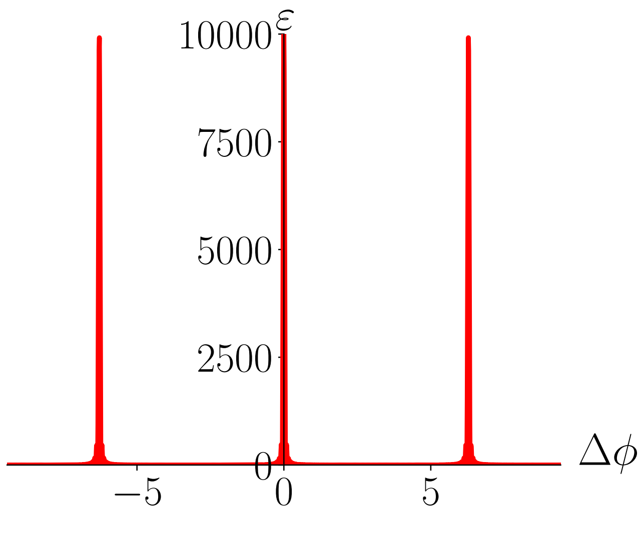
Optique physique

AAV n°7 : être capable de calculer l'éclairement d'un système interférentiel à ondes multiples - solution

1 Les savoir-faire

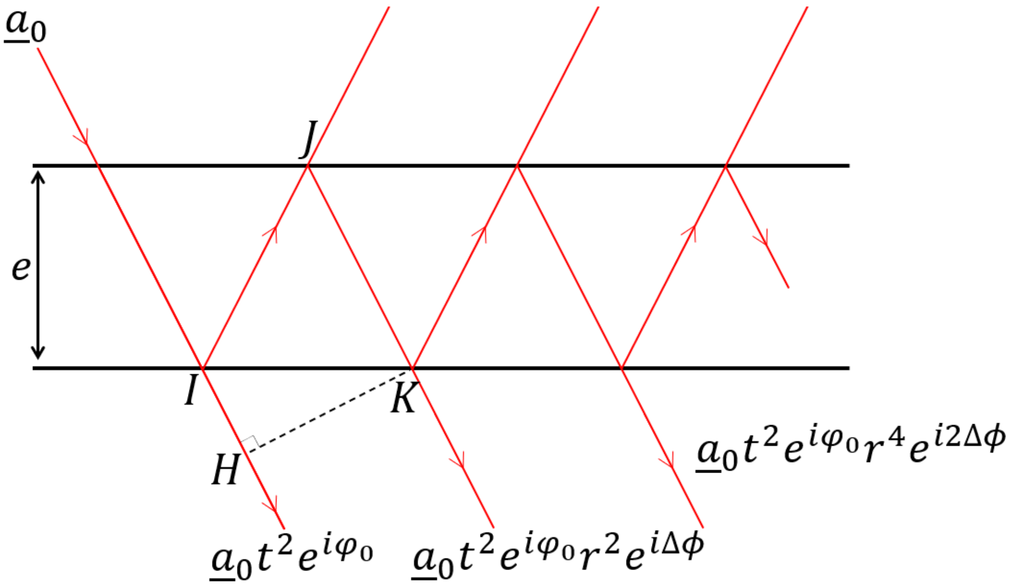
Exercice 1 : Réseau d'interférences

1. $\Delta\phi = a\theta = \frac{ay}{d}$.
2. $\underline{a} = A_1 + A_1 e^{i\Delta\phi} + A_1 e^{i2\Delta\phi} + ... + A_1 e^{i(N-1)\Delta\phi} = A_1 \frac{1-e^{iN\Delta\phi}}{1-e^{i\Delta\phi}}$ d'où $\underline{a} = A_1 \frac{e^{i\frac{N\Delta\phi}{2}}}{e^{i\frac{\Delta\phi}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$.
3. $\varepsilon = \frac{1}{2}\underline{a}\underline{a}^\star$ d'où :
$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$
4. On fait un DL pour lever la forme indéterminé et montrer que $\varepsilon = N^2\varepsilon_1$.
5. $\varepsilon = N^2\varepsilon_1$. pour $\Delta\phi = 2\pi$. L'éclairement est une fonction 2π périodique donc l'éclairement est maximal tous les $\Delta\phi = 2\pi$.
6. La figure suivante montre le graphe de l'éclairement pour N fentes.

