 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Soit x un réel tel que $1 \leq x \leq 3$.
Utiliser les propriétés des inégalités pour encadrer les réels suivants :
$4x - 3$, $1 - 3x$, $\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x^2}{4x-3}$ et $(4x - 3)(1 - 3x)$.

Exercice 18 *Manipuler des inégalités*

Savoir faire

- SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 3 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

On suppose les inégalités suivantes $1 \leq a \leq 2$, $3 \leq b \leq 5$, $-1 \leq c < 0 \leq 1$

Encadrer les quantités $a+b, a-b, -2a, \frac{1}{a}, \frac{1}{c}, ab, ac$ par des réels.

Exercice 19

Savoir faire

- SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités
- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 3 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

1. Soient x et y deux réels tels que $1 \leq x \leq 3$ et $2 \leq y \leq 4$. Encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}$.
2. Mêmes questions si $3 \leq x \leq 4$ et $-6 \leq y \leq -5$

Exercice 20

Savoir faire

- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 4.1, 4.2 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x+2 \leq 12$.
2. $x+4 \leq 3x-2$.
3. $\frac{1}{x-5} \geqslant 1$
4. $\frac{2x+4}{x-2} \leq 2$
5. $\frac{x+12}{5x-4} \geq -5$
6. $x^2-2x+1<0$
7. $x^2-6x+5 \geq 0$

Exercice 21

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples
- SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 4.3 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2-4x-5<0$
2. $x^2-4 \geq 0$
3. $-x^2+6x-9 \geq 0$

4. $3x^2 - 4x + 9 < 0$

Exercice 22

Savoir faire

- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples
- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF1255 : Savoir étudier le signe d'un quotient de polynômes de degré au plus 2

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 4.3 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(x+2)(3-x) \leq 0$
2. $\dfrac{x-2}{x+1} \leq 4$
3. $x > \dfrac{1}{x}$
4. $\dfrac{x}{3-x} \leq \dfrac{x}{x+2}$

1.7 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 23 *Niveau Avancé*
Si $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, 2]$, encadrer $x+y$, $x-y$, xy et $\dfrac{x}{y}$. *Indication : procéder avec méthode !*

Exercice 24 *Niveau Avancé*
Résoudre l'équation $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$. *Indication : on pourra discuter suivant si $x < 1$ ou $x \geq 1$.*

Exercice 25 *Niveau Expert*

1. Démontrer que pour tous a, b réels on a $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Quand a-t-on l'égalité ?
2. (a) Factoriser le trinôme $2 + x - x^2$.

   (b) En déduire que si $0 \leq x \leq 2$ alors $\sqrt{2+x} \geq x$.

Exercice 26 *Niveau Expert*
Trouver les réels x tels que $\dfrac{1}{x^2-1}$ soit comprise entre -2 et 2.
Attention : on a $a < b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ seulement si a et b sont de même signe !

Exercice 27 *Niveau Expert*
Etant donné un réel x, on définit la valeur absolue de x comme égale à x si x est positif, $-x$ sinon.

1. Représentez graphiquement la fonction valeur absolue qui transforme x en $|x|$.
2. Démontrez que pour tous réels x, y, $|xy| = |x||y|$.

3. Démontrez que pour tous réels x, y, $|x+y| \leq |x| + |y|$.
4. Démontrer que pour tout x, y réels, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq 2$.

Exercice 28 *Niveau Avancé* On rappelle que la valeur absolue d'un réel x vaut x si $x \geq 0$ et $-x$ sinon. Dessiner les domaines suivants sachant que la notation $\{a \in A, P(a)\}$ désigne l'ensemble des points a appartenant à A tels qu'une propriété $P(a)$ soit vérifiée :

1. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x + y \leq 1\}$.
2. $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$.
3. $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x|, |y|) \leq 1\}$.
4. $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq 1\}$.
5. $D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq x\}$.

Chapitre 2

AAV 2 : Effectuer un exercice élémentaire de géométrie du plan

- ☐ Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs du plan (SF 1184)
- ☐ Savoir représenter des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ à partir de leurs coordonnées (SF 1185)
- ☐ Savoir trouver l'équation d'une droite à partir de deux points (SF 27)
- ☐ Savoir interpréter géométriquement un coefficient directeur et une ordonnée à l'origine (SF 1260)
- ☐ Savoir calculer le produit scalaire (SF 1205)
- ☐ Savoir projeter un vecteur sur un axe quelconque d'un plan (à partir de sa norme et d'un angle) (SF 1197)

2.1 Vecteurs

Dans ce chapitre, on se place dans le plan. Lorsque l'on parlera de coordonnées, celles-ci seront prises par rapport à une base ou un repère orthonormé (que l'on ne précisera pas forcément).
(On pourrait aussi se placer dans l'espace à 3 dimensions. Un peu plus tard vous verrez qu'on peut aussi travailler dans des espaces de dimensions plus grande).

2.1.1 Définition et représentation graphique

Définition 7: Vecteurs

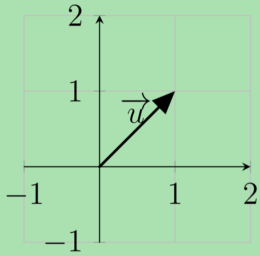
Etant donné deux points A et B, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un segment de droite orienté défini par

- une longueur.
- une direction.
- un sens.

Dans cette défintion du vecteur $\overrightarrow{AB}$ les points A (ni le point B d'ailleurs) ne fait partie de la définition : un *même* vecteur peut être attaché à des origines distinctes.

Exemple 9:

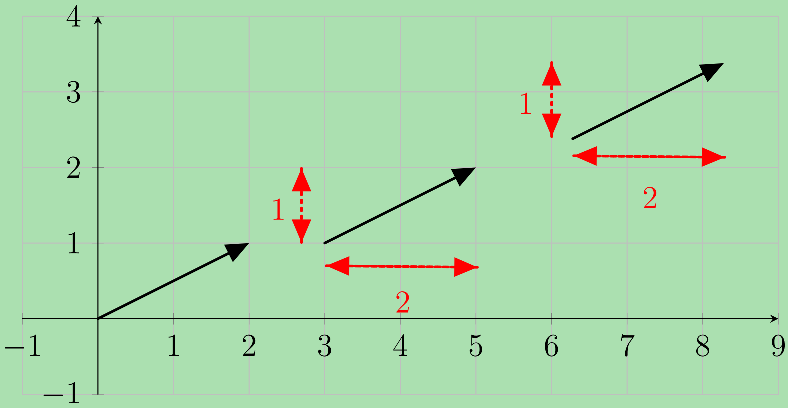
Le vecteur suivant est un vecteur de longueur 1 de direction la droite $y = x$ avec un sens bien défini.



Un vecteur est également caractérisé par ces coordonnées. Ces coordonnées sont calculées en faisant la différence entre les coordonnées des deux points formant le vecteur. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Exemple 10:

Ces trois vecteurs ne sont en fait qu'un seul et même vecteur comme en atteste le calcul de leurs coordonnées.

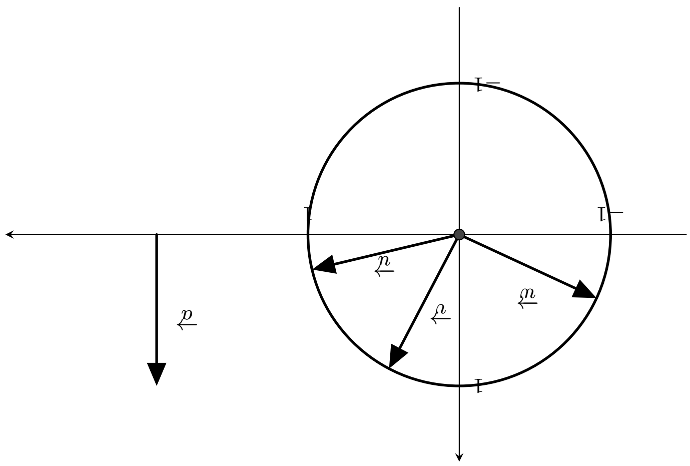


Dans la suite, nous noterons les vecteurs sans flèche.

Questions :

- Tracer un vecteur d'abscisse nulle et trois vecteurs différents de longueur 1.

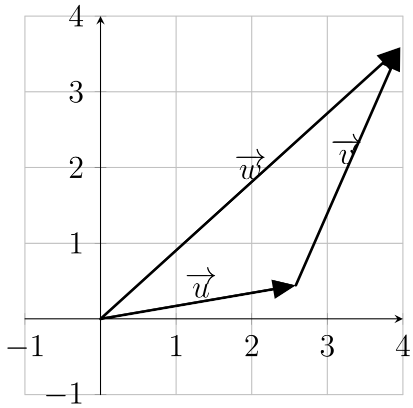
Le vecteur a est d'abscisse nulle, les trois vecteurs sont de longueur 1 car leur pointe est situé sur le cercle de rayon 1 centré en l'origine.



2.1.2 Combinaison linéaire

Il est possible de faire des opérations sur ces vecteurs afin de créer d'autres vecteurs.
Additionner des vecteurs :

On peut par exemple additionner deux vecteurs. Graphiquement cela correspond à mettre bout à bout les deux vecteurs pour en former un troisième. Par exemple, sur le dessin, en additionnant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on obtient $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Notons au passage que les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ sont obtenues en sommant les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.



