Optique physique - solution

AAV n°4 : être capable de retrouver et d'utiliser la formule de Fresnel dans un montage à division du front d'onde ou à division d'amplitude

Exercice 1 : Flaque d'huile

1. $l^\star \sim 1\,\mu m$.
2. $\delta = 2e$ d'où $e = 1\,\mu m$

Exercice 2 : Utilisation de la notation complexe

1. $\underline{a}_1 = A_1 e^{-i\varphi_1}$ et $A_2 e^{-i\varphi_2}$ avec $\varphi_1 = \omega t - 2\pi\frac{(S_1M)}{\lambda_0}$ et $\varphi_2 = \omega t - 2\pi\frac{(S_2M)}{\lambda_0}$. L'éclairement a pour expression $\varepsilon(M) = \frac{1}{2}(\underline{a}_1+\underline{a}_2)(\underline{a}_1+\underline{a}_2)^* = \frac{1}{2}\underline{a}_1\underline{a}_1^*+\frac{1}{2}\underline{a}_2\underline{a}_2^*+\frac{1}{2}\underline{a}_1\underline{a}_2^*+\frac{1}{2}\underline{a}_2\underline{a}_1^* = \frac{1}{2}A_1^2+\frac{1}{2}A_2^2+\frac{1}{2}A_1A_2\left(e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}+e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)}\right) = \frac{1}{2}A_1^2+\frac{1}{2}A_2^2+A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) = \varepsilon_1+\varepsilon_2+2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\cos(\Delta\phi)$ avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ et $\frac{1}{2}A^2 = \varepsilon$.
2. Dans le cas où les deux sources ont la même amplitude, la formule de Fresnel devient $\varepsilon(M) = 2\varepsilon_1(1+\cos(\Delta\phi)) = 4\varepsilon_1\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$. Tracer le graphe de ε en fonction du déphasage entre les deux ondes.
3. $\varepsilon(M) = 2\varepsilon_1(1+\cos(2\pi p))$. On retrouve la condition d'interférence constructive si p est un entier relatif et destructive si p est un demi-entier.

Exercice 3 : Facteur de contraste

1. On injecte l'expression de la formule de Fresnel dans l'expression $C = \frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max}+\varepsilon_{min}}$ pour obtenir $C = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.
2. C est max si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Il faut chercher ε_1 tel que $\frac{dC}{d\varepsilon_1} = 0$ pour le montrer. On peut également poser $\varepsilon_1 = x\varepsilon_2$ et chercher x tel que $\frac{dC}{dx} = 0$. On peut également partir de $\frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max}+\varepsilon_{min}} = 1$ pour obtenir $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 = 4\varepsilon_1\varepsilon_2$ soit $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 = 0$ d'où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Exercice 4 : Fentes d'Young

1. Les rayons émergeant des deux fentes sont parallèles étant donné les conditions d'observation. Expérimentalement, nous observons dans le **plan focal image d'une lentille pour s'assurer d'observer les interférences entre des rayons parallèles**. Nous en déduisons que $\delta = a\theta = \frac{ax}{f}$ où x est la position du point P sur l'écran par rapport à l'axe optique.
2. L'éclairement est donné par la formule de Fresnel $\varepsilon(M) = 2\varepsilon_1(1+\cos(2\pi\frac{\delta}{\lambda})) = 2\varepsilon_1(1+\cos(2\pi\frac{ax}{\lambda f}))$
3. $y = 0$ pour la frange centrale, nous avons donc $\varepsilon(M) = 4\varepsilon_1$
4. Une frange est obtenue pour $\cos(2\pi\frac{ax}{\lambda f}) = 1$ soit $x = n\frac{\lambda f}{a}$ avec n entier relatif. L'interfrange a donc pour expression $i = \frac{\lambda f}{a}$.

5. La cinquième frange brillante est à une distance de $5i = 5\frac{\lambda f}{a}$ de l'axe optique.

Exercice 5 : Interféromètre de Michelson

1. $\delta = 2d$.
2. Le décalage temporelle entre les deux faisceaux a pour expression $\tau = \frac{2d}{c}$ or la formule de Fresnel a pour expression $\varepsilon(M) = 2\varepsilon_1(1+\cos(2\pi\frac{\delta}{\lambda}))$ d'où $\varepsilon(M) = 2\varepsilon_1(1+\cos(2\pi\frac{\tau c}{\lambda}))$. La fréquence est relié à la longueur d'onde par $f = \frac{c}{\lambda}$, nous pouvons donc écrire l'éclairement sous la forme $\varepsilon(M) = 2\varepsilon_1(1+\cos(\omega_0\tau))$ avec $\omega_0 = 2\pi f$.
3. Voir le graphe du cours.

