Optique physique

AAV n°5 : être capable d'étudier les interférences en lumières non-monochromatique

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire

Savoir étudier un doublet de longueur d'onde

Exercice 1 : Interféromètre de Michelson

On considère un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air éclairé par une lampe à vapeurs de sodium de longueur d'onde $\lambda_0 = 589{,}3\,\text{nm}$ et nous plaçons un détecteur pour enregistrer l'éclairement au centre de la figure d'interférence.

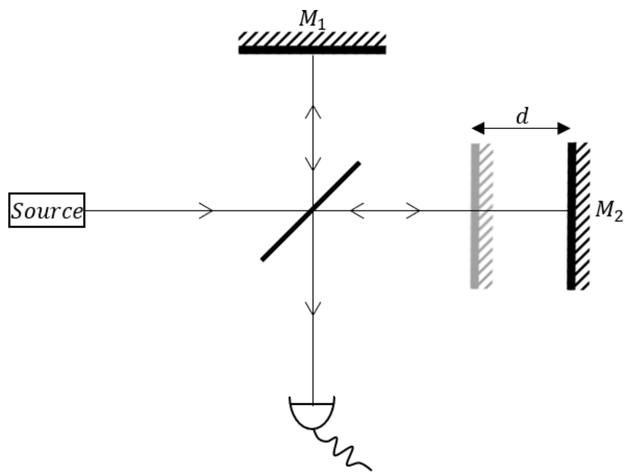

FIGURE 1 – Interféromètre de Michelson utilisé pour réaliser l'interférogramme de la source lumineuse.

1. Donner l'expression de la différence de marche au centre de la figure d'interférence.
2. Donner l'expression de l'éclairement au centre de la figure d'interférence en fonction du retard τ entre les deux rayons et ω_0. Donner l'expression de τ.

Une lampe à vapeur de sodium émet en fait deux longueurs d'ondes voisine λ_1 et λ_2 tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0$ et $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_0} << 1$. Nous avons donc $\lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$ et $\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ (figure 2).

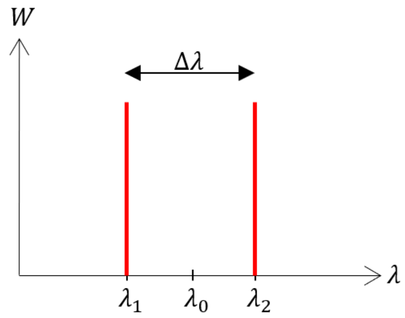

FIGURE 2 – Spectre d'une source qui émet deux longueurs d'ondes voisines λ_1 et λ_2.

3. Montrer que l'éclairement total peut se mettre sous la forme $\varepsilon = 4\varepsilon_0\left(1+\cos(\frac{\pi c\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\tau)\cos(\omega_0\tau)\right)$.
4. En déduire que le contraste a pour expression $C = |\cos(\frac{2\pi d\Delta\lambda}{\lambda_0^2})|$.
5. Nous augmentons la distance d entre les deux miroirs. Montrer que la distance entre deux brouillages successifs a pour expression $\Delta d = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}$.
6. On mesure $\Delta d = 0{,}29\,\text{mm}$, en déduire l'écart entre les deux longueurs d'ondes.

Savoir calculer l'éclairement d'une source à profil spectral rectangulaire

Exercice 2 : Calcul de l'éclairement

On considère un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air éclairé par une source dont l'intensité lumineuse se répartie sur une plage spectrale de largeur $\Delta\omega$ centré sur ω_0 et tel que $\Delta\omega << \omega_0$. Nous plaçons un détecteur pour enregistrer l'éclairement au centre de la figure d'interférence.

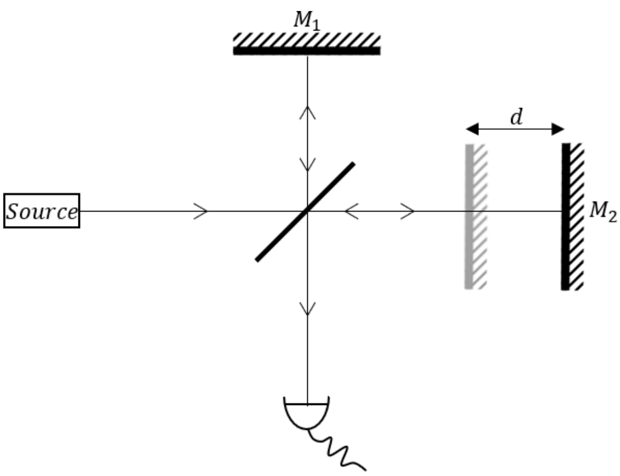

FIGURE 3 – Interféromètre de Michelson utilisé pour réaliser l'interférogramme de la source lumineuse.