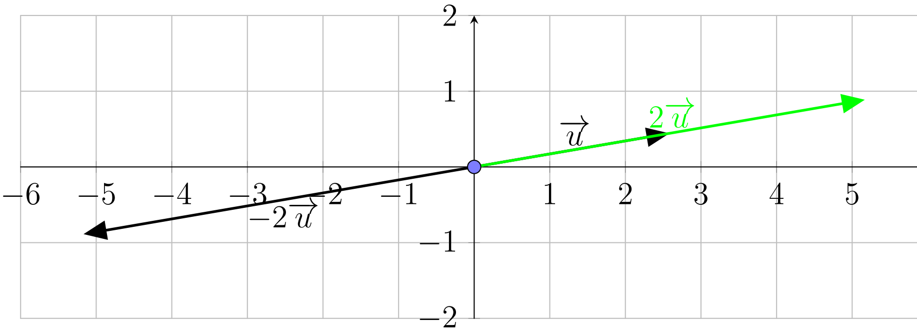
Si on revient à la représentation des vecteurs attachés à une origine, on a donc plus ou moins par définition la "relation de Chasles" :

Proposition 9: P

our tous points du plan A, B et C on a $\vec{A}B + \vec{B}C = \vec{A}C$.

Dilater/contracter des vecteurs :

On peut également multiplier par un scalaire un vecteur. Par exemple, sur le dessin, étant donné un vecteur $\overrightarrow{u}$, nous avons multiplié le vecteur par 2 et par -2 pour former $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Cela revient à multiplier la longueur de $\overrightarrow{u}$ par 2 et éventuellement changer son sens pour $-2u$. Notez que pour obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, il suffit de multiplier les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ par le facteur.



Et si on combine ces deux opérations ?

On obtient ce qu'on appelle une combinaison linéaire de vecteurs.

Définition 8: Combinaison linéaire

Soit u, v deux vecteurs, on appelle combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et v tout vecteur de la forme $\lambda_1 \overrightarrow{u} + \lambda_2 \overrightarrow{v}$ où λ_1 et λ_2 sont deux réels.

Remarque 13: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 1184 (SF 1185) :Trouver des combinaisons linéaires de vecteurs.*

Questions :

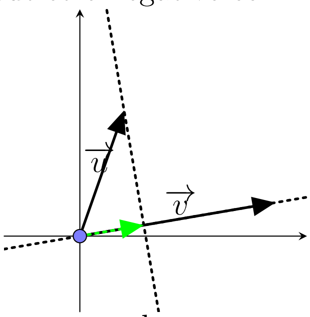
- Faites la question 1 de l'exercice 30 page 53.
- Tracez deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et tracez $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

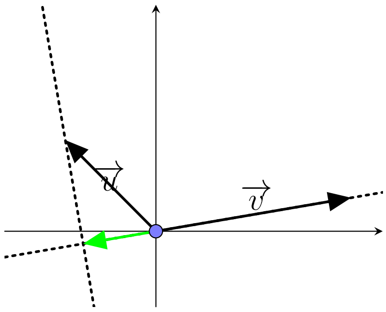
2.2 Produit scalaire

2.2.1 Ce que représente le produit scalaire

C'est quoi un produit scalaire ?

Donnons-nous deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs qu'on place en l'origine, projetons u sur la droite engendrée par $\overrightarrow{v}$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est le produit de la longueur algébrique de cette projection par la longueur de $\overrightarrow{v}$. Par algébrique, on sous-entend que la longueur peut être négative comme sur le second dessin.





Voici plusieurs exemples :

- sur le premier dessin le produit scalaire vaut $1 \times 2 = 2$ (longueur du vecteur vert fois longueur de v).
- sur le second dessin le produit scalaire vaut $-1 \times 2 = -2$ longueur du vecteur vert fois longueur de v).
- sur le troisième dessin le produit scalaire vaut 0 car la projection est envoyée sur l'origine donc la longueur du projeté est nulle. On remarque en passant que cela correspond au fait que les deux vecteurs soient orthogonaux.

A quoi ça sert en mathématiques ?

Le produit scalaire est un outil pratique pour

- Reconnaître l'orthogonalité de deux vecteurs (quand le produit scalaire est nul).
- Mesurer le "degré de colinéarité" de deux vecteurs : plus deux vecteurs auront même direction, plus la projection a une grande longueur et plus le produit scalaire est grand en valeur absolue.
- Faire des projections de vecteurs sur des axes et ainsi déterminer les coordonnées d'un vecteur suivant un axe.

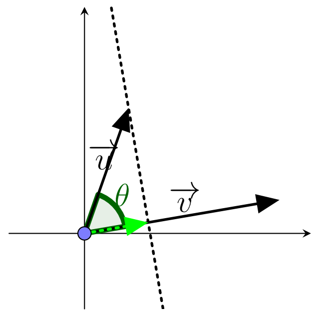
A quoi ça sert ailleurs qu'en maths ?

Le produit scalaire est un outil pratique en physique pour

- Faire des projections de vecteurs sur des axes et ainsi déterminer les coordonnées d'un vecteur suivant un axe du repère cartésien : vous verrez notamment le cas du pendule.
- Trouver le travail d'une force en physique.

2.2.2 Définitions du produit scalaire

Retrouvons la définition du produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ à l'aide du dessin ci-contre. Nous rappelons que le produit scalaire est le produit de la longueur de $\overrightarrow{v}$ par celle notée l du projeté vert du vecteur $\overrightarrow{u}$.



Questions :

- Déterminer la longueur du projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur la droite engendrée par $\overrightarrow{v}$ en fonction de θ.
- Donner alors l'expression du produit scalaire qui est le produit de cette longueur par la longueur de $\overrightarrow{u}$.

- En notant l la longueur du projeté : $\cos(\theta) = \frac{l}{||\overrightarrow{u}||}$. Donc $l = ||\overrightarrow{u}||\cos(\theta)$.
- Alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{v}|| \times l = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||\cos(\theta).$$

Définition 9: Produit scalaire

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$, on appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ la quantité

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||\cos(\theta)$$

où $||\overrightarrow{u}||$ et $||\overrightarrow{v}||$ sont les longueurs de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et θ l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exemple 11: Calcul d'un produit scalaire

Si nous connaissons la longueur de deux vecteurs et l'angle les séparant, nous pouvons calculer leur produit scalaire. Par exemple si $\overrightarrow{u}$ est de longueur 2 et $\overrightarrow{v}$ de longueur 4 et que l'angle les séparant est $\frac{\pi}{4}$ alors leur produit scalaire vaut

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2 \times 4 \times \cos(\frac{\pi}{4}) = 8\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Proposition 10: Orthogonaux

Si deux vecteurs sont orthogonaux alors leur produit scalaire est nul.

Preuve à faire par tous :

- Ecrire les hypothèses et leur traduction.
- Ecrire le but et sa traduction.
- Démontrer la proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux, $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

- Traduction : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- But : leur produit scalaire est nul.
- Traduction : L'angle séparant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $\frac{\pi}{2}$.
- Hypothèse : $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux.

Vous avez vu une autre formule permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de leurs coordonnées. Nous faisons ici le lien géométrique entre ces deux formules.

Proposition 11:

Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

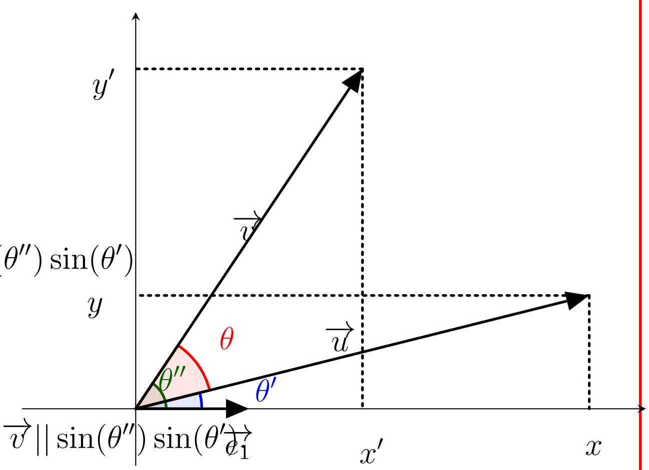
Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Pour prouver cette formule, on note $\vec{e_1}$ le vecteur $(1, 0)$ introduit θ' l'angle de $\vec{e_1}$ à $\vec{u}$ et θ'' l'angle de $\vec{e_1}$ à $\vec{u}$. On note que $\theta = \theta'' - \theta'$.
On admet que (vu plus tard dans l'UE)

$$\cos(\theta) = \cos(\theta'' - \theta') = \cos(\theta'')\cos(\theta') + \sin(\theta'')\sin(\theta')$$

si bien que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\theta'')\cos(\theta') + ||\vec{u}||.||\vec{v}||\sin(\theta'')\sin(\theta')$$



- Exprimer x en fonction de $||\vec{u}||$ et $\cos(\theta')$ à l'aide d'une relation trigonométrique. Exprimer de même x', y', y à l'aide de $||\vec{u}||, ||\vec{v}||, \theta'', \theta'$.
- En déduire la formule.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||\cos(\theta'')||\vec{u}||\cos(\theta') + ||\vec{v}||\sin(\theta'')||\vec{u}||.\sin(\theta') = x'x + y'y.$$

- Alors
- On a $\cos(\theta') = \frac{x}{||\vec{u}||}$, $\cos(\theta'') = \frac{x'}{||\vec{v}||}$, $\sin(\theta') = \frac{y}{||\vec{u}||}$, $\sin(\theta'') = \frac{y'}{||\vec{v}||}$.

Exemple 12: Calcul d'un produit scalaire

Il est très pratique de calculer un produit scalaire de deux vecteurs si on connaît leurs coordonnées. Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (-1, 3)$ ont pour produit scalaire :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times (-1) + 2 \times 3 = 5.$$

Questions :

- Placez un vecteur $\overrightarrow{u}$ de votre choix dans le plan. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de même longueur que $\overrightarrow{u}$. Choisissez $\overrightarrow{v}$ de sorte que le produit scalaire par $\overrightarrow{u}$ soit le plus grand possible puis le plus petit possible.

