

## Optique physique

### AAV n°7 : être capable de calculer l'éclairement produit par la diffraction de la lumière à travers une ou plusieurs fentes - solution

## 1 Les savoir-faire

### Exercice 1 : Figure de diffraction par une fente de transparence uniforme

1. L'écran est placé dans le plan focal image de la lentille d'observation  $L_2$ . La figure de diffraction de Fraunhofer est observée dans le plan focale image de  $L_2$ .
2. Nous calculons la diffraction dans la direction orthogonal à la grande longueur de la fente  

$$\underline{a}(\theta) = K \int_{-l/2}^{l/2} e^{ikx\theta} dx = \frac{K}{ik\theta} \left( e^{ik\frac{l}{2}\theta} - e^{-ik\frac{l}{2}\theta} \right) = Kl \frac{\sin\left(k\frac{l}{2}\theta\right)}{k\theta l/2} = Kl \text{sinc}\left(k\frac{l}{2}\theta\right).$$
3.  $\varepsilon = \varepsilon_0 \text{sinc}^2\left(k\frac{l}{2}\theta\right).$
4. Aux petits angles, nous avons  $\theta = \frac{X}{f'}$ .
5. Les minimums sont données par les 0 de la fonction sinus soient  $X = k\frac{\lambda f'}{l}$  où  $k \in Z^*$ .
6. Graphe.

### Exercice 2 : Fente rectangulaire

1. En suivant la même procédure que dans l'exo précédent nous obtenons :  

$$\underline{a}(\theta) = K \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikx\alpha} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{iky\beta} dy = Kab \frac{\sin\left(k\frac{a}{2}\alpha\right)}{k\alpha a/2} \frac{\sin\left(k\frac{b}{2}\beta\right)}{k\beta b/2}.$$
2. Nous obtenons  $\varepsilon(x', y') = \varepsilon_0 \text{sinc}^2\left(k\frac{a}{2f'}x'\right) \text{sinc}^2\left(k\frac{b}{2f'}y'\right)$  dans le plan d'observation.
3. La tache rectangulaire brillante au centre de la figure de diffraction a pour taille  $4\frac{\lambda f'}{a} \frac{\lambda f'}{b}$ .

### Exercice 3 : Double fente d'Young

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} \underline{a}(\theta) &= K \left( \int_{-a/2-l/2}^{-a/2+l/2} e^{ikx\theta} dx + \int_{a/2-l/2}^{a/2+l/2} e^{ikx\theta} dx \right) \\ &= \frac{K}{ik\theta} \left( e^{ik\left(-\frac{a}{2}+\frac{l}{2}\right)\theta} - e^{-ik\left(\frac{a}{2}+\frac{l}{2}\right)\theta} \right) + \frac{K}{ik\theta} \left( e^{ik\left(\frac{a}{2}+\frac{l}{2}\right)\theta} - e^{ik\left(\frac{a}{2}-\frac{l}{2}\right)\theta} \right) \\ &= \frac{K}{ik\theta} \left( e^{ik\frac{l}{2}\theta} - e^{-ik\frac{l}{2}\theta} \right) \left( e^{-ik\frac{a}{2}\theta} + e^{ik\frac{a}{2}\theta} \right) \\ &= 2Kl \frac{\sin\left(k\frac{l}{2}\theta\right)}{k\theta l/2} \cos\left(\frac{ka\theta}{2}\right) \\ &= 2Kl \text{sinc}\left(\frac{k\theta l}{2}\right) \cos\left(\frac{ka\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

