

## Optique physique

### AAV n°7 : être capable de calculer l'éclairement produit par la diffraction de la lumière à travers une ou plusieurs fentes

**Consignes :** Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fautive en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fautive en devoir.

## 1 Les savoir-faire à connaître

### Savoir calculer la figure de diffraction de Fraunhofer d'une fente simple

#### Exercice 1 : Figure de diffraction par une fente de transparence uniforme

Un dispositif comporte deux lentilles convergentes  $L_1$  et  $L_2$  identiques utilisées dans les conditions de Gauss, de même axe  $O_1O_2$  et de distance focale  $f' = 50$  cm. Une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  est placée au foyer objet de  $L_1$ . On place une ouverture fente de centre  $O$  situé dans le plan  $Oxy$  de largeur  $l$  très petite devant sa longueur. On observe la figure obtenue dans le plan focale image de  $L_2$ .

1. Faire un schéma de l'expérience. Quelle figure est observée dans le plan focale image de  $L_2$  ?
2. Montrer que l'amplitude complexe  $\underline{a}(\theta)$  de la vibration résultante dans la direction  $\theta$  a pour expression  $\underline{a} = KlA_0 \text{sinc}\left(k\frac{l}{2}\theta\right)$ .
3. En déduire que l'éclairement dans la direction  $\theta$  a pour expression  $\varepsilon = \varepsilon_0 \text{sinc}^2\left(k\frac{l}{2}\theta\right)$ . On nomme  $\varepsilon_0$  le facteur de normalisation de l'éclairement.
4. Déterminer l'expression de  $\theta$  en fonction de  $f'$  et de  $X$  la distance sur l'écran entre le point d'observation et l'axe optique.
5. Tracer qualitativement l'expression de l'éclairement en fonction de  $X$ . Déterminer la position des minimums d'éclairement.
6. On donne  $\lambda = 546$  nm et  $l = 120$   $\mu\text{m}$ . Calculer la distance entre les deux premières franges noires qui bordent la tache centrale.

#### Exercice 2 : Fente rectangulaire

Un faisceau lumineux parallèle de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude  $A_0$  éclaire avec une incidence normale une pupille rectangulaire de largeur  $a$  et de hauteur  $b$ . On observe la figure de diffraction dans le plan focal d'une lentille  $L$  convergente de distance focale  $f'$  et d'axe optique confondu avec l'axe  $Oz$  de la pupille rectangulaire. On désigne par  $(\alpha, \beta, \gamma)$  les composantes du vecteur unitaire  $\hat{u}$  dans la direction de la lumière diffractée par l'ouverture.

1. Montrer que l'amplitude de l'onde lumineuse diffractée dans la direction  $\hat{u}$  est de la forme :

$$a = KA_0 \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y}$$

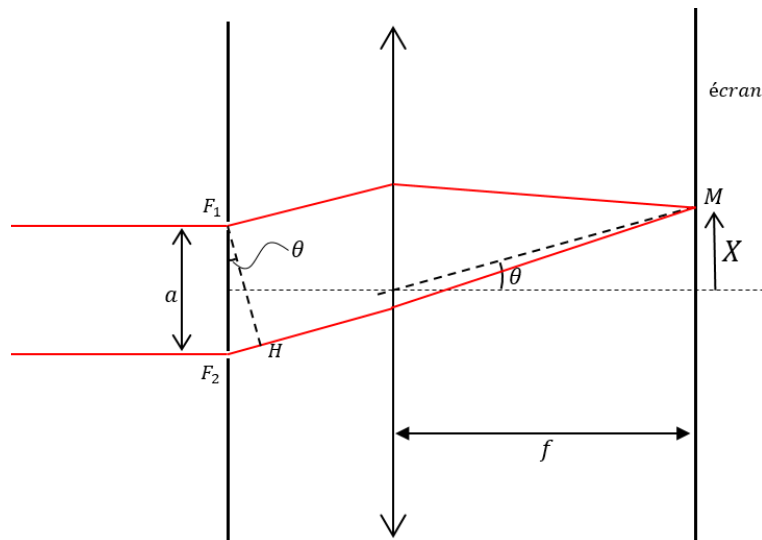
Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $\alpha, \beta, a, b$  et  $\lambda$ .

2. En déduire l'éclairement  $\varepsilon(x, y)$  dans le plan d'observation.
3. En déduire l'expression de la taille de la tache rectangulaire brillante au centre de la figure de diffraction.