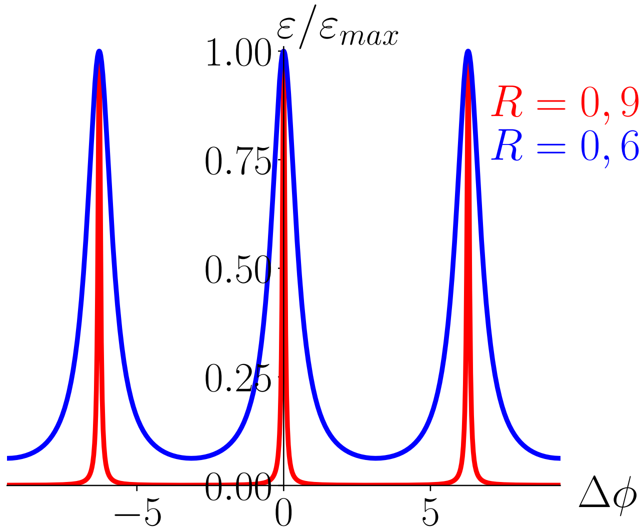


Exercice 2 : Interféromètre de Frabry-Perrot

1. Le schéma suivant montre que $\delta = (IJK) - (IH) = 2e\cos i$ d'où $\Delta\phi = \frac{4\pi e}{\lambda}\cos i$.



2. Notons $\underline{a}_0$ l'amplitude de l'onde incidente et ϕ_0 la phase prise par la première onde transmise sans réflexion. Nous avons $\underline{a} = \underline{a}_0 t^2 e^{i\phi_0}\left(1 + r^2 e^{i\Delta\Phi} + r^4 e^{i2\Delta\Phi} + ...\right)$. Nous reconnaissons la somme des éléments de N termes d'une suite géométrique. Étant donné que le module du coefficient de réflexion est strictement inférieur à 1 et que $N >> 1$, nous obtenons $\underline{a} = \underline{a}_0 t^2 e^{i\phi_0}\frac{1}{1-r^2e^{i\Delta\Phi}}$.
3. L'éclairement dans la direction i est donnée par $\varepsilon = \frac{1}{2}\underline{a}\underline{a}^\star$ d'où $\varepsilon = \varepsilon_0\frac{T^2}{1+R^2-2R\cos(\Delta\phi)}$ avec $R = r^2$ et $T = t^2$. Notons que ϕ_0 n'apparait pas dans le résultat final et aurait pu être absorbé directement dans une redéfinition de $\underline{a}_0$. De même, remarquons que le résultat ne change pas si nous écrivons le déphase entre deux rayons voisins $e^{-i\Delta\Phi}$.
4. $\varepsilon_{max} = \varepsilon_0\frac{T^2}{(1-R)^2}$ et $\varepsilon_{min} = \varepsilon_0\frac{T^2}{(1+R)^2}$. Le contraste est donné par $C = \frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max}+\varepsilon_{min}} = \frac{2R}{1+R^2}$.
5. Pour $R = 0{,}88$, on trouve $C = 0{,}99$.
6. $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}} = \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos(\Delta\phi)}$. La figure suivante montre le graphe de l'éclairement en fonction de $\Delta\phi$.



7. On a $\cos(\Delta\Phi) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)$ d'où $\varepsilon = \varepsilon_0\frac{T^2}{1+R^2-2R(1-2\sin^2\frac{\Delta\Phi}{2})} = \varepsilon_0\frac{T^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\Delta\Phi}{2}}$. Nous obtenons donc $\varepsilon = \varepsilon_0\left(\frac{T}{1-R}\right)^2\frac{1}{1+F\sin^2\frac{\Delta\phi}{2}}$ avec $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$.

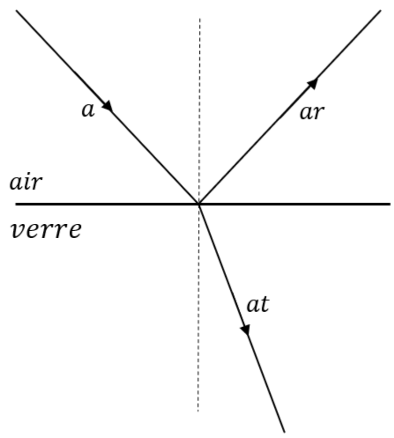
8. On pose $X = \Delta\phi$. Nous notons ainsi ΔX la largeur à mi-hauteur d'un pic. Nous cherchons l'expression de la finesse dans le cas d'une valeur élevée de R puisque c'est dans ces conditions qu'un interféromètre de Fabry-Perot est fabriqué. La finesse est définie par $\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\Delta X}$ avec $\Delta X = X_+ - X_-$ où X_+ et X_- sont données par $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{X}{2}\right)}$ d'où $1 + F\sin^2\left(\frac{X}{2}\right) = 2$. Dans le cas d'une finesse élevée, nous avons $\Delta X << 1$, nous pouvons donc faire un DL à l'ordre 1 en X pour obtenir $1 + F\frac{X^2}{4} = 2$ d'où $X = \pm\frac{2}{\sqrt{F}}$. Nous obtenons donc $\Delta X = \frac{4}{\sqrt{F}}$ et $\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$. On trouve une finesse de 61 pour $R = 0{,}95$.