2. L'éclairement dans la direction  $\theta$  a pour expression  $\varepsilon = \varepsilon_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kl\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{ka\theta}{2}\right)$ .
3. Aux petits angles,  $\theta = \frac{X}{f'}$ ? Nous obtenons donc  $\varepsilon = \varepsilon_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k l X}{2 f'}\right) \cos^2\left(\frac{k a X}{2 f'}\right)$ .
4. Graphe d'un  $\cos^2$  modulé par la fonction  $\operatorname{sinc}^2$ .
5. L'interfrange a pour expression  $X = \frac{\lambda f'}{a}$ . Le premier zéro de la tache de diffraction est à  $X = \frac{\lambda f'}{l}$  et annule la quatrième frange d'interférence. Nous avons donc  $\frac{4\lambda f'}{a} = \frac{\lambda f'}{l}$  d'où  $a = 4l$ .
6. Il y a 7 franges brillantes dans la tache centrale de diffraction.
7. On observe une seule frange dans la tache centrale.
- 8.

$$\begin{aligned} \underline{a}(\theta) &= K \left( \int_{-l/2}^{l/2} e^{ikx\theta} dx + \int_{a-l/2}^{a+l/2} e^{ikx\theta} dx + \dots + \int_{(N-1)a-l/2}^{(N-1)a+l/2} e^{ikx\theta} dx \right) \\ &= \frac{K}{ik\theta} \left( e^{ik\frac{l}{2}\theta} - e^{-ik\frac{l}{2}\theta} \right) \left( 1 + e^{ika\theta} + \dots + e^{ik(N-1)a\theta} \right) \\ &= 2Kl \frac{\sin\left(k\frac{l}{2}\theta\right)}{k\theta l/2} \frac{1 - e^{ikNa\theta}}{1 - e^{ika\theta}} \end{aligned}$$

L'éclairement a pour expression  $\varepsilon = \varepsilon_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k l X}{2 f'}\right) \frac{\sin^2(k N a \theta / 2)}{\sin^2(k a \theta / 2)}$

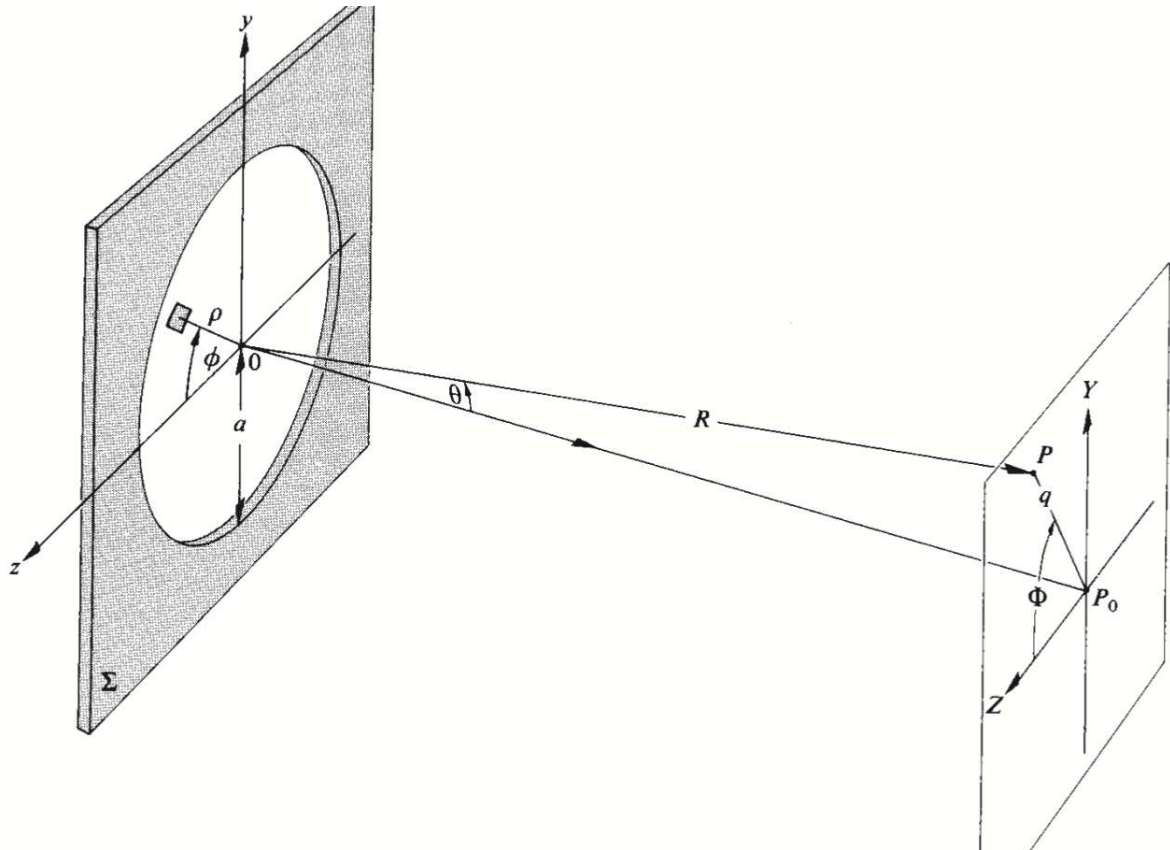
9. L'éclairement est maximal pour  $\theta = m \frac{\lambda}{a}$  où  $m$  est un entier naturel.
10. La condition d'interférences constructives a pour expression  $\theta = m \frac{\lambda}{a}$ .