  Pour que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \cos(\theta)$ soit le plus grand, il faut que $\cos(\theta)$ soit maximal cad vale 1 : donc il faut que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$.

  Pour qu'il soit minimal, il faut $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$ car alors $\theta = \pi$ et le cosinus vaut -1 (sa valeur minimale).

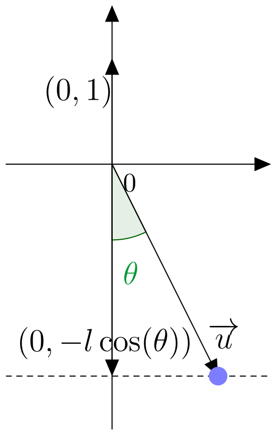
- Faites les questions 1 et 3 de l'exercice 33 page 54.

2.2.3 Projection d'un vecteur sur un axe

Questions :

- Faites l'exercice 42 page 57.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

Vous venez de voir dans l'exercice 42 que la projection sur l'axe des ordonnées est donnée par $(0, -l\cos(\theta)) = -l\cos(\theta)(0,1)$ (cosinus=côté adjacent sur hypoténuse).



Pourquoi mettre cet exercice dans le paragraphe sur le produit scalaire ?

En notant $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$, l'expression $-l\cos(\theta)$ est exactement le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_2} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||(0,1)|| \cos(\pi - \theta) = -l\cos(\theta)$. Ainsi calculer la longueur de la projection sur l'axe des ordonnées d'un vecteur revient à calculer le produit scalaire de ce vecteur par le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées.

De même si on fait le produit scalaire par le vecteur unitaire e_1 de l'axe des abscisses, on obtient la longueur du vecteur projection sur ce même axe : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_1} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||(1,0)|| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = l\sin(\theta)$.

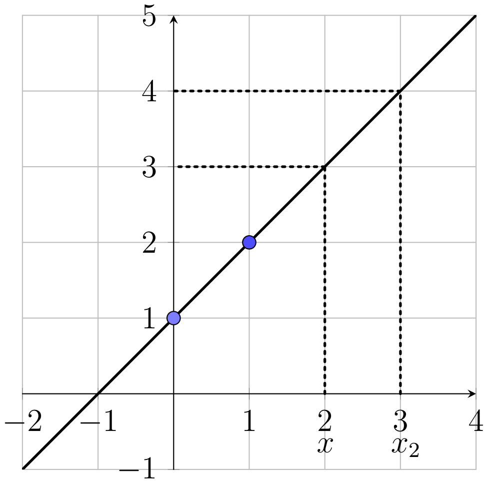
2.3 Equation de droite dans le plan

Un des objets géométriques que vous avez le plus rencontré en géométrie est la droite. Vous avez notamment décrit ce qu'on appelait une équation de droite.

Pourquoi une droite a-t-elle une équation ?

Vous connaissez les droites en tant qu'objet géométrique. Vous connaissez les équations en tant qu'égalités entre deux objets mathématiques. Quel est le lien entre les deux concepts ?

Imaginons qu'on trace une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$ et qu'on essaie de trouver tous les points qui y appartiennent. Il apparaît clair que le point $(0, 1)$ soit sur la droite dessinée. De même le point $(1, 2)$ y appartient. On remarque que pour ces deux points l'ordonnée est obtenue en ajoutant 1 à l'abscisse. Il y aurait donc une relation entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point de la droite.



Adoptons un autre point de vue. Fixons une abscisse x et regardons ce que doit vérifier y pour que le point (x, y) soit sur la droite. Il apparaît clair qu'il n'y a qu'un choix de y possible et que ce choix dépend du choix de x : par exemple, si on prend un autre x, le y qui marche n'est pas le même.

Ces deux points de vue permettent de constater qu'il y a une relation entre x et y qu'on va appeler **équation de la droite**. Ici c'est $y = x + 1$.

Comment vérifier qu'un point est sur une droite ?

Rien de plus simple : il suffit de regarder si les coordonnées du point vérifient l'équation de la droite.

Exemple 13:

- $(0, 1)$ appartient à la droite d'équation $y = x + 1$ car $1 = 0 + 1$.
- $(1, 1)$ n'appartient pas à la droite d'équation $y = x + 1$ car $1 \neq 1 + 1$.

Remarque 14: Un peu d'esprit critique !

Dans ce qui suit, on va montrer comment trouver l'équation d'une droite. Pour vérifier que vous ne vous êtes pas trompés, pensez toujours à vérifier que les points donnés dans l'énoncé vérifient bien l'équation que vous avez trouvée.

Questions :

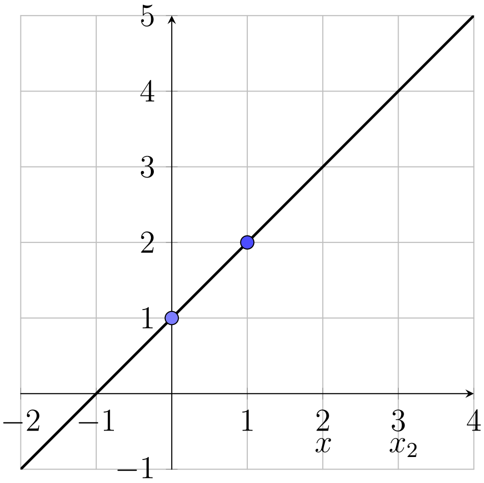
Déterminez si $(\frac{12}{11}, \frac{1}{11})$ appartient à la droite d'équation $y = -5x - 2$.

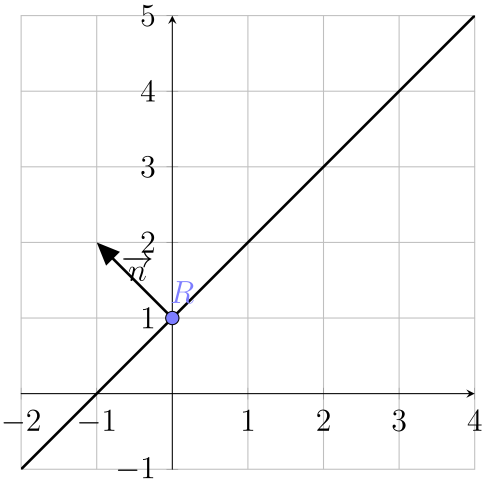
2.3.1 Forme de l'équation à l'aide du produit scalaire

On vous a toujours dit : "une droite a une équation de la forme $y = ax + b$ ou $x = a$". Dans ce paragraphe, on essaie de comprendre pourquoi à l'aide d'un peu de géométrie. Avant d'aboutir à ces deux formes (les formes usuelles du paragraphe suivant), il est nécessaire de comprendre géométriquement comment on peut caractériser une droite.

Il y a deux cas de figure permettant de tracer une droite :

- si on en connaît deux points.
- si on connaît un point et un vecteur normal (normal = orthogonal à la droite).





C'est cette seconde caractérisation que nous utilisons pour déterminer la forme générique d'une équation de droite.

Proposition 12:

Toute droite du plan possède une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y = c$$

où a, β, c sont réels. Cela signifie que les points (x, y) de la droite sont solutions de cette équation.

Preuve :

Donnons nous donc un point $O = (x_0, y_0)$ et un vecteur normal $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta)$. On cherche à trouver la relation que vérifierait un point $M = (x, y)$ qui serait sur la droite.

Comme on le voit sur le dessin un point $M = (x, y)$ est sur la droite si $u = \overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.

- Traduire l'orthogonalité entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ à l'aide d'un outil mathématique.
- En déduire l'équation de la droite sous la forme $\alpha x + \beta y = c$.

- M appartient à la droite si le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
- Or $\vec{u} \cdot \vec{n} = (x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta$.
  Donc $0 = \alpha x - \alpha x_0 + \beta y - \beta y_0$ en développant.
  Donc $\alpha x + \beta y = \alpha x_0 + \beta y_0$.

2.3.2 Formes usuelles

Toutes les droites du plan ont donc une équation de la forme $\alpha x + \beta y = c$ où α, β, c sont deux réels. Cependant, cette forme n'est pas celle que vous avez majoritairement rencontrée au lycée. Vous avez plutôt eu l'habitude d'exprimer y en fonction de x c'est-à-dire de voir y comme une fonction de x. Essayons donc de la faire à partir de l'équation

$$\alpha x + \beta y = c$$

Pour cela, il faut isoler y, ce qu'on peut faire en retranchant $-\alpha x$ des deux côtés si bien que

$$\beta y = -\alpha x + c.$$

Il s'agit ensuite de diviser par β des deux côtés, ce qui donne

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{c}{\beta}.$$

Une question se pose : peut-on diviser par β. Il est clair que si $\beta = 0$, cette opération échoue. Il y a donc deux cas à distinguer : $\beta = 0$ (qui correspondra aux droites verticales dans le repère cartésien) et $\beta \neq 0$.

Droite verticale

Si $\beta = 0$, $\alpha x + \beta y = c$ devient $\alpha x = c$ c'est-à-dire $x = \frac{c}{\alpha}$ dans la mesure où $a \neq 0$. Nous avons alors trouvé la forme d'équation d'une droite verticale : $x = a$ où a est un réel.