## Savoir calculer la figure de diffraction de Fraunhofer des fentes d'Young

### Exercice 3 : Double fente d'Young

Un faisceau de lumière parallèle monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ , éclaire normalement un écran opaque percé de deux fentes  $F_1$  et  $F_2$  de même largeur  $l$ . On observe le champ d'interférences au point  $X$  dans le plan focal image d'une lentille de distance focale  $f' = 2 \text{ m}$  tel que  $X \ll f'$ .



1. Montrer que l'amplitude complexe  $\underline{a}(\theta)$  de la vibration résultante dans la direction  $\theta$  a pour expression  $\underline{a} = 2Kl \text{sinc}\left(\frac{kl\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{ka\theta}{2}\right)$ .
2. En déduire l'expression de l'éclairement dans la direction  $\theta$ . On nomme  $\varepsilon_0$  le facteur de normalisation de l'éclairement.
3. Déterminer l'expression de  $\theta$  en fonction de  $f'$  et de  $X$  la distance sur l'écran entre le point d'observation et l'axe optique.
4. Tracer qualitativement l'expression de l'éclairement en fonction de  $X$ .
5. On constate que la quatrième frange brillante d'interférence, comptée à partir de la frange centrale est supprimée à cause de la tache de diffraction. La distance entre deux maxima d'interférence consécutifs est de  $1,10 \text{ mm}$ . Calculer l'écartement  $a$  et la largeur  $l$  des fentes.
6. Montrer qu'il y a 9 franges brillantes dans la tache centrale de diffraction.
7. Que ce passe-t-il lorsque  $a$  tend vers  $l$ .
8. Reprendre les deux premières questions dans le cas de  $N$  fentes.

9. Déterminer dans ce cas les valeurs de  $\theta$  pour lesquels l'éclairement est maximum.
10. On appelle réseau parfait un tel système de  $N$  fentes. Montrer que la condition d'interférences constructives entre les rayons émergent du réseau redonne les valeurs de  $\theta$  obtenues à la question précédente.

## 2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

### Exercice 4 : Diffraction de Fraunhofer à travers un trou circulaire

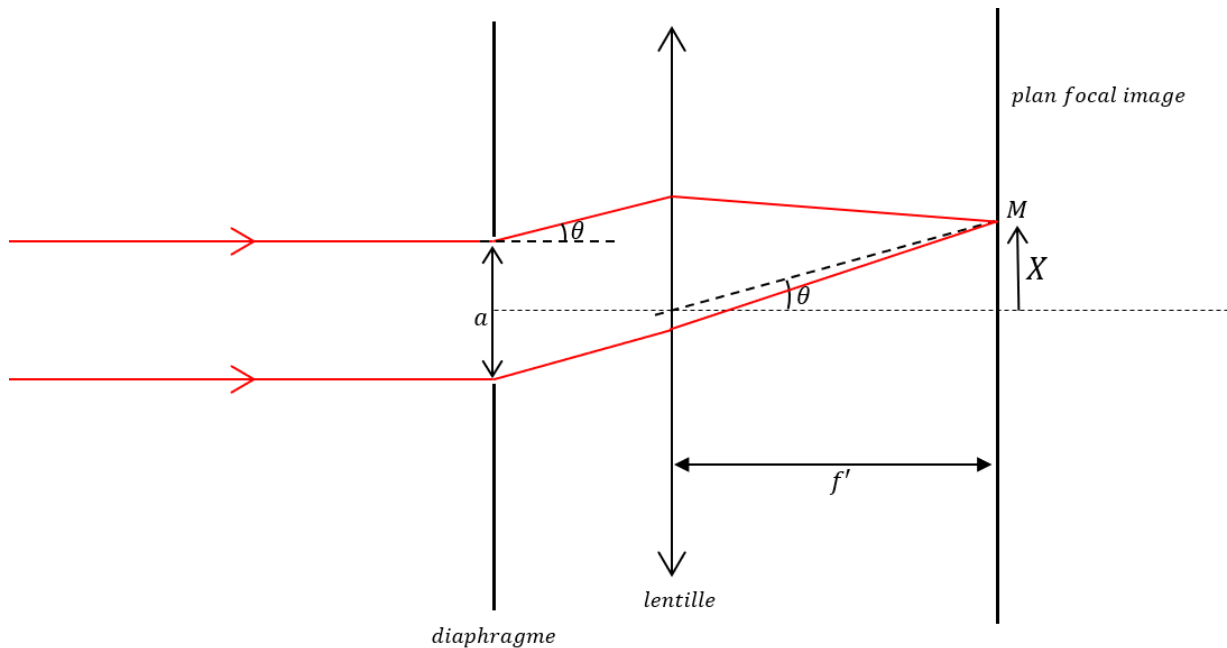
Un faisceau lumineux parallèle de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude  $A_0$  éclaire avec une incidence normale une pupille circulaire de rayon  $a$ . On observe la figure de diffraction dans le plan focal d'une lentille  $L$  convergente de distance focale  $f'$  et d'axe optique confondu avec l'axe  $Oz$  de la pupille circulaire. On désigne par  $u = \frac{\theta_x}{\lambda}$  et  $v = \frac{\theta_y}{\lambda}$  les fréquences spatiales associées aux directions  $\theta_x$  et  $\theta_y$ .