## 2 La mise en œuvre

### Exercice 4 : Diffraction de Fraunhofer à travers un trou circulaire

1. Nous avons  $\underline{a}(X, Y) = K \iint_S A(x, y) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OM}} dS$  soit :

$\underline{a}(X, Y) = K \int_0^a \int_0^{2\pi} A(\rho, \phi) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \cos(\Phi - \phi)} \rho d\rho d\phi$  avec le système de coordonnées de la figure suivante.



La solution de cette intégrale fait appel aux fonctions de Bessel d'ordre 1. En utilisant l'annexe de l'exercice, nous pouvons plutôt utiliser la formulation en TF de la diffraction de Fraunhofer pour résoudre le problème.

Nous avons  $\varepsilon(u, v) = C|TF(t\mathcal{A})|^2$  avec  $A$  une constante et  $t = \text{circ}(r/a)$ .

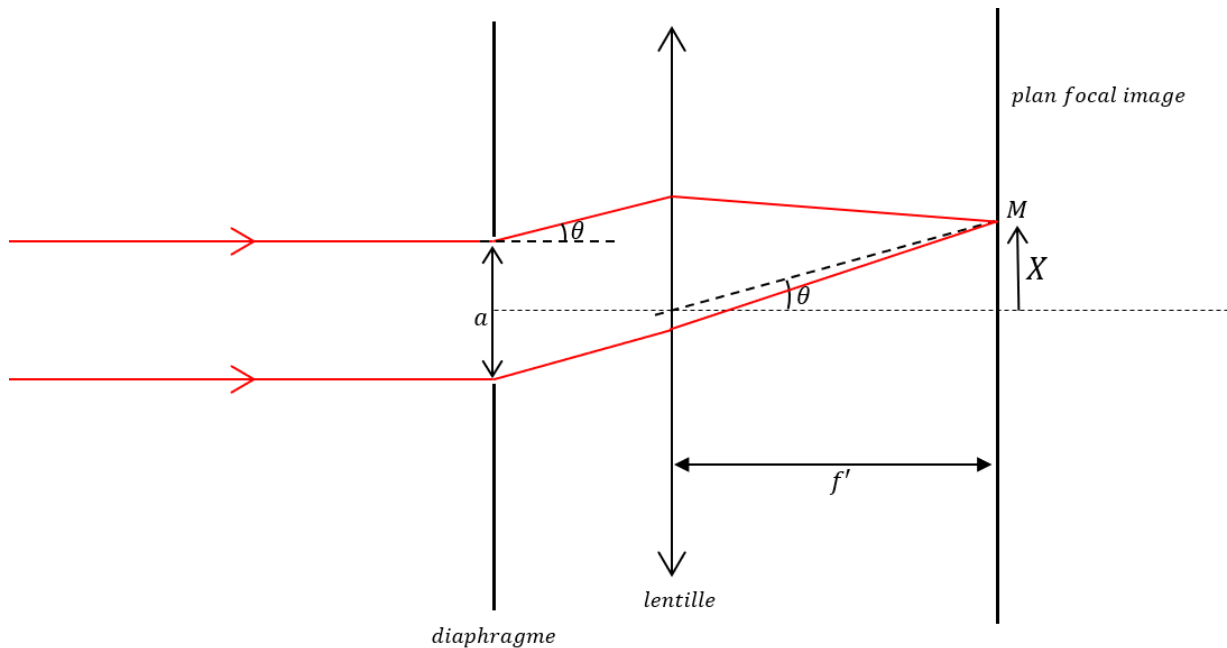
Nous avons  $TF(\text{circ}(r/R)) = \pi R^2 \frac{J_1(2\pi R\rho)}{\pi R\rho}$  d'où  $\varepsilon(u, v) = \varepsilon_0 \left( \frac{J_1(2\pi a\rho)}{\pi a\rho} \right)^2$

