TD I – Révisions

---

1 Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1.1 (Normes)**.** Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad ; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

1. Tout d'abord, ces trois fonctions sont à valeurs positives. Ensuite, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|tx\|_1 &= \sum_{i=1}^n |tx_i| = t\|x\|_1 \\ \|tx\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n t^2 x_i^2} = |t|\|x\|_2 \\ \|tx\|_\infty &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |tx_i| = |t|\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

Enfin, il faut vérifier l'inégalité triangulaire. Pour la première norme, cela découle de l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue : $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$. En effet, on a alors

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Pour la troisième norme, on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on a

$$\begin{aligned}|x_i + y_i| &\leqslant |x_i| + |y_i| \\ &\leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\|x+ty\|_2^2 &= \langle x+ty, x+ty\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle ty, x\rangle + \langle ty, ty\rangle \\ &= \|x\|_2^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|_2^2.\end{aligned}$$

Par positivité du produit scalaire, $\|x+ty\|^2$ est toujours positif. Donc, le trinôme apparaissant à la dernière ligne a au plus une racine réelle, ce qui signifie que son déterminant est négatif. Or, ce déterminant est égal à

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|_2^2\|y\|_2^2.$$

Ainsi,

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|_2^2\|y\|_2^2$$

et le résultat suit.

3. Soit i_0 tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$. Alors,

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &= |x_{i_0}| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_{i_0}| \\ &= n\|x\|_\infty\end{aligned}$$

et donc $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \|x\|_\infty$. De même,

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty^2 &= |x_{i_0}|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_{i_0}|^2 \\ &= n\|x\|_\infty^2\end{aligned}$$

et donc $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

Exercice 1.2 (Topologie des boules). **1**. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Si $y \in B(x, r)$, alors $\|x-y\| < r$. Donc, $\epsilon = r - \|x-y\| > 0$. Soit $z \in B(y, \epsilon)$. On a alors

$$\begin{aligned}\|x-z\| &= \|x-y+y-z\| \\ &\leqslant \|x-y\| + \|y-z\| \\ &< \|x-y\| + \epsilon \\ &= \|x-y\| + r - \|x-y\| \\ &= r.\end{aligned}$$

Ainsi, $z \in B(x, r)$ et nous avons donc montré que $B(y, \epsilon) \subset B(x, r)$. Autrement dit, pour tout point de $B(x, r)$, il existe une boule ouverte centrée sur ce point et contenue dans $B(x, r)$, ce qui est exactement dire que $B(x, r)$ est ouverte.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Nous devons montrer que le complémentaire de $B_f(x, r)$ dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert. Soit donc $y \notin B(x, r)$. Alors, $\|x-y\| > r$, donc $\epsilon = \|x-y\| - r > 0$. Soit $z \in B(y, \epsilon)$. On a alors

$$\begin{aligned}\|x-z\| &= \|x-y+y-z\| \\ &\geqslant \|x-y\| - \|y-z\| \\ &> \|x-y\| - \epsilon \\ &= \|x-y\| - (\|x-y\| - r) \\ &= r.\end{aligned}$$

Ainsi, $z \notin B_f(x,r)$ et nous avons donc montré que $B(y,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_f(x,r)$. Autrement dit, pour tout point du complémentaire de $B_f(x,r)$, il existe une boule ouverte centrée sur ce point et contenu dans le complémentaire de $B_f(x,r)$, ce qui est exactement dire que ce complémentaire est ouvert, et donc que $B_f(x,r)$ est fermée.

3. Soit $y \notin F$. Alors, comme F est fermé, son complémentaire est ouvert donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(y,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$. En particulier, considérons le point

$$z = y + \frac{\epsilon}{2\|x-y\|}(x-y).$$

D'une part,

$$\begin{aligned}\|z-y\| &= \left\|\frac{\epsilon}{2\|x-y\|}(x-y)\right\| \\ &= \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon,\end{aligned}$$

donc $z \in B(y,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\|x-z\| &= \left\|x-y-\frac{\epsilon}{2\|x-y\|}(x-y)\right\| \\ &= \left(1-\frac{\epsilon}{2\|x-y\|}\right)\|x-y\| \\ &= \|x-y\| - \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Mais comme $z \in B(y,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$, $z \notin B(x,r)$, donc $\|x-z\| \geqslant r$. Ainsi,

$$\begin{aligned}r &\leqslant \|x-z\| \\ &= \|x-y\| - \frac{\epsilon}{2} \\ &< \|x-y\|.\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $y \notin B_f(x,r)$. Autrement dit, $B_f(x,r) \subset F$.