Remarque 15: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 27 : Trouver l'équation d'une droite (2/2).*

Questions :

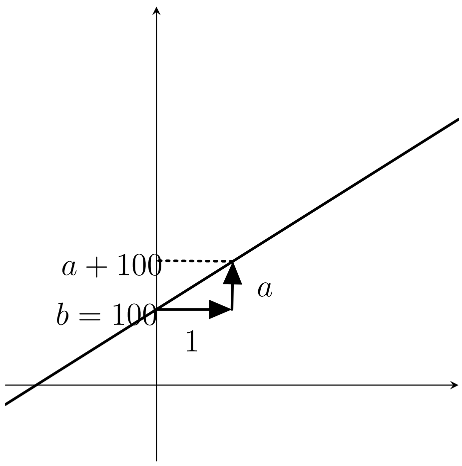
- Déterminer l'équation de la droite passant par les points $(2, 1), (2, -1)$.

Les deux abscisses des points sont identiques donc l'équation est $x = 2$.

Droite non verticale

Dans le cas contraire ($\beta \neq 0$), nous avons vu que l'équation de la droite peut s'écrire sous la forme $y = ax+b$. Notre objectif est double :

- comprendre le sens géométrique de a et b.
- voir comment trouver en pratique a et b.



Imaginons que nous gravissions une pente en montagne, que x désigne l'avancée en mètres et que y désigne l'altitude en mètres. Au point de départ, en $x = 0$, nous nous trouvons donc à l'altitude b mètres. Par exemple, si b vaut 100, cela signifie qu'à l'origine, nous sommes à 100 mètres au dessus du niveau de la mer. Le réel b est ce qu'on appelle l'ordonnée à l'origine. Autrement dit, c'est l'ordonnée du point de la droite correspondant à $x = 0$.

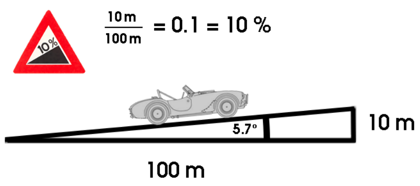
Définition 10: Ordonnée à l'origine

Soit D une droite contenant deux points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$. La droite coupe l'axe des ordonnées en un point $(0, b)$. Le réel b est appelé ordonnée à l'origine de la droite.

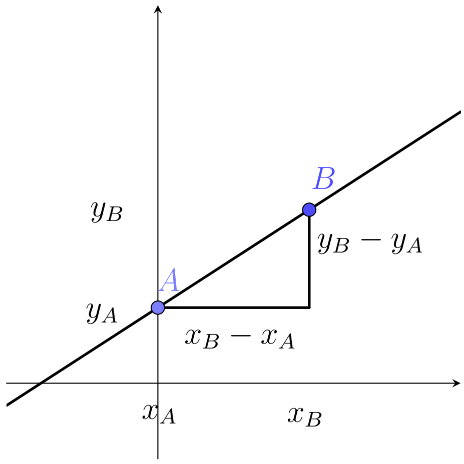
Exemple 14:

La droite d'équation $y = -x + 2$ a pour ordonnée à l'origine 2 puisqu'en $x = 0$, $y = 2$.

Reprenons maintenant notre exemple montagnard (dessin ci-dessus). En $x = 0$, nous sommes à une altitude de 100 mètres. L'équation étant de la forme $y = ax + 100$, si on avance d'un mètre ($x = 1$), l'altitude sera $y = a + 100$. Autrement dit, si on avance d'un mètre, on passe de 100 à $a + 100$ mètres c'est-à-dire qu'on monte de a mètres. Le réel désigne donc la pente (la quantité de laquelle on monte lorsqu'on avance d'une unité).



Par exemple, en montagne vous voyez des panneaux 10%. Ceci signifie que quand vous avancez d'un mètre vous montez de $10\% = 0.1$ mètres. Autrement dit quand vous avancez de 100 mètres, vous montez de 10 mètres.
Voici la définition mathématique de la pente a obtenue en faisant le quotient du nombre de mètres gravis sur le nombre de mètres avancés.



Définition 11: Pente

Soit D une droite contenant deux points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$. La pente ou coefficient directeur de la droite est définie par

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Passons maintenant à la pratique : comment peut-on déterminer l'équation d'une droite (et donc la pente et l'ordonnée à l'origine) à partir de deux points ?

Remarque 16: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 27 : Trouver l'équation d'une droite (1/2).*

Questions :

- Dessinez une droite pour chacun des cas suivants : $a > 0, b > 0$; $a > 0, b < 0$; $a < 0, b > 0$; $a < 0, b < 0$. Expliquez avec des mots ce que signifie chacun des cas graphiquement.
- Faites trois questions de l'exercice 37 page 56 et une question de l'exercice 35 page 55.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV 2

2.4 Travailler les savoir-faire

Dans cette section, vous trouverez les exercices d'entraînement sur les savoir-faire spécifiques.

Exercice 29

Savoir faire

- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 5 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

On se donne les vecteurs $u = (1, 1), v = (1, 2), w = (-4, 3)$. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $u, v, w, 2u, 2u + v, u + v + w$.

Exercice 30

Savoir faire

- SF1184 : Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 5 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

1. Soient $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$, $w = (-1, 1)$. Calculer et représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les combinaisons linéaires $u + v, u - 2w, u + v + w$.
2. Soient $u = (1, 2, 0)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (-4, -1, 1)$. Calculer la combinaison linéaire $u + 2(v + 3w)$.

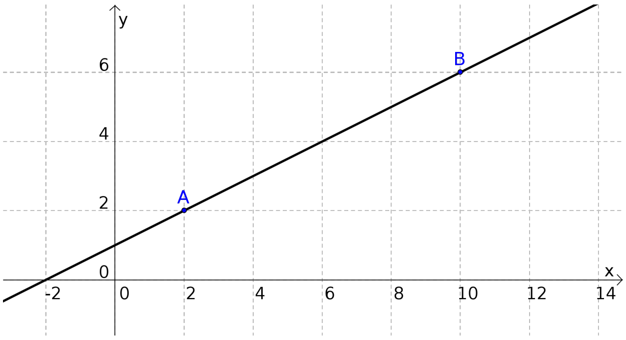
Exercice 31

Savoir faire

- SF27 : Savoir trouver l'équation d'une droite à partie de deux points

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 7 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

Quelle est l'équation de la droite AB ?



- ☐ $y(x) = -2x + 1/2$
- ☐ $y(x) = 1/2x - 2$
- ☐ $y(x) = 1/2x + 1$
- ☐ $y(x) = x - 1/2$

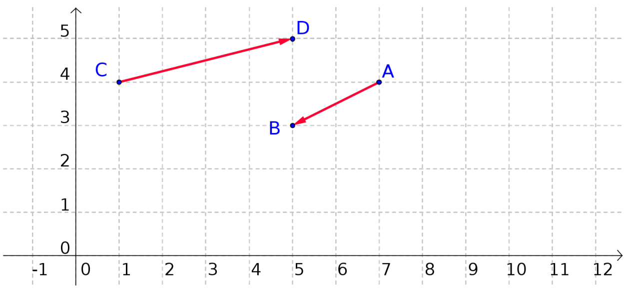
Exercice 32

Savoir faire

- SF1205 : Savoir calculer le produit scalaire entre deux vecteurs

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 6.1, 6.2 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

Combien vaut le produit scalaire entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?



- ☐ -9
- ☐ -21
- ☐ -55
- ☐ -7

Exercice 33 *produit scalaire*

Savoir faire

- SF1205 : Savoir calculer le produit scalaire entre deux vecteurs

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 6.1, 6.2 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

Déterminer le produit scalaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $u = (1,1), (2,1)$.
2. $u = (0,-4), (-2,-2)$.
3. Les vecteurs séparés d'un angle de π de norme 4 et 5.
4. Le vecteur de norme 2 faisant un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec l'axe des abscisses et le vecteur de norme 3 faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec l'axe des abscisses .

Exercice 34 *QCM-625*

Savoir faire

- SF27 : Savoir trouver l'équation d'une droite à partie de deux points

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 7 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

Quels sont le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b de la droite du plan d'équation $y = 2(x-1)+2$?

- ☐ $a = 2, b = 0$
- ☐ $a = 0, b = 2$
- ☐ $a = 2, b = -2$
- ☐ $a = 2, b = 2$

Exercice 35

Savoir faire

- SF27 : Savoir trouver l'équation d'une droite à partie de deux points

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 7 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

Déterminez l'équation de la droite passant par les points :

1. $(1,0)$ et $(0,1)$.
2. $(2,1)$ et $(-1,-2)$.
3. $(5,1)$ et $(-1,0)$.
4. (x_0, y_0) et (x_1, y_1).

Exercice 36

Savoir faire

- SF27 : Savoir trouver l'équation d'une droite à partie de deux points

En mesurant la vitesse d'un objet en chute libre à un temps $t = 1\,\mathrm{s}$ et $t = 5\,\mathrm{s}$, on trouve respectivement $12\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et $52\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. On sait que la vitesse d'un objet en chute libre dépend linéairement du temps (*i.e.* $v(t) = a.t + b$). Que valent a et b dans ce cas ?

- ☐ $a = 2$ et $b = 10$.
- ☐ $a = 10$ et $b = 2$.

- ☐ $a = 8$ et $b = 12$.
- ☐ $a = 12$ et $b = 8$.

Exercice 37 *Droite et géométrie*

Savoir faire

- SF1260 : Savoir interpréter géométriquement un coefficient directeur et une ordonnée à l'origine

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 7 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

Parmi les droites suivantes, lesquelles sont de pente positive et ont une ordonnée à l'origine négative :

1. $y = -2x + 2$
2. $y = 5x + 2$
3. $y = 5x$
4. $y = 2x - 4$
5. $y = x - 2$
6. $x = 1$
7. $x + 10y = 5$
8. $2x - y = 2$

Exercice 38

Savoir faire

- SF27 : Savoir trouver l'équation d'une droite à partie de deux points

Tracer les droites d'équation $y = 2x + 1$, $y = -x$, $y = 3x - 2$.