avec  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\theta}{\lambda}$  (attention à ne pas confondre ce  $\rho$  avec le  $\rho$  de la figure précédente).

2. Le premier point d'annulation de  $F_R$  est pour  $\rho = \frac{0,61}{a}$  donc pour  $\theta = \frac{0,61\lambda}{a}$ . Si nous notons  $D$  le diamètre de l'ouverture alors  $\theta \simeq \frac{1,22\lambda}{D}$ .

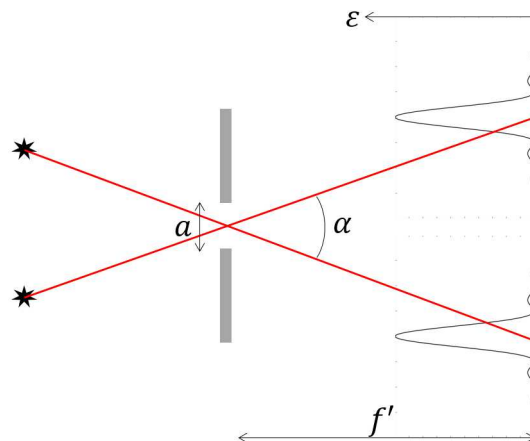
### Exercice 5 : Pouvoir séparateur d'un télescope

On modélise un télescope par un diaphragme et une lentille mince de distance focale  $f'$ . Le diaphragme est une fente de largeur  $a$  qui rend compte de manière simplifiée des bords du télescope. On pointe dans un premier temps le télescope sur une étoile assimilée à une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . On étudie la figure de diffraction produite par le diaphragme dans le plan focale image de la lentille. On note  $\theta$  l'angle que fait le rayon diffracté par rapport à l'horizontale et on note  $X$  la position d'un point dans le plan focal image par rapport à l'axe optique qui passe par le centre du diaphragme.



1. On rappelle que l'amplitude diffractée à l'infinie dans une direction  $\theta$  a pour expression  $\underline{a}(\theta) = K \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikx\theta} dx$  où  $x$  est la position sur la fente de largeur  $a$ . Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{a}(\theta)$  de la vibration résultante dans la direction  $\theta$ .
2. En déduire l'expression de l'éclairement dans la direction  $\theta$ . On nomme  $\varepsilon_0$  le facteur de normalisation de l'éclairement.
3. Déterminer l'expression de  $\theta$  en fonction de  $f'$  et  $X$  au petits angles. Tracer qualitativement l'expression de l'éclairement en fonction de  $X$ .
4. Déterminer la position des minimums d'éclairement.
5. Montrer que la largeur de la tache centrale de diffraction a pour expression  $\frac{2\lambda f'}{a}$ .