4. L'adhérence d'une partie est le plus petit fermé qui la contient. Or, nous venons de prouver deux choses :

- $B_f(x,r)$ est un fermé contenant $B(x,r)$;
- Tout fermé contenant $B(x,r)$ contient $B_f(x,r)$.

Ainsi, $B_f(x,r)$ est l'adhérence de $B(x,r)$.

Exercice 1.3 (Caractérisation séquentielle des fermés ★). Supposons F fermée et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers une limite x. Supposons par l'absurde que $x \notin F$. Par définition d'un fermé, $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$. En particulier, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $x_k \notin B(x,\epsilon)$. Mais ceci contredit la définition de la limite d'une suite. Ainsi, $x \in F$.

Réciproquement, supposons que toute suite de F qui converge a sa limite dans F. Si F n'était pas fermé, alors son complémentaire ne serait pas ouvert. Donc, il existerait $y \notin F$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, $B(y,\epsilon) \cap F \neq \emptyset$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pourrait trouver un élément $x_k \in F \cap B(y,1/k)$. Alors, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ serait une suite d'éléments de F qui par construction convergerait vers $y \notin F$, une contradiction. Ainsi, F est fermée.

Exercice 1.4 (Bord ★)**.** Pour une partie A de $\mathbb{R}^n$, on définit le *bord de* A (aussi appelé *frontière* de A) comme

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$

1. Il suffit de montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$. Pour ce faire, considérons un point x qui n'est pas dans l'intérieur de A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la boule $B(x, 1/n)$ n'est pas contenue dans A, donc elle contient au moins un point $x_n \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Par construction $x_n \to x$, ce qui montre que $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$. Réciproquement, soit $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n \setminus A$ qui converge vers x. Pour $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in B(x, \epsilon)$. Par conséquent, la boule $B(x, \epsilon)$ n'est pas contenue dans A. Ainsi, A ne contient aucune boule centrée en x, ce qui signifie que x n'est pas dans l'intérieur de A.

2. Posons $B = \mathbb{R}^n \setminus A$ le complémentaire de A. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\partial B &= \overline{B} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus B}) \\
&= (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}) \cap \overline{A} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}) \\
&= \partial A.
\end{aligned}$$

3. Si A est fermé, alors $\partial A = A \setminus \mathring{A} \subset A$. Réciproquement, si $\partial A \subset A$, nous allons utiliser la caractérisation séquentielle des fermés pour montrer que A est fermé. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers une limite $x \in \mathbb{R}^n$. Par définition, $x \in \overline{A}$. Si $x \in \mathring{A}$, alors $x \in A$. Autrement, $x \in \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A \subset A$. Ainsi, dans tous les cas, $x \in A$, ce qui montre que A est fermé.

4. Par définition, A est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé. Or $\mathbb{R}^n \setminus A$ est fermé si et seulement s'il contient sa frontière d'après la question précédente. Comme le frontière de $\mathbb{R}^n \setminus A$ est égale à la frontière de A, on conclut que A est ouvert si et seulement si $\partial A \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, ce qui est exactement dire que $A \cap \partial A = \emptyset$.

Exercice 1.5 (Partie définie par des inégalités ★)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $h_1, \cdots, h_p : u \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On considère l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{x \in U \mid h_i(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant p\}.$$

1. On peut par exemple utiliser la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}$ qui converge vers un certain $x \in U$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on a par continuité de h_i que $h_i(x_n) \to h_i(x)$, et donc que $h_i(x) \leqslant 0$. Ainsi, $x \in \mathcal{D}$, ce qui conclut.