Nous notons $W(\omega)$ la densité spectrale d'éclairement de la source. Autrement dit, nous avons $d\varepsilon_0 = W(\omega)\mathrm{d}\omega$ entre ω et $\omega + d\omega$. Nous considérons que le profil spectral de la source est rectangulaire, c'est-à-dire que $W(\omega) = W_0$ entre $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$. $W(\omega) = 0$ partout ailleurs (voir figure suivante).

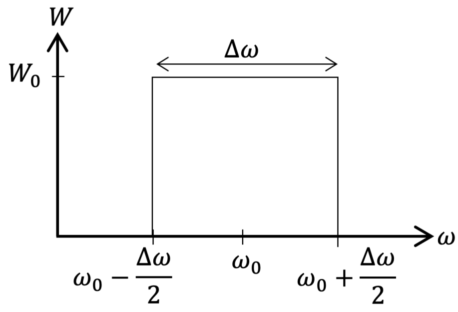

FIGURE 4 – Source avec un spectre continu. Ici, nous considérons le cas le plus simple d'un spectre rectangulaire.

1. Montrer que $d\varepsilon = 2W(1+\cos(\omega\tau))d\omega$ au niveau du détecteur en utilisant la formule de Fresnel.
2. Utiliser le principe de superposition pour montrer que l'éclairement peut se mettre sous la forme :
$$\varepsilon = 2W_0\Delta\omega(1 + V(\tau)\cos(\omega_0\tau))$$
avec $V(\tau) = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}\Delta\omega)}{\frac{\tau}{2}\Delta\omega}$.
3. En déduire que :
$$\varepsilon = 2\varepsilon_0(1 + V(\tau)\cos(\omega_0\tau))$$
4. En déduire que le contraste a pour expression :
$$C = |V(\tau)| = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}\Delta\omega)}{\frac{\tau}{2}\Delta\omega}$$
5. En déduire que la durée d'un train d'onde a pour expression $\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$. En déduire l'expression de la longueur de cohérence.

2 La mise en oeuvre

Exercice 3 : Calcul d'un interférogramme produit par une raie d'absorption

Un interféromètre sépare une onde incidente en deux ondes lumineuses mutuellement cohérentes et monochromatiques d'amplitudes a_0 et a_1. Elles interfèrent sur un détecteur quadratique (par exemple une photodiode) qui enregistre la valeur moyenne du carré de l'amplitude.

Au niveau du détecteur, les champs complexes de ces ondes sont de la forme : $a_0 = t_0A_0e^{i(kL_0-\omega t)}$ et $a_1 = t_1A_0e^{i(kL_1-\omega t)}$ avec $L_1 = L_0 + d_1$.

1. Quelle est la différence de marche entre l'onde 0 et l'onde 1 ?
2. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe total a sur le détecteur puis l'éclairement ε mesurée par le détecteur en fonction de t_0, t_1, ε_0, k et d_1. On rappelle que $\varepsilon = \frac{1}{2}aa^*$ en notation complexe et on note $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}A_0^2$.
3. Déterminer l'expression du contraste en fonction de t_0 et t_1. Que doit valoir t_1 en fonction de t_0 pour avoir un contraste maximal ?

On suppose que l'on peut faire varier d_1 et on enregistre l'éclairement en fonction de d_1.

4. Tracer qualitativement l'évolution de ε en fonction de d_1. Que vaut la période de cette fonction ?

La lumière incidente est maintenant polychromatique. Son spectre est noté $W(\omega)$ et son éclairement dans la bande de fréquence $d\omega$ est donnée par $d\varepsilon_0 = W(\omega)d\omega$.

5. Montrer que l'éclairement reçu au niveau du détecteur dans la bande de fréquence $d\omega$ est donnée par $d\varepsilon = (t_0^2 + t_1^2)W(\omega)d\omega + 2t_0t_1W(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$. En déduire l'expression de τ.
6. Montrer que l'éclairement total reçu au niveau du détecteur peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon = (t_0^2 + t_1^2)\varepsilon_0 + 2t_0t_1\Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\right) \tag{1}$$

   où $\Re(z)$ est la partie réelle de z. Admettre l'équation 1 dans la suite du sujet si vous ne la démontrez pas.

Le spectre de la lumière incidente est modélisé par un rectangle de largeur $\Delta\omega$ et de hauteur $\frac{\varepsilon_0}{\Delta\omega}$ (voir figure suivante).

