Optique physique - solution
AAV n°6 : être capable d'étudier les interférences en lumières non-monochromatique

1 Les savoir-faire

Exercice 1 : Interféromètre de Michelson

1. $\delta = 2d$.
2. $\varepsilon = 2\varepsilon_0(1+\cos(\omega_0\tau))$.
3. $\varepsilon = 2\varepsilon_0(2+\cos(\omega_1\tau)+\cos(\omega_2\tau))$. Nous avons $\omega_1+\omega_2 = 2\pi c\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right) = 2\pi c\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\right)$ et $\omega_1-\omega_2 = 2\pi c\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right) = 2\pi c\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\right)$. Or, nous sommes dans l'approximation $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} << 1$, nous allons donc conserver uniquement les termes d'ordre 1 en $\Delta\lambda$, nous avons donc $\lambda_1\lambda_2 = \left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)\left(\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}\right) = \lambda_0^2 - \frac{(\Delta\lambda)^2}{4}$ d'où $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_0^2$ à l'ordre 1 en $\Delta\lambda$. Nous obtenons donc $\omega_1+\omega_2 = 2\pi\frac{2c}{\lambda_0}$ et $\omega_1-\omega_2 = 2\pi c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)$ d'où $\omega_1-\omega_2 = 2\pi c\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$ et $\omega_1+\omega_2 = 2\omega_0$. Nous obtenons donc $\varepsilon = 4\varepsilon_0\left(1+\cos(\frac{\pi c\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\tau)\cos(\omega_0\tau)\right)$.
4. Pour tracer le graphe et calculer l'expression du contraste, il est préférable d'exprimer l'éclairement en fonction de d d'où $\varepsilon = 4\varepsilon_0\left(1+\cos(2\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}d)\cos(2\pi\frac{2}{\lambda_0}d)\right)$. La valeur min vaut $\varepsilon_{min} = 4\varepsilon_0\left[1-\cos(2\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}d)\right]$ et la valeur max de l'éclairement vaut $\varepsilon_{min} = 4\varepsilon_0\left[1+\cos(2\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}d)\right]$. Le contraste a donc pour expression $C = |\cos(\frac{2\pi d\Delta\lambda}{\lambda_0^2})|$.
5. La distance d entre les deux miroirs est obtenue entre deux valeurs nulles du contraste d'où $\Delta d = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}$.
6. A.N.

Exercice 2 : Calcul de l'éclairement

1. $d\varepsilon = 2d\varepsilon_0(1+\cos(\omega\tau))$ or $d\varepsilon_0 = W(\omega)\mathrm{d}\omega$ d'où $d\varepsilon = 2W(\omega)(1+\cos(\omega\tau))\mathrm{d}\omega$.
2. Nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2W_0\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}}(1+\cos(\omega\tau))\mathrm{d}\omega \\ &= 2W_0\Delta\omega + \frac{2W_0}{\tau}\left[\sin(\omega\tau)\right]_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} \\ &= 2W_0\Delta\omega + \frac{4W_0}{\tau}\sin(\tau\frac{\Delta\omega}{2})\cos(\omega_0\tau)\end{aligned}$$

   soit $\varepsilon = 2W_0\Delta\omega\left(1+V(\tau)\cos(\omega_0\tau)\right)$ avec $V(\tau) = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}\Delta\omega)}{\frac{\tau}{2}\Delta\omega}$.
3. d'où

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0(1+V(\tau)\cos(\omega_0\tau))$$

4. $\varepsilon_{min} = 2\varepsilon_0(1 - V)$ et $\varepsilon_{max} = 2\varepsilon_0(1 + V)$ d'où :

$$C = |V(\tau)| = |\frac{\sin(\frac{\tau}{2}\Delta\omega)}{\frac{\tau}{2}\Delta\omega}|$$

5. Le premier brouillage peut-être interprété en terme de train d'onde comme le cas où deux wagons différents se retrouvent à interférer. La durée d'un wagon est donc donnée par $\frac{\tau^*}{2}\Delta\omega = \pi$. La durée τ^* d'un wawgon est donc reliée à la largeur spectrale de la source par $\tau^*\Delta\omega = 2\pi$. La longueur de cohérence a donc pour expression $l^* = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$. La durée d'un wagon a pour expression $\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