2. Soit x tel que $h_i(x) < 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. Par continuité de h_i, il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \delta_i)$,

$$|h_i(y) - h_i(x)| \leqslant \frac{|h_i(x)|}{2},$$

ce qui implique que $h_i(y) < 0$. Ainsi, en posant $\delta = \min_i \delta_i$, on a $h_i(y) < 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ et $y \in B(x, \delta)$. Pour conclure, rappelons-nous que U est ouvert, donc qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Alors, en posant $r' = \min(r, \delta)$, on a que $B(x, r') \subset \mathcal{D}'$, ce qu'il fallait démontrer.

Soit $x \in \partial U$, montrer qu'il existe $1 \leqslant i \leqslant p$ vérifiant $h_i(x) = 0$.

3. Supposons au contraire que $h_i(x) < 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. D'après la question précédente, on a alors $x \in \mathcal{D}'$. Comme ce dernier est ouvert et contenu dans $\mathcal{D}$, il est contenu dans l'intérieur de $\mathcal{D}$. Par conséquent, il est disjoint du bord de $\mathcal{D}$. Autrement dit, $x \notin \partial\mathcal{D}$.

4. Considérons la fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -\|x\|$. Dans ce cas, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ est ouvert, donc égal à son intérieur. Toutefois,
$$\mathcal{D}' = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}^n.$$

Exercice 1.6 (Normes sur les espaces de matrices)**.** On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on définit sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la quantité suivante :
$$N_1(M) = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|.$$

1. Par définition N_1 est une fonction à valeurs positives. De plus, si $N_1(M) = 0$, alors $\|Mx\| = 0$ et donc $Mx = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ est non nul, on a alors
$$Mx = \|x\| M \frac{x}{\|x\|} = 0$$
et donc $M = 0$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout x tel que $\|x\| = 1$
$$\|(\lambda M)x\| = \|\lambda(Mx)\| = |\lambda|\|Mx\|,$$
donc $N_1(\lambda M) = |\lambda| N_1(M)$. Étant données deux matrices M et M', on a pour tout x tel que $\|x\| = 1$,
$$\|(M + M')x\| \leqslant \|Mx\| + \|M'x\| \leqslant N_1(M) + N_1(M'),$$
d'où $N_1(M + M') \leqslant N_1(M) + N_1(M')$.

2. Si $x = 0$, l'inégalité est une égalité. Sinon, ona
$$\|Mx\| = \|x\| \left\| M \frac{x}{\|x\|} \right\| \leqslant \|x\| N_1(M).$$

3. Le coefficient (i, i) de la matrice $M^t M$ est égal à
$$(M^t M)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (M^t)_{ik} M_{ki} = \sum_{i=1}^{n} M_{ik}^2.$$
Ainsi,
$$N_2(M)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{ik}^2 = \|\Phi(M)\|^2.$$

Exercice 1.7 (Formes linéaire)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

1. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique. Alors, si $x \in \mathbb{R}^n$, on peut le décomposer sur la base canonique :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$
et l'on a alors par linéarité de f
$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \end{aligned}$$

Si on pose, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $v_i = f(e_i)$ et qu'on définit un vecteur

$$v_f = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i,$$

alors on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \\ &= \langle v_f, x \rangle. \end{aligned}$$

2. Si w_f est un autre vecteur vérifiant la même propriété, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} \langle v_f - w_f, x \rangle &= \langle v_f, x \rangle - \langle w_f, x \rangle \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les propriétés du produit scalaire impliquent alors que $v_f - w_f = 0$, c'est-à-dire que $v_f = w_f$. Ainsi, le vecteur v_f est bien unique.

2 Continuité

Exercice 2.1 (Pour se faire la main)**.** Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition et dire en quels points elle est continue.

1. La fonction f_1 est définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. Sur cet ensemble, elle est continue comme composée de fonctions continues.

2. La fonction f_2 est définie sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé des droites d'équation $x + y = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Sur cet ensemble, elle est continue comme composée de fonctions continues.