1. Montrer que l'éclairement de l'onde lumineuse diffractée a pour expression  $\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{J_1(2\pi a \rho)}{\pi a \rho} \right)^2$  avec  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$
2. En déduire que pour un instrument optique d'ouverture circulaire de diamètre  $D$  traversé par une onde monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , la figure de diffraction obtenue, nommée tache d'Airy, présente un premier cercle noir pour un angle par rapport à l'axe de révolution de  $\theta \simeq \frac{1,22\lambda}{D}$ .

On définit la fonction  $\text{circ}(r) = 1$  si  $r \leq 1$  et 0 sinon. La transformée de Fourier de la fonction  $\text{circ}$  a pour expression  $F_R(\rho) = TF(\text{circ}(r/R)) = \pi R^2 \frac{J_1(2\pi R \rho)}{\pi R \rho}$  avec  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$  et  $J_1$  la fonction de Bessel d'ordre 1. Le premier point d'annulation de  $F_R$  est pour  $\rho = \frac{0,61}{R}$ .

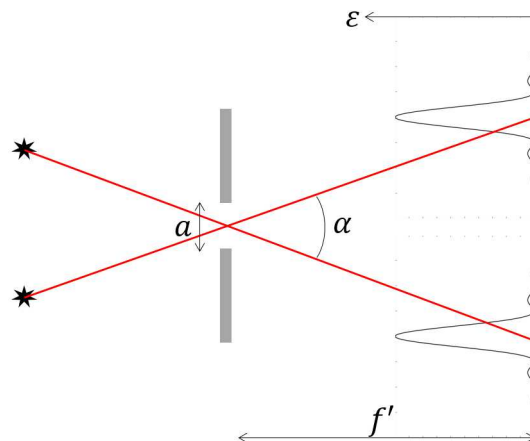
### Exercice 5 : Pouvoir séparateur d'un télescope

On modélise un télescope par un diaphragme et une lentille mince de distance focale  $f'$ . Le diaphragme est une fente de largeur  $a$  qui rend compte de manière simplifiée des bords du télescope. On pointe dans un premier temps le télescope sur une étoile assimilée à une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . On étudie la figure de diffraction produite par le diaphragme dans le plan focale image de la lentille. On note  $\theta$  l'angle que fait le rayon diffracté par rapport à l'horizontale et on note  $X$  la position d'un point dans le plan focal image par rapport à l'axe optique qui passe par le centre du diaphragme.



1. On rappelle que l'amplitude diffractée à l'infinie dans une direction  $\theta$  a pour expression  $\underline{a}(\theta) = K \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikx\theta} dx$  où  $x$  est la position sur la fente de largeur  $a$ . Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{a}(\theta)$  de la vibration résultante dans la direction  $\theta$ .
2. En déduire l'expression de l'éclairement dans la direction  $\theta$ . On nomme  $\varepsilon_0$  le facteur de normalisation de l'éclairement.
3. Déterminer l'expression de  $\theta$  en fonction de  $f'$  et  $X$  au petits angles. Tracer qualitativement l'expression de l'éclairement en fonction de  $X$ .
4. Déterminer la position des minimums d'éclairement.
5. Montrer que la largeur de la tache centrale de diffraction a pour expression  $\frac{2\lambda f'}{a}$ .