2 La mise en oeuvre

Exercice 3 : Calcul d'un interférogramme produit par une raie d'absorption

1. $\delta = d_1$.
2. $a = a_0 + a_1$. Par définition, $\varepsilon = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)(a_0 + a_1)^* = t_0^2\varepsilon_0 + t_1^2\varepsilon_0 + 2t_0t_1\varepsilon_0\cos(kd_1)$.
3. $C = \frac{t_0^2+t_1^2+2t_0t_1-(t_0^2+t_1^2-2t_0t_1)}{t_0^2+t_1^2+2t_0t_1+t_0^2+t_1^2-2t_0t_1} = \frac{2t_0t_1}{t_0^2+t_1^2}$. On a $C = 1$ pour $t_1 = t_0$.
4. ε varie de façon sinusoïdale avec une période de λ entre $\varepsilon_0(t_0 + t_1)^2$ et $\varepsilon_0(t_0 - t_1)^2$.
5. Un bande de fréquence $d\omega$ se traite comme une source monochromatique de fréquence ω. On applique la formule de Fresnel pour obtenir $d\varepsilon = t_0^2 d\varepsilon_0 + t_1^2 d\varepsilon_0 + 2t_0t_1 d\varepsilon_0\cos(kd_1) = (t_0^2+t_1^2)W(\omega)d\omega + 2t_0t_1W(\omega)\cos(kd_1)d\omega = (t_0^2+t_1^2)W(\omega)d\omega + 2t_0t_1W(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$ avec $\tau = \frac{d_1}{c}$.
6. L'éclairement total reçu au niveau du détecteur a pour expression :

$$\varepsilon = (t_0^2 + t_1^2)\int_0^{+\infty} W(\omega)d\omega + 2t_0t_1\int_0^{+\infty} W(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$$

Les fréquences sont toujours positives mais $W = 0$ quelque soit $\omega < 0$, nous pouvons donc étendre l'intégrale pour obtenir :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (t_0^2 + t_1^2)\int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)d\omega + 2t_0t_1\int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega \\ &= (t_0^2 + t_1^2)\varepsilon_0 + 2t_0t_1\int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)\Re\left(e^{i\omega\tau}\right)d\omega \\ &= (t_0^2 + t_1^2)\varepsilon_0 + 2t_0t_1\int_{-\infty}^{+\infty} \Re\left(W(\omega)e^{i\omega\tau}\right)d\omega\end{aligned}$$

L'intégrale de la partie réelle d'une fonction est égale à la partie réelle de l'intégrale de la fonction (on peut le démontrer en posant $f(x) = g(x) + ih(x)$. On a alors $\int f dx = \int g dx + i\int h dx$ d'où $\int \Re(f)dx = \int g dx = \Re\left(\int f dx\right)$). On obtient donc :

$$\varepsilon = (t_0^2 + t_1^2)\varepsilon_0 + 2t_0t_1\Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\right) \tag{1}$$

où $\Re(z)$ est la partie réelle de z. La quantité entre parenthèse représente la transformée de fourrier de la fonction W

Le spectre de la lumière incidente est modélisé par un rectangle de largeur $\Delta\omega$ et de hauteur $\frac{\varepsilon_0}{\Delta\omega}$ (voir figure suivante).

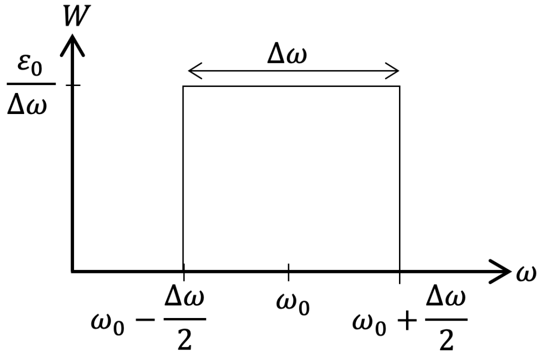

Figure 1 – Source avec un spectre rectangulaire.

7. Montrer que l'éclairement total reçue au niveau du détecteur peut se mettre sous la forme :
$$\varepsilon = (t_0^2 + t_1^2)\varepsilon_0 + 2t_0t_1\varepsilon_0 V(\tau)\cos(\omega_0\tau)$$
et déterminer l'expression de la fonction $V(\tau)$.
8. Déterminer l'expression du contraste. En déduire l'expression de d_1 qui correspond à la première annulation du contraste.