Le télescope est maintenant pointé dans la direction de deux étoiles proches  $S_1$  et  $S_2$  faisant chacune un petit angle  $\frac{\alpha}{2}$  avec l'axe optique. Chaque étoile produit une figure de diffraction dans le plan focale image de la lentille. Puisque l'image d'une source ponctuelle est une tache de diffraction, la capacité du télescope à produire des images nettes est limité par la diffraction. Selon le critère de Rayleigh, deux images sont séparées lorsque le maximum centrale d'une figure coïncide avec le premier minimum de l'autre. La figure suivante permet de déterminer la séparation angulaire critique en utilisant le critère de Rayleigh.



6. Montrer que la séparation angulaire critique correspondant au critère de Rayleigh correspond à  $\alpha_c = \frac{2\lambda}{a}$  dans notre modèle (l'ouverture d'un instrument d'optique est circulaire,

on obtient dans ce cas  $\alpha_c = \frac{1,22\lambda}{a}$ ).

### Exercice 6 : Le satellite européen pour l'observation de l'environnement terrestre

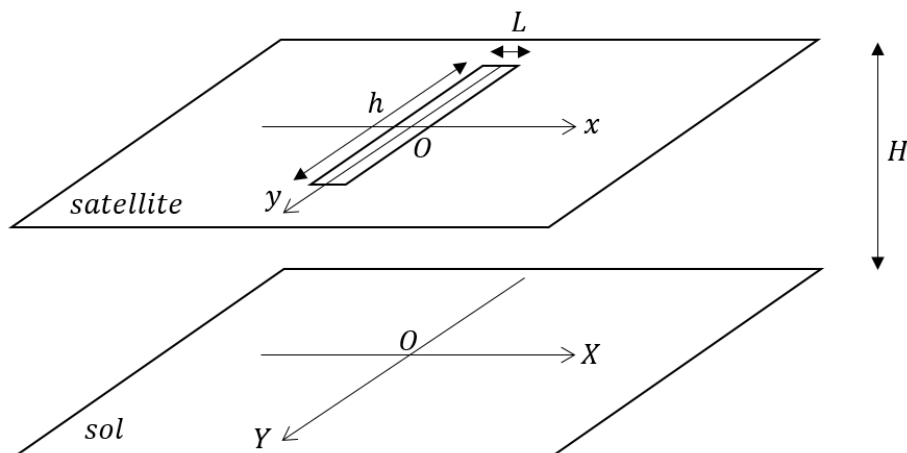
ENVISAT (ENVironnement SATellite), lancé en 2002, est le plus grand et le plus élaboré des satellites d'observation de la Terre qui ait jamais été construit en Europe.

Équipé d'un panneau solaire de  $14\text{ m} \times 4,5\text{ m}$  qui lui fournit une puissance de  $6,6\text{ kW}$ , ENVISAT embarque à son bord 10 instruments sophistiqués qui utilisent l'ensemble du spectre électromagnétique.

Nous étudions ici l'un de ces 10 instruments, le radar avancé à synthèse d'ouverture (ASAR) qui permet de réaliser des cartographies du sol à haute résolution spatiale et d'analyser les mouvements du sol par la technique d'interférométrie InSAR.



Nous allons commencer par étudier le diagramme d'émission d'une antenne de forme rectangulaire qui émet des micro-ondes de longueur d'onde  $\lambda = 5,6\text{ cm}$ . L'antenne a une dimension  $h = 10\text{ m}$  et  $L = 1\text{ m}$ . Le satellite est à une altitude  $H = 800\text{ km}$ .