Le télescope est maintenant pointé dans la direction de deux étoiles proches  $S_1$  et  $S_2$  faisant chacune un petit angle  $\frac{\alpha}{2}$  avec l'axe optique. Chaque étoile produit une figure de diffraction dans le plan focale image de la lentille. Puisque l'image d'une source ponctuelle est une tache de diffraction, la capacité du télescope à produire des images nettes est limité par la diffraction. Selon le critère de Rayleigh, deux images sont séparées lorsque le maximum centrale d'une figure coïncide avec le premier minimum de l'autre. La figure suivante permet de déterminer la séparation angulaire critique en utilisant le critère de Rayleigh.



6. Montrer que la séparation angulaire critique correspondant au critère de Rayleigh correspond à  $\alpha_c = \frac{2\lambda}{a}$  dans notre modèle (l'ouverture d'un instrument d'optique est circulaire,

on obtient dans ce cas  $\alpha_c = \frac{1,22\lambda}{a}$ ).

### Exercice 6 : Le satellite européen pour l'observation de l'environnement terrestre

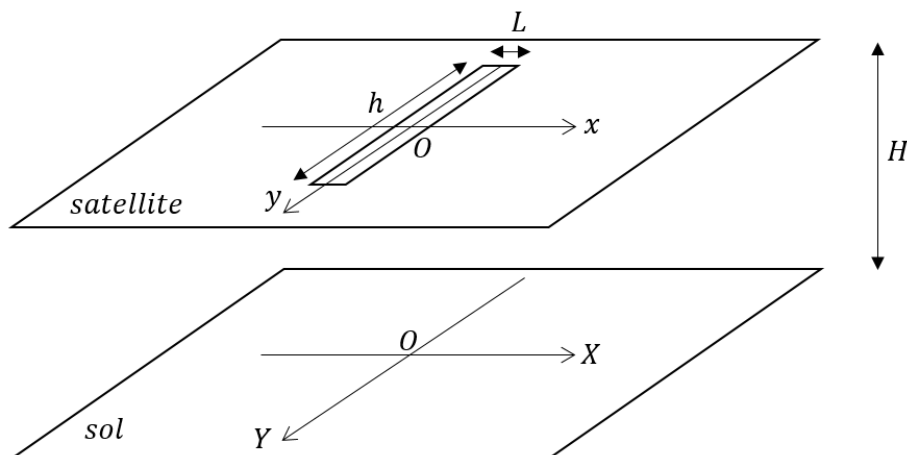
ENVISAT (ENVironnement SATellite), lancé en 2002, est le plus grand et le plus élaboré des satellites d'observation de la Terre qui ait jamais été construit en Europe.

Équipé d'un panneau solaire de  $14\text{ m} \times 4,5\text{ m}$  qui lui fournit une puissance de  $6,6\text{ kW}$ , ENVISAT embarque à son bord 10 instruments sophistiqués qui utilisent l'ensemble du spectre électromagnétique.

Nous étudions ici l'un de ces 10 instruments, le radar avancé à synthèse d'ouverture (ASAR) qui permet de réaliser des cartographies du sol à haute résolution spatiale et d'analyser les mouvements du sol par la technique d'interférométrie InSAR.



Nous allons commencer par étudier le diagramme d'émission d'une antenne de forme rectangulaire qui émet des micro-ondes de longueur d'onde  $\lambda = 5,6\text{ cm}$ . L'antenne a une dimension  $h = 10\text{ m}$  et  $L = 1\text{ m}$ . Le satellite est à une altitude  $H = 800\text{ km}$ .