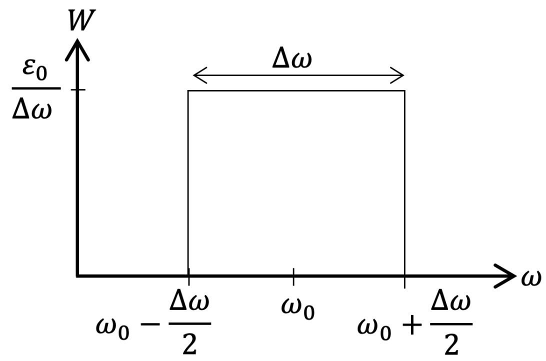

FIGURE 5 – Source avec un spectre rectangulaire.

7. Montrer que l'éclairement total reçu au niveau du détecteur peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon = (t_0^2 + t_1^2)\varepsilon_0 + 2t_0t_1\varepsilon_0V(\tau)\cos(\omega_0\tau)$$

   et déterminer l'expression de la fonction $V(\tau)$.
8. Déterminer l'expression du contraste. En déduire l'expression de d_1 qui correspond à la première annulation du contraste.

Avant d'atteindre l'interféromètre, la lumière précédente traverse une cellule transparente contenant un gaz. Ce dernier absorbe la lumière incidente autour de la fréquence ω_A dans un intervalle de fréquences étroit $\delta\omega$ (voir figure suivante).

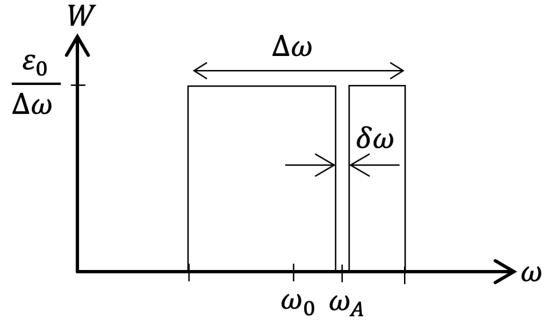

FIGURE 6 – Source avec un spectre continu qui présente une raie d'absorption.

9. Déterminer l'expression de l'éclairement dans ce cas.

Exercice 4 : Source à profil gaussien

On fait interférer deux ondes de même éclairement issues d'une même source ponctuelle. Cette source est caractérisée par sa densité spectrale d'énergie qui est une fonction paire centrée sur la fréquence f_0 avec $W(f) = 0$ pour $f < 0$. On note δ la différence de marche entre les deux ondes et on note $W(f)df$ l'éclairement infinitésimal produit au niveau de la source par la bande spectrale de largeur df.

1. Montrer, à l'aide de la formule de Fresnel, que l'éclairement total au niveau du détecteur a pour expression $\varepsilon = 2\int_0^{+\infty} W(f)\left(1+\cos(2\pi f\frac{\delta}{c})\right)df$
2. En posant $u = f - f_0$, montrer que l'éclairement peut s'écrire sous la forme : $\varepsilon = 2\varepsilon_0\left(1+V(\delta)\cos(\frac{2\pi\delta}{c}f_0)\right)$ où la visibilité $V(\delta)$ est donnée par la relation de Wiener $V(\delta) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} W(f-f_0)e^{i\frac{2\pi(f-f_0)\delta}{c}}df$.
3. On considère une source de profil gaussien donné par $W(f) = W_0 e^{-\left(\frac{f-f_0}{a}\right)^2}$ où a est une constante. Déterminer l'expression de $V(\delta)$. On donne la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2}e^{j\alpha X}dX = \sqrt{\pi}e^{-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$
4. Tracer le graphe de $\varepsilon(\delta)$.

Exercice 5 : Sources à deux fréquences

On fait interférer deux ondes issues d'une même source ponctuelle. La lampe utilisée pour produire cette lumière émet un rayonnement dont le spectre est composé de deux raies de longueurs d'onde très proches λ_1 et λ_2. L'éclairement de chacune de ces deux composantes sont identiques.

1. Lorsque deux ondes de longueurs d'onde différentes se superposent, que peut-ont dire de l'éclairement résultant ?
2. Si la lampe émettait un rayonnement monochromatique de longueur d'onde λ, quelle serait, en fonction de la différence de marche δ l'expression de l'éclairement résultant ? On note ε_0 l'éclairement.
3. Exprimer l'éclairement dans le cas de la source à deux raies.
4. On considère que les deux longueurs d'onde du doublet sont très proches et on définit λ_0 la valeur moyenne de la longueur d'onde et $\Delta\lambda$ la largeur du doublet. Montrer que l'expression de ε se met sous la forme :

$$\varepsilon = 4\varepsilon_0\left(1+V(\delta)\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\right)$$

   où $V(\delta)$ est la fonction de visibilité a exprimer en fonction de $\Delta\lambda$.
5. Représenter l'allure du graphe de ε en prenant $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{10}$.
6. Partant de la différence de marche nulle, on augmente δ jusqu'à voir disparaitre les franges. Que vaut $V(\delta)$ dans ce cas ? Quel est la valeur de δ_B correspondante ?