Exercice 39

Savoir faire

- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2
- SF1205 : Savoir calculer le produit scalaire entre deux vecteurs

Montrer de manière géométrique que la norme d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ de composantes (c_1, c_2) dans une base orthonormée est égale à $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Commenter le signe de cette norme $||\overrightarrow{V}||$. En déduire la norme $||\overrightarrow{AB}||$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini par les deux points A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère orthonormé. Généraliser l'expression obtenue pour $||\overrightarrow{AB}||$ au cas d'un espace à 3 dimensions.

Exercice 40

Savoir faire

- SF1184 : Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs

- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2

Soient les points A, B et C de coordonnées respectives $(-2, 3)$, $(1, 4)$ et $(4, -5)$ dans un repère donné. Déterminer de deux manières différentes les coordonnées du point D qui est tel que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 41

Savoir faire

- SF1184 : Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs
- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2

On considère les points et leurs coordonnées suivant, $A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du point M dans ces trois cas :

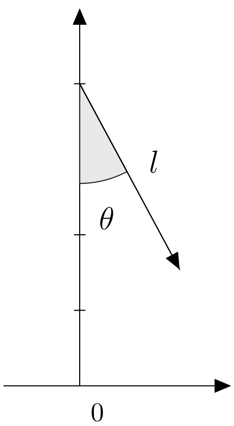
1. M est tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.
2. M est le milieu du segment $[BC]$.
3. $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 42

Savoir faire

- SF1197 : Savoir projeter un vecteur sur un axe quelconque

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 6.3 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

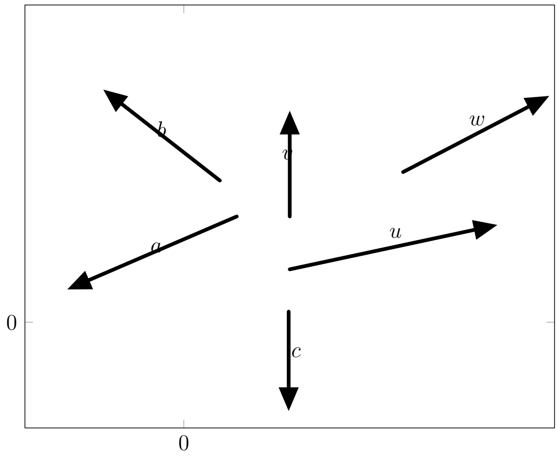


Déterminer les composantes de la projection du vecteur représenté sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées. Notez que la longueur du vecteur est l et qu'il fait un angle θ avec l'axe des ordonnées).

2.5 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 43 *Niveau Avancé*

1. Quels vecteurs sont de produit scalaire positif avec le vecteur $\overrightarrow{u}$? Même question pour "de produit scalaire négatif". Justifiez bien votre réponse.



2. Quel est le vecteur dont le produit scalaire avec $\overrightarrow{u}$ est le plus grand ? Justifiez bien votre réponse.
3. Présentez le maximum de manières d'agir sur le vecteur $\overrightarrow{v}$ afin d'augmenter le produit scalaire avec $\overrightarrow{u}$.

Exercice 44 *Niveau Expert*

On appelle vecteur normal à une droite en un point A, un vecteur dont le produit scalaire par $\overrightarrow{AM}$, pour tout point M sur la droite, est nul.

On appelle vecteur normal à un plan en un point A, un vecteur dont le produit scalaire par $\overrightarrow{AM}$, pour tout point M sur le plan, est nul.

1. On travaille dans le plan $\mathbb{R}^2$. On se donne une droite passant par le point $(1, 2)$ et de vecteur normal $(3, -1)$. Dessinez le vecteur normal et cette droite puis déterminez l'équation cartésienne de cette droite.
2. On travaille maintenant dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminez l'équation cartésienne du plan passant par $(1, 1, 2)$, de vecteur normal $(1, 2, -1)$.
3. De quel objet géométrique, $y = x$ est-elle l'équation lorsqu'on travaille dans l'espace $\mathbb{R}^3$?
4. A quoi ressemble une équation cartésienne de droite dans $\mathbb{R}^3$? Justifiez précisément.

Exercice 45 *Niveau Expert*

On se donne deux vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$, O étant l'origine du repère et M et M' deux points quelconques différents de l'origine.

1. On suppose que M est transformé en un point N tel que $\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OM}$. Comment choisir N' de sorte que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON'}$?
2. On suppose que M est transformé en un point N qui est l'image de M par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ de centre O. Comment choisir N' de sorte que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON'}$?

Exercice 46 *Niveau Expert*

1. Soit (D) la droite d'équation $x + y = 1$. Déterminez la distance (le plus court chemin) entre le point $(2, 2)$ et la droite (D).
2. Soit (P) le plan d'équation $x + y + 2z = 2$. Détermninez la distance (le plus court chemin) entre le point $(-1, 1, 2)$ et le plan (P).

Exercice 47 *Niveau Expert*
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A = (1, 1)$ et de rayon 1 est l'ensemble des points (x, y) qui sont à distance égale à 1 de A.

1. Déterminez l'équation de $\mathcal{C}$.
2. On note (D_a) la droite d'équation $y = x + a$. Déterminez les intersections entre la droite (D_a) et $\mathcal{C}$. Justifiez graphiquement votre résultat.

Exercice 48 *Niveau expert* Soient A et B deux points du plan. On note I le milieu de A et B.

1. En écrivant $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}$, démontrer que $OA^2 = OI^2 + AI^2 + 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA}$.
2. Si $OA = OB$, en déduire que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB}$.
3. Quelle est la relation entre $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$?
4. En déduire le fait suivant (vu au collège) : l'ensemble des points équidistants de A et B est la droite orthogonale à (AB) passant par I.

Chapitre 3

AAV 3 : Trouver le lien entre une fonction et son graphique

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ Savoir identifier un ensemble de départ ou d'arrivée (SF 1)
- ☐ Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image (SF 2)
- ☐ Savoir trouver un ensemble image (SF 3)
- ☐ Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation (SF 30)
- ☐ Savoir tracer le graphe de $x \mapsto f(x-a), f(ax), af(x)$ et $f(x)+a$ à partir du graphe de f (SF 201)

3.1 Motivations

Pour organiser le traffic des trains, il est nécessaire de savoir comment évolue la fréquentation au cours de la journée. Il est nécessaire de mettre davantage de trains au moment où la population les empruntant est la plus importante. Pour cela, il faut connaître la fréquentation aux différents temps t de la journée. Afin d'étudier cette fréquentation et de prévoir l'avenir, les questions suivantes sont utiles :

- A quelle heure a-t-on un pic, un minimum de fréquentation ?
- A quelle période de la journée, la fréquentation baisse-t-elle ? augmente-t-elle ?

Pour cela, il est très utile de pouvoir tracer la fréquentation en fonction du temps. Puisque la fréquentation varie dans le temps, on dit que c'est une **fonction** du temps. Ce chapitre introduit la notion de fonction et ses principaux attributs et en donne quelques exemples. Vous verrez plus tard que pour savoir quand on atteint un pic, quand la fréquentation baisse, on a besoin d'un outil appelé la dérivée.

3.2 Qu'est-ce qu'une fonction ?

3.2.1 Définition et représentation graphique

Définition 12: Fonction

Soient deux sous-ensembles I et J de $\mathbb{R}$ On appelle **fonction** de I dans J un procédé qui à un élément de I associe un unique élément de J. On note cet objet :

$$\begin{array}{rccc} f & : & I & \to & J \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- I est appelé **ensemble de départ**, J **ensemble d'arrivée**.
- pour x dans I, $f(x)$ est appelée **image** de x de par f.
- pour y dans J, s'il existe x tel que $f(x) = y$, x est appelé **antécédent** de y par f.

Exemple 15:

Vous avez déjà rencontré beaucoup de fonctions définies par une expression comme :

- La fonction constante $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 1 \end{array}$
- $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$
- $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$

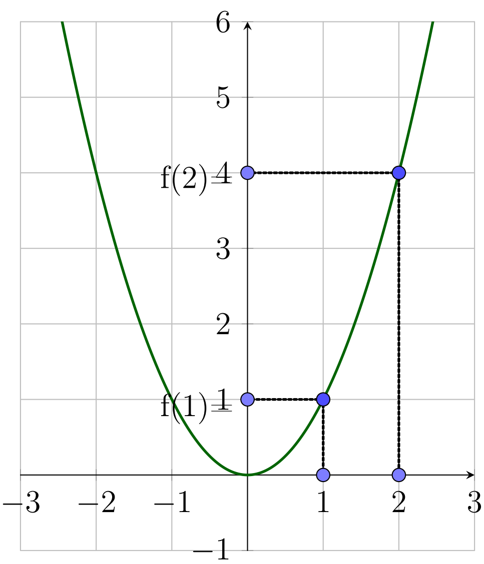
Il faut savoir qu'une fonction peut être définie par morceaux : la fonction valeur absolue en est un célèbre exemple :

$$\begin{array}{rcccc} |\cdot| & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Comment représente-t-on une fonction ?

Pour représenter graphiquement une fonction $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$, on utilise le repère de $\mathbb{R}^2$: en abscisse, on place les valeurs de x, en ordonnée celles de $f(x)$. Ainsi le graphe de la fonction correspond à l'ensemble des points $(x, f(x))$. Par exemple, considérons la fonction $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

Pour $x = 1$, $f(x) = 1^2 = 1$, pour $x = 2$, $f(x) = 2^2 = 4$. Pour placer ces deux points, on place les points $(1, 1)$ et $(2, 4)$ comme on le voit sur le dessin. On fait la même chose pour tous les x de l'ensemble de départ et on obtient le tracé suivant.



Qu'est-ce que trouver l'image de x_0 ?