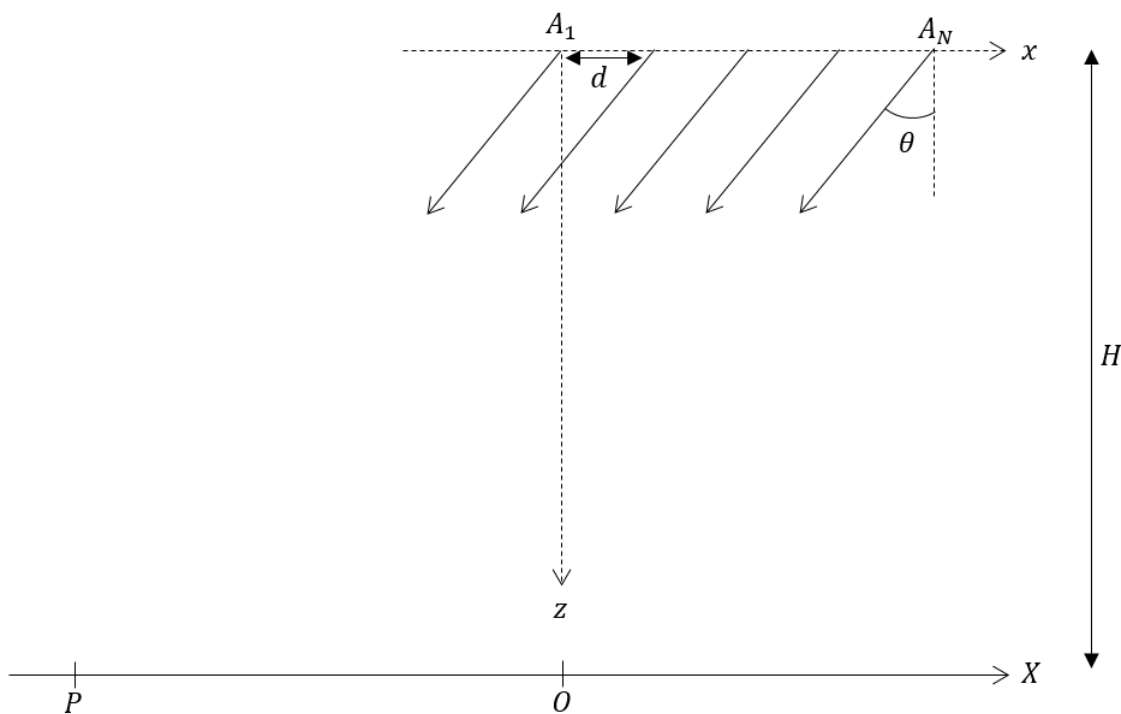


1. Tracer le graphe de l'éclairement diffractée par l'antenne à l'infini en fonction de l'angle de diffraction  $\theta$ . Faire apparaître les angles  $\theta$  pour lesquels l'éclairement est nul.
2. En déduire le graphe de l'éclairement le long de l'axe  $OX$  et le graphe de l'éclairement le long de l'axe  $OY$ .

- La résolution spatiale est définie comme étant les dimensions au sol du maximum central d'éclairement. Déterminer la résolution spatiale de l'antenne dans la direction  $OX$  et  $OY$ .
- Quelles devraient être les dimensions de l'antenne pour obtenir une résolution de  $30 \text{ m} \times 30 \text{ m}$  au sol? Commentaires.

Nous allons maintenant étudier l'amélioration de la résolution spatiale par synthèse d'ouverture. Voici le principe.

Lors du déplacement du radar selon la direction  $Ox$  par exemple, l'antenne émet tous les  $\tau_0$  des ondes électromagnétiques vers la cible  $P$  considéré à l'infini. Le radar à synthèse d'ouverture peut donc être modélisé par un réseau de  $N$  fentes fixes situées en  $A_1, \dots, A_N$  et espacées de la distance  $d$ . Nous considérons la situation pour laquelle  $\tau_0 = nT$  où  $T$  est la période de l'onde électromagnétique.



- On note  $E_m e^{i(\omega t - kr)}$  le champ en notation complexe émis par le radar.  $E_m$  est l'amplitude diffractée par l'antenne. On note  $A_1 P = R_1, A_2 P = R_2, \dots$ . Montrer que  $R_N = R_1 + (N - 1)f(\theta)$ . où  $f(\theta)$  est une fonction à préciser.
- Déterminer l'amplitude du champ total  $E_{tot}$  reçu au point  $P$ . Montrer que l'amplitude complexe totale du champ total a pour expression  $E_{tot} = E_m \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right)} e^{i\left(\omega t - kR_1 - \frac{(N-1)kd \sin \theta}{2}\right)}$ .
- En déduire que l'éclairement a pour expression  $\varepsilon_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi L \sin \theta}{\lambda}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)}\right)^2$ .
- Déterminer la valeur de l'éclairement lorsque  $\theta \rightarrow 0$ .
- Tracer qualitativement  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}$  dans le cas  $d = 3L$ .
- Quelle est la résolution spatiale sur le sol dans ce cas?