Exercice 6 : Les fentes de Young

1. $\alpha = \theta = \frac{y}{d}$.
2. $\delta = \frac{ay}{d}$.
3. $\Delta\phi = 2\pi\frac{ay}{\lambda d}$.
4. l'éclairement au point P a donc pour expression $\varepsilon = \frac{1}{2}(\underline{a}_1 + \underline{a}_2)(\underline{a}_1 + \underline{a}_2)^\star$ soit $\varepsilon = 2\varepsilon_1(1+\cos\Delta\phi) = 4\varepsilon_1\cos^2(\frac{\Delta\phi}{2}) = 4\varepsilon_1\cos^2\left(\frac{\pi ay}{d\lambda}\right)$.
5. L'éclairement $\varepsilon = 4\varepsilon_1\cos^2\left(\frac{\pi ay}{d\lambda}\right)$ ne change pas si y augmente de $\frac{\lambda d}{a}$. L'interfrange a donc pour expression $i = \frac{\lambda d}{a}$.

Exercice 7 : Les fentes de Young

1. $\varepsilon =< (a_1+a_2+a_3)^2 >= \frac{1}{2}(\underline{a}_1+\underline{a}_2+\underline{a}_3)(\underline{a}_1+\underline{a}_2+\underline{a}_3)^\star = 3\varepsilon_1+2\Re(\underline{a}_1^\star\underline{a}_2)+2\Re(\underline{a}_1^\star\underline{a}_3)+2\Re(\underline{a}_2^\star\underline{a}_3)$ soit $\varepsilon = 3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_1\cos\phi + 2\varepsilon_1\cos(2\Delta\phi))$ avec $\Delta\phi = 2\pi\frac{ay}{\lambda d}$.
   En utilisant la somme des éléments d'une suite géométrique, nous obtenons directement $\varepsilon = \varepsilon_1\frac{\sin^2\left(\frac{3\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$. Cette dernière formule est plus intéressante car directement généralisable.
2. L'éclairement $\varepsilon = \varepsilon_1\frac{\sin^2\left(3\pi\frac{ay}{\lambda d}\right)}{\sin^2\left(\pi\frac{ay}{\lambda d}\right)}$ ne change pas si y augmente de $\frac{\lambda d}{a}$. L'interfrange a donc pour expression $i = \frac{\lambda d}{a}$.

Exercice 8 : Interféromètre de Michelson

1. $\delta = 2d$.
2. La figure d'interférence est donnée par la formule de Fresnel $\varepsilon = 2\varepsilon_1(1+\cos(\Delta\phi)) = 4\varepsilon_1\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$. Le déphase s'écrit ici $\Delta\phi = 2\pi 2d\lambda_0 = 2\pi\frac{c}{\lambda_0}\tau = 2\pi f\tau = \omega\tau$. L'éclairement au niveau du détecteur a donc pour expression $\varepsilon = 2\varepsilon_1(1+\cos(\omega\tau)) = 4\varepsilon_1\cos^2(\frac{\omega}{2}\tau)$.
3. La différence de marche optique induite par la présence du réservoir de longueur l qui contient un gaz d'indice n vaut $\delta = 2nl$. Le réservoir transparent prend la place d'une distance $2l$ parcourue par la lumière dans l'air. La différence de marche optique entre les deux rayons a donc pour expression $\delta = 2l(n-1)$.
4. Le déphasage entre les deux rayons a pour expression $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda_0}$
5. On observe le défilement de N franges au niveau du détecteur après l'introduction du réservoir du gaz, donc $\Delta\varphi = N2\pi$ d'où $n = 1 + \frac{N\lambda_0}{2l}$.

Exercice 9 : Lame séparatrice

1.
$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= \frac{1}{2}a_3\underline{a}_3^\star \\ &= \frac{1}{2}(t'\underline{a}_1 + r\underline{a}_2)(t'\underline{a}_1^* + r\underline{a}_2^*) \\ &= \frac{1}{2}t'^2A_1 + \frac{1}{2}r^2A_2^2 + \frac{1}{2}t'rA_1A_2\left(e^{-i(\phi_1-\phi_2)} + e^{i(\phi_1-\phi_2)}\right)\end{aligned}$$

2.
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 t'^2 + \varepsilon_2 r^2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}t'r\cos(\Delta\phi)$$

3. De même,
$$\varepsilon_4 = \varepsilon_1 r'^2 + \varepsilon_2 t^2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}r't\cos(\Delta\phi)$$

4. La conservation de l'énergie a pour expression :
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1(t'^2 + r'^2) + \varepsilon_2(r^2 + t^2) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}(t'r + r't)\cos(\Delta\phi)$$
Nous en déduisons :
$$\begin{aligned}t'^2 + r'^2 &= 1 \\ r^2 + t^2 &= 1 \\ t'r + r't &= 0\end{aligned}$$