Il s'agit de calculer simplement $f(x)$. Graphiquement (cf dessin) cela revient à tracer la droite verticale $x = x_0$ et à regarder l'intersection avec le graphe de la fonction pour obtenir $f(x_0)$.

Qu'est-ce que trouver les antécédents de y_0 ?

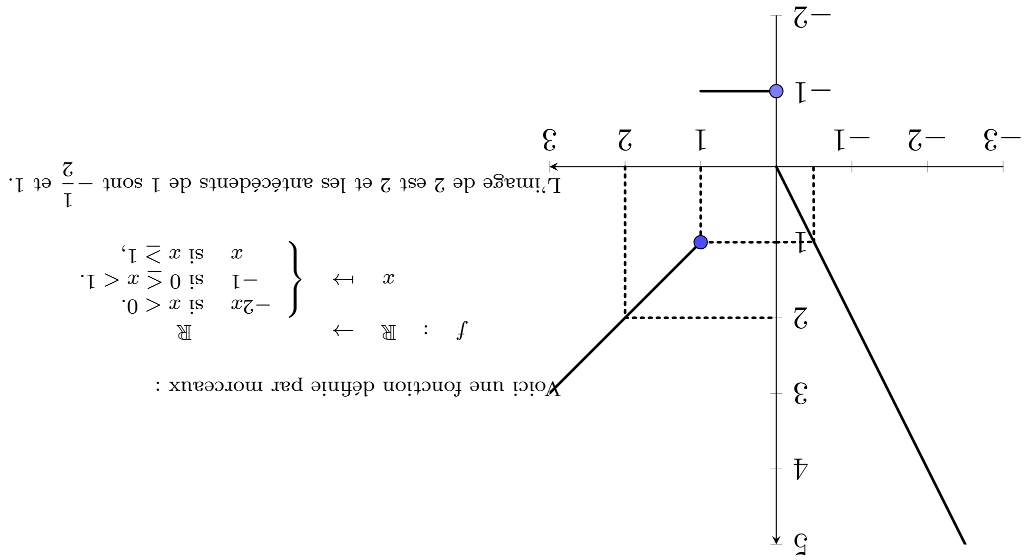
Il s'agit de trouver les x tels que $f(x) = y_0$ cad les x dont les images sont y_0. Graphiquement (cf dessin) cela revient à tracer la droite horizontale $y = y_0$ et à regarder l'intersection avec le graphe de la fonction pour obtenir x. Par exemple on constate que $y = 3$ a deux antécédents par la fonction x^2. Ceci est normal puisque $x^2 = 3$ a deux solutions qui sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Remarque 17: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF1,2 Savoir identifier un ensemble de départ ou d'arrivée, calculer un antécédent, une image.*

Questions :

- Inventez une fonction définie par morceaux.
- Dessinez une fonction de votre choix définie sur $\mathbb{R}$, dessinez l'image de 2 et les antécédents de 1 par votre fonction.
- Faites une question de l'exercice 51 page 69.



3.2.2 Ensemble image

Définition 13: Ensemble image

Soit $f : I \to J$ une fonction avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On appelle ensemble image, l'ensemble des éléments de J qui ont un antécédent par f. Mathématiquement, on le note

$$Im(f) = f(I) = \{f(x) | x \in I\} = \{y \in J | \exists x \in I, f(x) = y\}.$$

Remarque 18: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 3 : Trouver l'ensemble image d'une fonction* .

Questions :

- Dessinez une fonction de votre choix et dessinez son ensemble image sur l'axe des ordonnées.
- Faites deux questions de l'exercice 56 page 71.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

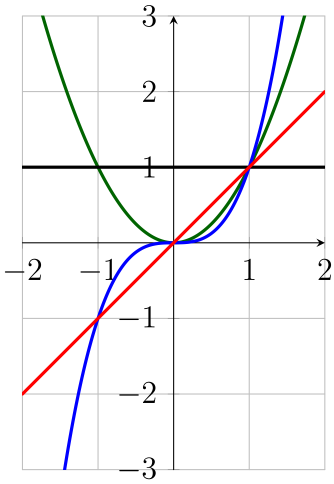
3.3 Fonctions usuelles

Nous donnons dans cette section des exemples de fonctions appelées usuelles qu'il faut connaître (c'est-à-dire connaître leur allure générale, les valeurs importantes, comment elles se comparent entre elles...)

3.3.1 Fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales sont des fonctions qui se construisent à partir des puissances de x. Par exemple, $f : x \mapsto x^2 - 5x + 2$ est une fonction polynomiale. Ces fonctions sont des combinaisons linéaires des fonctions puissances $f_k : x \mapsto x^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ dont voici quatre exemples célèbres :

- en noir : $f_0 : x \mapsto 1$.
- en rouge : $f_1 : x \mapsto x$.
- en vert : $f_2 : x \mapsto x^2$.
- en bleu : $f_3 : x \mapsto x^3$.

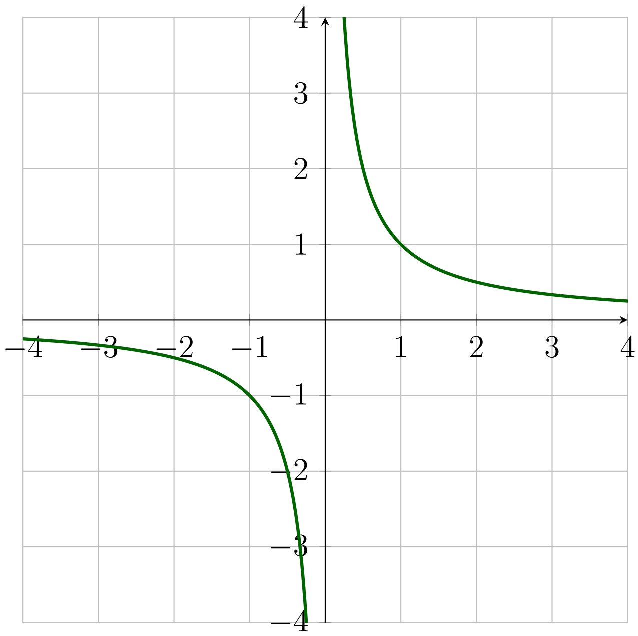


3.3.2 Fonction inverse

Définition 14: Fonction inverse

On définit la fonction inverse sur $\mathbb{R}^\star$ par $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$.

Cette fonction n'est pas définie en 0 (on ne peut pas diviser par 0).

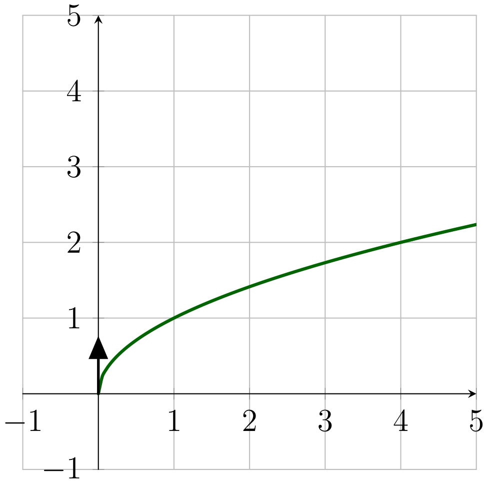


3.3.3 Racine carrée

Définition 15: Racine carrée

On définit la racine carrée sur $\mathbb{R}$ par $\begin{array}{rccc} \sqrt{\cdot} & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & x \end{array}$ où x est la solution positive de $x^2 = t$ (équation en x).

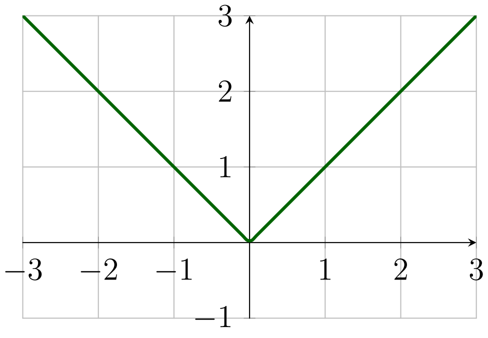
Cette fonction a une tangente verticale en 0. Pour la tracer, il suffit de faire, sur les réels positifs, une symétrie de x^2 par rapport à $y = x$.



3.3.4 Valeur absolue

Définition 16: Valeur absolue

On définit la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{array}{rcl} |\cdot| : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{array}$$