Avant d'atteindre l'interféromètre, la lumière précédente traverse une cellule transparente contenant un gaz. Ce dernier absorbe la lumière incidente autour de la fréquence ω_A dans un intervalle de fréquences étroit $\delta\omega$ (voir figure suivante).

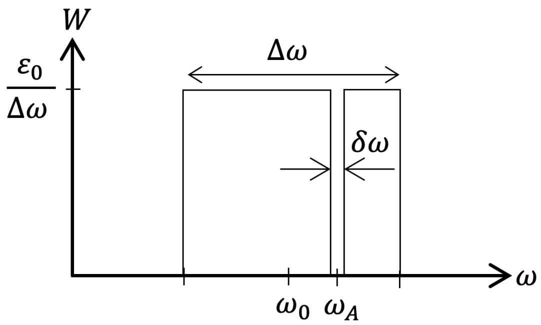

Figure 2 – Source avec un spectre continu qui présente une raie d'absorption.

9. Déterminer l'expression de l'éclairement dans ce cas.

Exercice 4 : Source à profil gaussien

1. $d\varepsilon = 2d\varepsilon_0(1+\cos(2\pi f\tau))$ or $d\varepsilon_0 = W(f)\mathrm{d}f$ d'où $d\varepsilon = 2W(f)(1+\cos(2\pi\tau f))\mathrm{d}f$. Nous obtenons donc $\varepsilon = 2\int_0^{+\infty} W(f)(1+\cos(2\pi\frac{\delta}{c}f))\mathrm{d}f$.
2. On pose $u = f - f_0$ pour obtenir $\varepsilon = 2\varepsilon_0 + 2\int_{-f_0}^{+\infty} W(u)\cos(2\pi\frac{\delta}{c}(u+f_0))\mathrm{d}u$.
Or $W(u) = 0$ pour $u < -f_0$. Nous pouvons donc écrire :
$\varepsilon = 2\varepsilon_0 + 2\cos(2\pi\frac{\delta}{c}f_0)\int_{-\infty}^{+\infty} W(u)\cos(2\pi\frac{\delta}{c}u)\mathrm{d}u - 2\sin(2\pi\frac{\delta}{c}f_0)\int_{-\infty}^{+\infty} W(u)\sin(2\pi\frac{\delta}{c}u)\mathrm{d}u$. L'intégrale sur la fonction sin est nulle car $W(u)$ est paire donc symétrique par rapport à $u = 0$. Nous obtenons donc $\varepsilon = 2\varepsilon_0 + 2\cos(2\pi\frac{\delta}{c}f_0)\int_{-\infty}^{+\infty} W(u)\cos(2\pi\frac{\delta}{c}u)\mathrm{d}u$. On utilise la

fonction d'Euler pour obtenir $\varepsilon = 2\varepsilon_0 + 2\cos(2\pi\frac{\delta}{c}f_0)\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} W(u)(e^{i2\pi\frac{\delta}{c}u} + e^{-i2\pi\frac{\delta}{c}u})\mathrm{d}u = 2\varepsilon_0 + 2\cos(2\pi\frac{\delta}{c}f_0)\int_{-\infty}^{+\infty} W(u)e^{i2\pi\frac{\delta}{c}u}\mathrm{d}u$ par parité de $W(u)$. Nous obtenons donc $\varepsilon = 2\varepsilon_0\left(1 + V(\delta)\cos(\frac{2\pi\delta}{c}f_0)\right)$ avec $V(\delta) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} W(f)e^{i\frac{2\pi(f-f_0)\delta}{c}}df$.

3. On considère une source de profil gaussien donné par $W(f) = W_0 e^{-\left(\frac{f-f_0}{a}\right)^2}$ où a est une constante. On a $V(\delta) = \frac{aW_0}{\varepsilon_0\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2\pi a\delta}{c}}$ d'où $\varepsilon = 2\varepsilon_0\left(1 + \frac{aW_0}{\varepsilon_0\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2\pi a\delta}{c}}\cos(\frac{2\pi\delta}{c}f_0)\right)$.
4. Tracer le graphe de $\varepsilon(\delta)$. L'enveloppe est une exponentielle décroissante.

Exercice 5 : Sources à deux fréquences

Voir le premier savoir-faire.