5. On suppose que la lame symétrique de telle sorte que $t = t'$. L'équation $t'r + r't = 0$ montre que $r' = -r$.

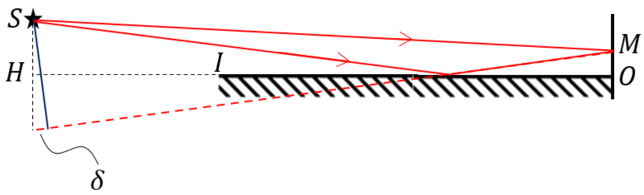
6.
$$\varepsilon_4 = \varepsilon_1 r'^2 + \varepsilon_2 t^2 + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}r't\cos(\Delta\phi)$$
.
Pour $r' = 0$, ε_4 est maximal quelque soit la valeur de $\Delta\phi$.
Pour $r' > 0$, ε_4 est maximal pour $\Delta\phi = m2\pi$ avec m un entier naturel.
Pour $r' < 0$, ε_4 est maximal pour $\Delta\phi = (2m+1)\pi$ avec m un entier naturel.

Exercice 10 : Biprisme de Fresnel

1. Schéma
2. Nous cherchons la déviation $D = D_1 + D_2 = i - r_1 + r_2 - i_2$. Aux petits angles, nous avons $i = nr_1$ et $ni_2 = r_2$ d'où $D = D_1 + D_2 = i - r_1 + r_2 - i_2 = (n-1)r_1 + (n-1)i_2$. Nous avons par ailleurs $r_1 + \beta + i_2 = \pi$ et $\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \beta = 2\pi$ d'où $r_1 + i_2 = \alpha$. Nous obtenons donc $D = (n-1)\alpha$. L'angle de déviation ne dépend donc pas de l'angle d'incidence. Le prisme est donc stigmatique de façon approché aux petits angles. Nous pouvons donc prendre un rayon particulier pour déterminer la position de la source : celui qui passe par le centre du prisme avec un angle d'incidence nul.
3. Schéma
4. Aux petits angles, nous avons $(n-1)\alpha = \frac{l/2}{b}$ donc $l = 2(n-1)\alpha b$.
5. Aux petits angles, nous avons $(n-1)\alpha = \frac{S_1S_2/2}{a}$ donc $S_1S_2 = 2(n-1)\alpha a$.
6. $\delta = \frac{2(n-1)\alpha ay}{a+b}$ d'où $\varepsilon = 2\varepsilon_1\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{2(n-1)\alpha ay}{\lambda(a+b)}\right)\right)$.
7. L'interfrange a pour expression $\Delta y = \frac{\lambda(a+b)}{2(n-1)\alpha a}$ et $N = \frac{l}{\Delta y} = \frac{4\alpha^2(n-1)^2ab}{\lambda(a+b)}$

Exercice 11 : Miroir de Lloyd

1. La figure montre le tracé de rayons. Étant donné les dimensions, l'angle que font les rayons par rapport à l'horizontal est petit et les rayons sont quasi parallèles. Nous avons donc $\theta = \frac{x}{D}$ et $\delta = 2SH\theta = \frac{2yx}{D}$. La réflexion sur le miroir rajoute un déphasage supplémentaire de π donc une différence de marche optique de $\frac{\lambda}{2}$, nous obtenons donc $\delta = \frac{2y(x)}{D} + \frac{\lambda}{2}$.



2. $\varepsilon(x) = 2\varepsilon_1(1 + \cos\left(2\pi\frac{2yx}{D\lambda} + \pi\right))$. Les franges sont rectilignes.
3. $p = \frac{2yx}{\lambda D} + \frac{1}{2}$ l'interfrange est donnée par $\Delta p = \frac{2y\Delta x}{\lambda D}$ avec $\Delta p = 1$ d'où $i = \Delta x = \frac{\lambda D}{2y}$. L'ordre d'interférence en $x = 0$ a pour expression $p = \frac{1}{2}$. La position de la première frange est donc donnée par $\frac{2yx}{\lambda D} + \frac{1}{2} = 1$ d'où $x_0 = \frac{\lambda D}{4y}$. La cinquième frange brillante se trouve donc à $x = \frac{\lambda D}{4y} + 4\frac{\lambda D}{2y}$ de O.
4. Le champ de vue sur l'écran est de $l = \frac{yL}{D-L}$. Le nombre de franges visible est donc donné par $\frac{n\lambda D}{2y} - \frac{\lambda D}{4y} = \frac{yL}{D-L}$ soit $n = \frac{2y^2L}{2\lambda D(D-L)} + \frac{1}{2}$.