2 La mise en œuvre

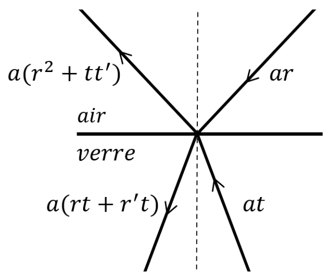
Exercice 3 : Effet Fabry-Perrot dans une lame de verre

Une lame de verre d'indice n, dont les faces rendues particulièrement réfléchissantes sont considérées parfaitement planes et parallèles, est éclairée en incidence normal par un faisceau parallèle de longueur d'onde λ. L'absorption dans la lame est négligeable.

Nous allons dans un premier temps établir les relations de Stokes. On désigne par r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de l'onde dans le sens air/verre et par r' et t' les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de l'onde dans le sens verre/air. La figure suivante montre les amplitudes des ondes transmises et réfléchies à travers une interface air/verre.



1. Le renversement du sens du temps conduit au schéma suivant :



No obtient l'onde incidente si :

$$r = -r'$$

$$r^2 + tt' = 1$$

2. $\Delta\phi = 4\pi\frac{nL}{\lambda}$.

3. $\underline{a} = ar + att'r'e^{i\Delta\phi} + att'r'^3e^{i2\Delta\phi} + att'r'^5e^{i3\Delta\phi} + ... = ar + ar'tt'e^{i\Delta\phi}\frac{1}{1-r'^2e^{i\Delta\phi}}$.
4. On utilise les relations de Stokes pour obtenir :

$$a_{reflechi} = ar\frac{1-e^{i\Delta\phi}}{1-r^2e^{i\Delta\phi}}$$

5. L'onde réfléchie est nulle si $e^{i\Delta\phi} = 1$ d'où $\Delta\phi = m2\pi$ où m est un entier naturel.
6. Sur le même principe, on trouve :

$$a_{tranmis} = a\frac{1-r^2}{1-r^2e^{i\Delta\phi}}$$

7. On trouve $|\frac{a_{reflechi}}{a}|^2 = \frac{4R\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{(1-R)^2+4R\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$ où $R = r^2$.
8. De même, on trouve que $|\frac{a_{transmis}}{a}|^2 = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$.
9. $|\frac{a_{transmis}}{a}|^2_{max} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2} = 1$.

Exercice 4 : Cavité Fabry-Perrot

1. $\delta = 2nL$ et $\Delta\phi = \frac{4\pi nL}{\lambda}$.
2. On trouve la même expression que dans l'exercice précédent $\underline{a} = \underline{a}_0t^2e^{i\phi_0}\frac{1}{1-r^2e^{i\Delta\Phi}}$
3. On obtient, comme dans l'exercice précédent, $\varepsilon = \varepsilon_{max}\frac{1}{1+m\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$ avec $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$ et $\varepsilon_{max} = \varepsilon_0\frac{T^2}{(1-R)^2}$.

Exercice 5 : Éclairement transmis près de la résonance

1. On a $\delta = 2(L-l) + 2ln$ d'où $\Delta\Phi = 4\pi\frac{nl+(L-l)}{\lambda}$.
2. On trouve la même expression que dans l'exercice précédent $\underline{a} = \underline{a}_0t^2e^{i\phi_0}\frac{1}{1-r^2e^{i\Delta\Phi}}$
3. On obtient, comme dans l'exercice précédent, $\varepsilon = \varepsilon_{max}\frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$ avec $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ et $\varepsilon_{max} = \varepsilon_0\frac{T^2}{(1-R)^2}$.
4. Il y a résonance lorsque le dénominateur de l'expression de l'éclairement a la valeur la plus faible. Les résonances sont donc données par $\sin^2\Phi_m = 0$. Nous faisons varier légèrement la taille de la cavité à l'aide d'une cale piézo-électrique afin de de réaliser un balayage du déphasage au voisinage d'une résonance. Nous pouvons écrire $\varepsilon = \varepsilon_{max}\frac{1}{1+F\sin^2(\Phi)} = \varepsilon_{max}\frac{1}{1+F\sin^2(\Phi_m+(\Phi-\Phi_m))}$ avec $\Phi - \Phi_m << 1$. Au voisinage d'une résonance, nous pouvons donc faire un développement de Taylor au voisinage de Φ_m à l'ordre 2 en $(\Phi - \Phi_m)$ pour obtenir $\varepsilon = \varepsilon_{max}\frac{1}{1+F(\Phi-\Phi_m)^2}$. Pour $\Phi - \Phi_m << 1$, nous pouvons faire un DL supplémentaire et écrire $\varepsilon = \varepsilon_{max}(1 - F(\Phi - \Phi_m)^2)$.