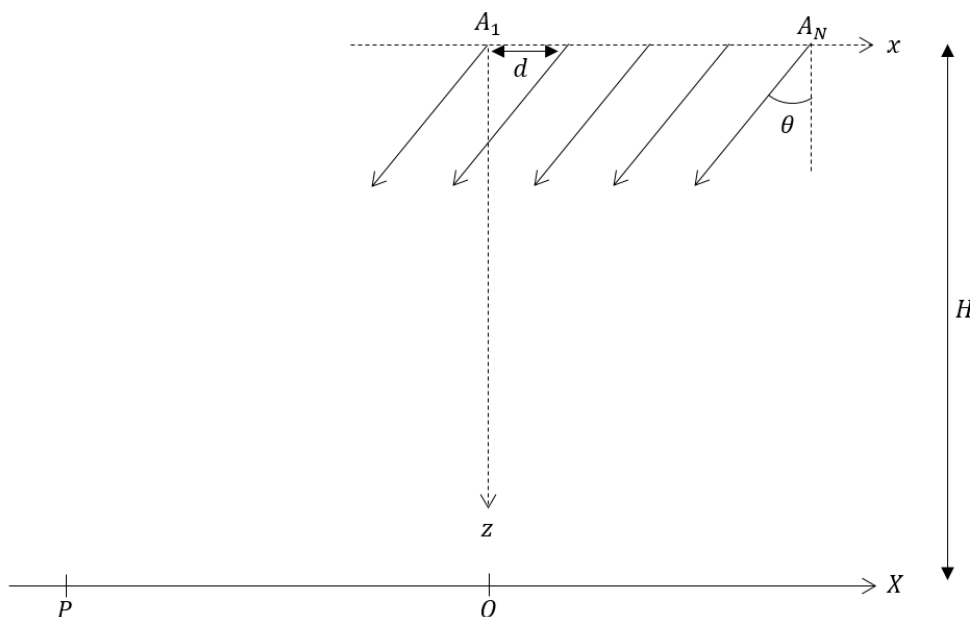


1. Tracer le graphe de l'éclairement diffractée par l'antenne à l'infini en fonction de l'angle de diffraction  $\theta$ . Faire apparaître les angles  $\theta$  pour lesquels l'éclairement est nul.
2. En déduire le graphe de l'éclairement le long de l'axe  $OX$  et le graphe de l'éclairement le long de l'axe  $OY$ .

- La résolution spatiale est définie comme étant les dimensions au sol du maximum central d'éclairement. Déterminer la résolution spatiale de l'antenne dans la direction  $OX$  et  $OY$ .
- Quelles devraient être les dimensions de l'antenne pour obtenir une résolution de  $30\text{ m} \times 30\text{ m}$  au sol? Commentaires.

Nous allons maintenant étudier l'amélioration de la résolution spatiale par synthèse d'ouverture. Voici le principe.

Lors du déplacement du radar selon la direction  $Ox$  par exemple, l'antenne émet tous les  $\tau_0$  des ondes électromagnétiques vers la cible  $P$  considéré à l'infini. Le radar à synthèse d'ouverture peut donc être modélisé par un réseau de  $N$  fentes fixes situées en  $A_1, \dots, A_N$  et espacées de la distance  $d$ . Nous considérons la situation pour laquelle  $\tau_0 = nT$  où  $T$  est la période de l'onde électromagnétique.



- On note  $E_m e^{i(\omega t - kr)}$  le champ en notation complexe émis par le radar.  $E_m$  est l'amplitude diffractée par l'antenne. On note  $A_1 P = R_1, A_2 P = R_2, \dots$ . Montrer que  $R_N = R_1 + (N - 1)f(\theta)$ . où  $f(\theta)$  est une fonction à préciser.
- Déterminer l'amplitude du champ total  $E_{tot}$  reçu au point  $P$ . Montrer que l'amplitude complexe totale du champ total a pour expression  $E_{tot} = E_m \frac{\sin(\frac{Nkd \sin \theta}{2})}{\sin(\frac{kd \sin \theta}{2})} e^{i(\omega t - kR_1 - \frac{(N-1)kd \sin \theta}{2})}$ .
- En déduire que l'éclairement a pour expression  $\varepsilon_0 \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi L \sin \theta}{\lambda} \right) \left( \frac{\sin(\frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda})}{\sin(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda})} \right)^2$ .
- Déterminer la valeur de l'éclairement lorsque  $\theta \rightarrow 0$ .
- Tracer qualitativement  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}$  dans le cas  $d = 3L$ .
- Quelle est la résolution spatiale sur le sol dans ce cas?