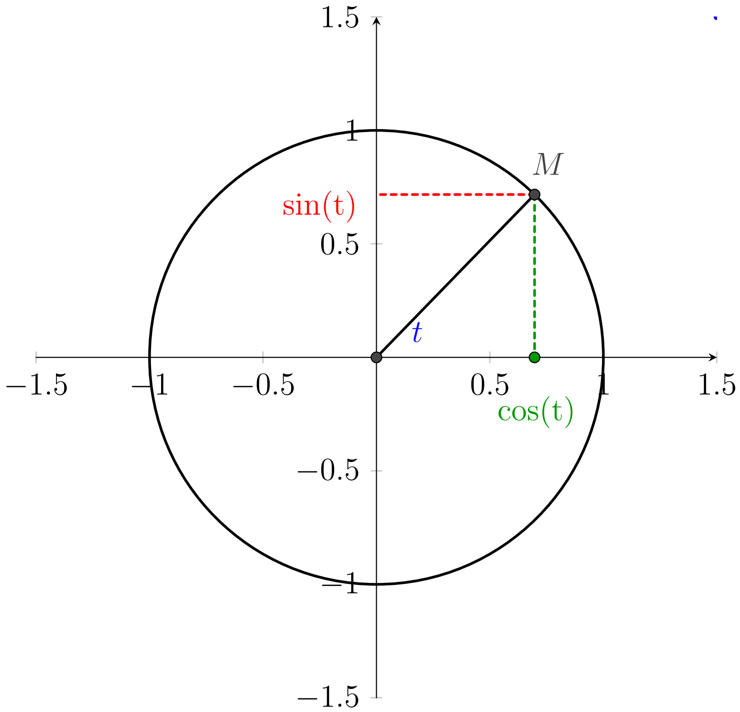
3.3.5 Fonctions trigonométriques

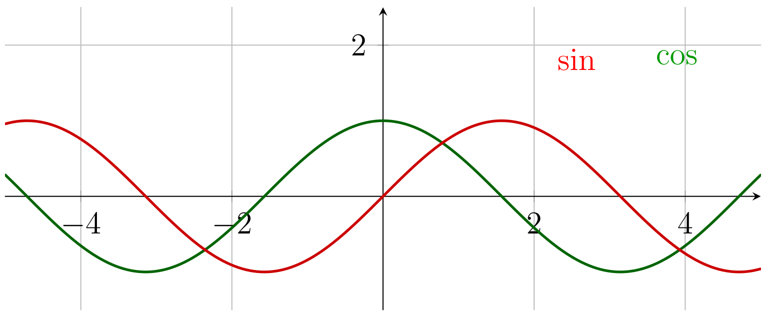
Considérons un cercle de centre 0 et de rayon 1. Plaçons un point M formant un angle t avec l'axe des abscisses. On définit alors $\cos(t)$ comme l'abscisse de ce point et $\sin(t)$ son ordonnée. Si on fait évoluer le point M sur le cercle, cette abscisse et cette ordonnée oscillent entre -1 et 1. Par exemple quand $t = 0$, l'abscisse $\cos(t)$ vaut 1, quand $t = \frac{\pi}{2}$, $\cos(t) = 0$. On définit alors la fonction cos qui est la fonction des abscisses de M

$$\begin{array}{cccc} \cos & : & \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ & & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

et sin qui est la fonction des ordonnées de M

$$\begin{array}{cccc} \sin & : & \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ & & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}.$$





Pour avoir une autre vision de comment se trace le sinus, regarder la vidéo de 12min44 à 13min30 : *Derivative formulas through geometry | Essence of calculus, chapter 3* de 3blue1brown.

Remarque 19: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 30 : Savoir tracer le graphe des fonctions usuelles*

Questions :

- Expliquez sur un dessin comment sont obtenus les graphes des fonctions $\cos, \sin$ partir du cercle trigonométrique.
- Faites l'exercice 49 page 69.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

3.4 Translation et dilatations de fonctions

Dans cette section, l'objectif est de vous montrer comment un graphe de fonction évolue au travers des opérations d'addition et de multiplication. Savoir tracer ces évolutions vous sera très utile en physique et en traitement de signal lorsqu'il s'agira d'étudier des signaux de fréquences différentes.

Remarque 20: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF201 Savoir tracer le graphe de $f(x-a)$, $f(ax)$, $af(x)$ et $f(x)+a$ à partir du graphe de f.*

En résumé si on a une fonction f donnée et si on se donne a non nul :

- le tracé de $f(x)+a$ est obtenu en faisant une translation du tracé de f de $+a$ sur l'axe des ordonnées.
- le tracé de $af(x)$ est obtenu en faisant une dilatation du tracé de f de $+a$ sur l'axe des ordonnées.
- le tracé de $f(x+a)$ est obtenu en faisant une translation du tracé de f de $-a$ sur l'axe des abscisses.
- le tracé de $f(ax)$ est obtenu en faisant une dilatation du tracé de f de $\frac{1}{a}$ sur l'axe des abscisses.

Questions :

- Faites deux exemples de l'exercice 55 70.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices de l'AAV 3

3.5 Travailler les savoir-faire

Dans cette section, vous trouverez les exercices d'entraînement sur les savoir-faire spécifiques.

Exercice 49

Savoir faire

- SF30 : Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 10 du cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

En notant les valeurs connues (0...) et les tangentes remarquables lorsqu'elles existent, tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$x \mapsto 1, \quad x \mapsto x, \quad x \mapsto \ln(x), \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto \sin(x), \quad x \mapsto \cos(x), \quad x \mapsto e^x,$$
$$x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto |x|$$

Exercice 50

Savoir faire

- SF2 : Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image
- SF10 : Résoudre une équation du second degré

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 9.1 du cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x - 1 + x^2}{x - 1}$. Résoudre l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 51

Savoir faire

- SF2 : Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 9.1 du cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

1. Soit $f : x \mapsto x^2+1$. Déterminez l'image de 0 et 2 par f. Déterminez le ou les antécédent de 5 par f.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$. Déterminez l'image de 0 et 2 par g. Déterminez le ou les antécédent de 5 par g.

Exercice 52

Savoir faire

- SF2 : Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 9.1 du cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

Faire les exercices suivants aux adresses :
• `https://fr.khanacademy.org/math/algebra/algebra-functions/evaluating-functions/e/functions_1`
• `https://fr.khanacademy.org/math/algebra/algebra-functions/function-inputs-and-outputs e/match-inputs-to-outputs-from-a-graph`

Exercice 53

Savoir faire

- SF3 : Savoir trouver un ensemble image

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 9.2 du cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

Faire l' exercice suivant à l'adresse : `https://fr.khanacademy.org/math/algebra/algebra-functions domain-and-range/e/domain_and_range_0.5`

Exercice 54

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF30 : Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 11 du cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

Mettre le polynôme du second degré, $\mathcal{P}(t) = 3t^2 + 2t - 1$, sous sa forme canonique, $\mathcal{P}(t) = \alpha(t-\beta)^2 + \gamma$ [α, β et γ étant des nombres réels]. Tracer la fonction $\mathcal{P}(t)$ et commenter l'intérêt de la forme canonique.

Exercice 55 *Dilatation translation*

Savoir faire

- SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 11 du cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

Tracer sur un même graphique les fonctions $x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(x)+1, x \mapsto \cos(x-2), x \mapsto -2\cos(x)$
Tracer de même sur un autre graphique :
$x \mapsto \exp(x), x \mapsto \exp(x-3), x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{2}, x \mapsto \exp(-2x)$

Exercice 56

Savoir faire

- SF3 : Savoir trouver un ensemble image

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 9.2 du cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

1. Trouver l'image de $\mathbb{R}$ par les fonctions suivantes : $x \mapsto \sin(x), x \mapsto x^2, x \mapsto e^x$.
2. Trouver l'image de $\mathbb{R}_+$ par les fonctions suivantes : $x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto e^x$.
3. Trouver l'image de $\mathbb{R}_+^\star$ par les fonctions suivantes : $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 57

Savoir faire

- SF2 : Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image
- SF3 : Savoir trouver un ensemble image
- SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |6-2x|$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer les antécédents de $y = 2$ par f.
   Résoudre graphiquement l'inéquation $|6-2x| \leq 2$.
3. A partir du graphe de f, déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([-1,1[)$, $f(]5,+\infty[)$ et $f([1,7])$.

Exercice 58

Savoir faire

- SF2 : Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image
- SF3 : Savoir trouver un ensemble image
- SF30 : Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation

Rappeler l'allure du graphe de la fonction $f : x \to \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer, s'ils existent, les antécédents par f de $y_1 = 3$, $y_2 = -5$.
2. A partir du graphe de f, déterminer $f([2,3[)$, $f(]-\infty,-2[)$, $f(]0,4])$ et $f([5,+\infty[)$.

Exercice 59

Savoir faire

- SF30 : Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation
- SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

A l'aide d'un changement de coordonnées, décrire géométriquement le graphe de f à partir du graphe de $g : x \mapsto \frac{1}{x}$, préciser son centre de symétrie et donner son allure.

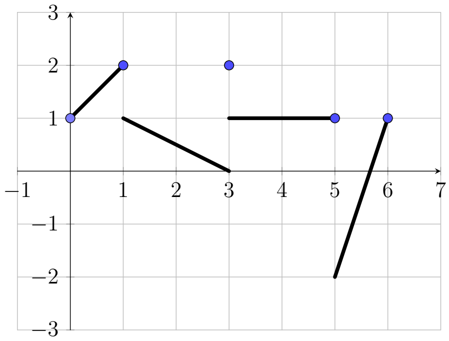
a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+5} - 3$

b) $f : x \mapsto \dfrac{4x-7}{x-2}$

3.6 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 60 *Niveau Avancé*On se donne f une fonction définie sur $[-1, 5]$ et d'ensemble image $[-3, 4]$. Quel est l'ensemble de définition et l'ensemble image de $g : x \mapsto 2f(x+3)$ et $h : x \mapsto f(4x) - 1$? Justifiez votre résultat par le calcul et graphiquement (deux méthodes).

Exercice 61 Déterminez l'expression de la fonction f dont le graphe est ci-dessous. Vous noterez que les valeurs aux bords sont matérialisés par les points bleus.



Exercice 62 *Niveau Expert*

Bagage admis : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est bijective si tout élément de J admet un unique antécédent
On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est injective si tout élément de J admet au plus un antécédent.
On dit qu'une fonction $f : I \to J$ est surjective si tout élément de J admet au moins un antécédent.

1. Faire le dessin d'un graphe d'une fonction injective, d'une fonction surjective, d'une fonction bijective.
2. Vérifier que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^3$ est bijective.
3. Vérifier que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x}$ est injective mais pas surjective.
4. Vérifier que la fonction $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est surjective mais pas injective.
5. Choisir des ensembles E et F de sorte que la fonction carrée définie sur $f : E \to F$ définie par $f(x) = x^2$
   (a) bijective.
   (b) injective non bijective.

   (c) surjective non bijective.
   (d) ni injective ni bijective.

6. Si $f : I \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective, comment choisir $J \subset \mathbb{R}$ pour que, sans changer la formule de f, la fonction $f : I \to J$ soit surjective ?

Exercice 63 *Expert+*
On réutilise les notions de fonctions injectives/surjectives/bijectives de l'exercice précédent. On se donne $f : I \to J$ et $g : J \to K$ pour I, J, K trois intervalles de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.
2. On veut démontrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.
   (a) Supposons que f et g sont injectives. Soit $y \in K$, supposons que y a un antécédent x par $g \circ f$. Vérifier que $f(x)$ est le seul antécédent de y par g, et en déduire que y n'a qu'un antécédent
   (b) Conclure.
3. En adaptant le raisonnement ci-dessus, démontrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.
4. Démontrer que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi.
5. On suppose $g \circ f$ injective et f surjective. Montrer que g est injective.
6. On suppose $g \circ f$ surjective et g injective. Montrer que f est surjective.

Chapitre 4

Exercices Bloc 1 : exercices liant les savoir-faire

Dans ce chapitre, vous trouverez le format d'exercice qui sera posé à l'évaluation. Ces exercices sont constitués de savoir-faire rassemblés dans un contexte commun. Ils peuvent mettre en jeu des savoir-faire d'un ou plusieurs AAV du bloc.

Exercice 64

Savoir faire

- SF1260 :Savoir interpréter géométriquement un coefficient directeur et une ordonnée à l'origine
- SF3 : Savoir trouver un ensemble image
- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples
- SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités

1. Tracer les droites d'équation $y = x - 4$ et $y = 2x - 3$.
2. Soit f la fonction qui à x associe $2x-3$. Quelle est l'ensemble image $f([0, 1])$? L'illustrer sur le dessin.
3. Trouver tous les x tels que $x + 4 < 2x - 3$. Illustrer votre réponse sur le dessin.
4. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x+4}{2x-3} < 1$.

Exercice 65

Savoir faire

- SF1260 :Savoir interpréter géométriquement un coefficient directeur et une ordonnée à l'origine
- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2 à partir de leurs coordonnées
- SF1205 : Savoir calculer le produit scalaire
- SF 9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, identités remarquables, fractions. . .)
- SF10 : Savoir résoudre une équation du second degré

1. Tracer les droites d'équations $y = -x + 2$ et $y = 2x + 3$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $u(x)$ le vecteur de coordonnées $(x, -x + 2)$ et $v(x)$ le vecteur de coordonées $(x, 2x + 3)$.

(a) Sur le dessin précédent, comment peut-on placer $u(x)$ et $v(x)$? Toujours sur le dessin, pouvez-vous trouver un x tel que $u(x) = v(x)$?

(b) Calculer le produit scalaire $\langle u(x), v(x)\rangle$.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de x les deux vecteurs $u(x)$ et $v(x)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 66

Savoir faire

- SF1205 : Savoir calculer le produit scalaire
- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2 à partir de leurs coordonnées
- SF1184 : Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs du plan
- SF 8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un, ou d'ordre deux de type $x^2 = a$
- SF10 : Savoir résoudre une équation du second degré

On note u le vecteur de coordonnées $(1, 2)$ et v le vecteur de coordonnées $(-1, 3)$.

1. Représenter dans le plan les vecteurs u, v et $2u + 3v$. Tracer la droite passant par l'origine et dirigée par u.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer le produit scalaire entre les vecteurs $x.u$ et v. Pour quelle(s) valeur(s) de x less vecteurs xu et v sont-ils orthogonaux ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ les vecteurs xu et $u + xv$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 67

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)
- SF10 : Résoudre une équation du second degré

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 1,2 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

On cherche à résoudre l'équation suivante : $(x + 1)(x - a) - 12 = 0$

1. Développer l'expression $(x + 1)(x - a)$ et la mettre sous la forme d'un trinôme du second degré.
2. Résoudre l'équation lorsque $a = 1$.
3. Résoudre l'équation lorsque $a = 5$.
4. On veut maintenant trouver les x tels que $\dfrac{x-5}{x} - \dfrac{12}{(x+1)x} = 0$. Réduire au même dénominateur $\dfrac{x-5}{x} - \dfrac{12}{(x+1)x}$.
5. Déduire de ce qui précède les solutions de $\dfrac{x-5}{x} - \dfrac{12}{(x+1)x} = 0$.

Exercice 68

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités
- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples

Soit f la fonction qui à x associe $2x^2 - 3x - 2$.

1. Déterminer les racines de ce trinôme et en déduire une factorisation de $2x^2 - 3x - 2$.
2. Quels sont les antécédents de 0 par f ?
3. Résoudre les inéquations $2x + 1 \leq 0$ et $x - 2 \leq 0$.
4. En déduire les solutions de $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$.
5. On suppose maintenant que $3 \leq x \leq 4$, en utilisant sa factorisation donner un encadrement de $2x^2 - 3x - 2$. Quel est l'ensemble image $f([3, 4])$?

Exercice 69

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)
- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF1187 : Savoir résoudre des inéquations simples

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 1,2,4 du cours *Mener des calculs élémentaires* ?

On étudie l'expression $\dfrac{7x^2 - 343}{2x^2 - 16x + 14}$.

1. Factoriser $7x^2 - 343$.
2. Résoudre $7x^2 - 343 = 0$.
3. Factoriser $2x^2 - 16x + 14$ après en avoir trouvé les racines.
4. En déduire une simplification de $\dfrac{7x^2 - 343}{2x^2 - 16x + 14}$ sous la forme $c\dfrac{x-a}{x-b}$ où a, b, c sont des réels qu'on déterminera.
5. En déduire la résolution de l'inéquation $\dfrac{7x^2 - 343}{2x^2 - 16x + 14} \leq 2$.

Exercice 70

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)
- SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le chapitre *Mener des calculs élémentaires* ?

1. Résoudre $t + 3 = 2t + 7$.

2. On choisit t dans l'intervalle $]1,8]$. Déterminer un encadrement de $(t+1)(t+3)$ et de $\frac{12}{(t+1)(t+3)}$.
3. Est-ce que 2 est solution de $\frac{12}{(t+1)(t+3)} \leq 1$?
4. En réduisant au même dénominateur puis en choisissant les valeurs $t = 0$ et $t = 1$, trouver a et b tels que
$$\frac{12}{(t+1)(t+3)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+3}.$$
5. En déduire les solutions de $\frac{1}{t+1} > \frac{1}{t+3}$.

Exercice 71

Savoir faire

- SF27 : Savoir trouver l'équation d'une droite à partie de deux points
- SF1184 : Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs
- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2
- SF1205 : Savoir calculer le produit scalaire entre deux vecteurs

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

On cherche à trouver l'équation d'une droite de deux façons différentes.

1. Déterminer l'équation de la droite passant par les points $A = (1, -1)$ et $B = (2, 3)$ par la méthode que vous connaissez.
2. Représenter la droite ainsi que les points A et B.
3. (a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{n} = (4, -1)$ par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (c) On se donne un point M de coordonnées (x, y) quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$?
   (d) L'ensemble des points M appartenant à la droite sont ceux tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ soient orthogonaux. Calculez donc le produit scalaire de $\overrightarrow{AM}$ par $\overrightarrow{n}$ et retrouvez l'équation de la droite.

Exercice 72

Savoir faire

- SF1184 : Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs
- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2
- SF1260 : Savoir interpréter géométriquement un coefficient directeur et une ordonnée à l'origine
- SF1205 : Savoir calculer le produit scalaire entre deux vecteurs

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le chapitre *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

On considère la droite d'équation $y = -2x + 5$.

1. Est-elle d'ordonnée à l'origine et de pente positive ?
2. Démontrer que les points $(0, 5)$ et $(2, 1)$ appartiennent à la droite.
3. Soient $\overrightarrow{u} = (0, 5)$ et $\overrightarrow{v} = (2, 1)$. Représenter ce vecteur ainsi que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et la droite.
4. Calculer $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ et démontrer que le produit scalaire de $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ par $(2, 1)$ est égal à 0.

Exercice 73

Savoir faire

- SF27 : Savoir trouver l'équation d'une droite à partie de deux points
- SF1184 : Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs
- SF1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2
- SF1197 : Savoir projeter un vecteur sur un axe quelconque

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 5, 7 du cours *Effectuer un exercice de géométrie élémentaire dans le plan* ?

On se donne le vecteur $\overrightarrow{u}$ de norme 2 et d'angle θ avec l'axe des ordonnées.

1. Représenter graphiquement $\overrightarrow{u}$ et $-2\overrightarrow{u}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'origine notée O.
2. Déterminer en fonction de θ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$.
3. Soit M un point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. Déterminer l'équation de la droite passant par les points O et M.

Exercice 74

Savoir faire

- SF1 : Savoir identifier un ensemble de départ ou d'arrivée
- SF2 : Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image
- SF3 : Savoir trouver un ensemble image
- SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

On considère la fonction $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & x^2 + 4 \end{array}$

1. Quel est l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de la fonction.
2. Représenter sur le même graphique $x \mapsto f(x)$, $t \mapsto 2f(t)$, $t \mapsto f(t-2)$.
3. Déterminer l'image de 4 par f ainsi que les antécédents de 5 par f.
4. Déterminer l'image de $[1, +\infty[$ par f.

Exercice 75

Savoir faire

- SF2 : Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image
- SF30 : Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation

- SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Trouver le lien entre une fonction et son graphique* ?

1. Soit la fonction $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & t & \mapsto & \dfrac{x-1}{x+3} \end{array}$. Déterminer l'image de 5 par g ainsi que les antécédents de 5 par g.
2. Tracer sur un graphique les fonctions exp, cos et ln.
3. Tracer sur un autre graphique sin, $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \sin(x) + 1$.