3. La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est de plus continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ comme composée de fonctions continues. Pour étudier la continuité en $(0,0)$, il nous faut calculer la limite correspondante ou montrer qu'elle n'existe pas. Or, on voit que

$$f_3(x,x) = \frac{1}{2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0,$$

donc $f_3(x,y)$ ne tend pas vers 0 quand (x,y) tend vers 0, ce qui signifie que f n'est pas continue en $(0,0)$.

4. La fonction f_4 est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est de plus continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ comme composée de fonctions continues. Pour étudier la continuité en $(0,0)$, il nous faut calculer la limite correspondante ou montrer qu'elle n'existe pas. Pour cela, le plus simple est de 'passer en coordonnées polaires', c'est-à-dire d'écrire $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} f_4(x,y) &= f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \\ &= \frac{\rho^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)}{\rho^2} \\ &= \rho\cos(\theta)^2 \sin(\theta). \end{aligned}$$

Quand $(x,y) \to 0$, $\rho \to 0$ et comme $|\cos(\theta)^2 \sin(\theta)| \leqslant 1$, on a bien alors $f(x,y) \to 0$. Ainsi, f est également continue en $(0,0)$.

Exercice 2.2 (Caractérisations de la continuité ★). **1**. On procède par implications successives.

- i)⇒ii) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $x \in f^{-1}(U)$. Par définition, $f(x) \in U$, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(f(x), \epsilon) \subset U$. Alors, par définition de la continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $\|y - x\| < \delta$ implique $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$. Autrement dit, pour tout $y \in B(x, \delta)$, $f(y) \in B(f(x), \epsilon) \subset U$. Ceci signifie que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$. Ainsi, nous avons montré que pour tout point de $f^{-1}(U)$, il existe une boule ouvert centrée en ce point et contenue dans $f^{-1}(U)$, ce qui est la définition d'un ouvert.
- ii)⇔iii) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^m$. Alors, son complémentaire $\mathbb{R}^m \setminus F$ est ouvert, donc $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus F)$ est ouvert. Or,
$$f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus F) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(F),$$
donc $f^{-1}(F) = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(F))$ est fermé puisque son complémentaire est ouvert.
- iii)⇒i) Soit $x \in \mathbb{R}^m$ et $\epsilon > 0$. On pose $U = B(f(x), \epsilon)$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Alors, $f^{-1}(U)$ est ouvert, donc il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$. Autrement dit, si $\|y - x\| < \delta$, alors $y \in f^{-1}(U)$, donc $f(y) \in U = B(f(x), \epsilon)$, ce qui signifie que $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$.

2. Comme f est une application linéaire sur $\mathbb{R}^n$, elle est continue. Comme de plus le singleton $\{0\}$ est fermé, sa préimage par f est fermée. Ainsi, le noyau de f est fermé.

Exercice 2.3 (Inversion de matrices). Soit n un entier.

1. Le déterminant est un polynôme en les coordonnées, donc une application continue.

2. On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Comme $\mathbb{R}^*$ est ouvert et det continue, on conclut que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

3. On sait que pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^t,$$
où $\mathrm{Com}(A)$ désigne la comatrice de A. Or, les coefficients de la comatrices sont des déterminants extraits, donc des polynômes en les coefficients de A. Ainsi, ce sont des fonctions continue. Par produit, on conclut que $A \mapsto A^{-1}$ est une fonction continue.

4. La réciproque de cette fonction est elle-même, qui est continue, c'est donc un homéomorphisme.

Exercice 2.4 (Matrices de trace nulle). **1**. En note $(A_k)_{ij}$ le coefficient (i, j) de A_k, on a que $(A_k)_{ij} \to A_{ij}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lim_{k \to +\infty} (A_k)_{ii} \\
&= \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (A_k)_{ii} \\
&= \lim_{k \to +\infty} \mathrm{Tr}(A_k) \\
&= \lim_{k \to +\infty} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. D'après ce qui précède et la caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})_0$ est un fermé.

3. La trace est une application linéaire, donc son noyau est un fermé. Or, $\ker(\mathrm{Tr}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})_0$, d'où le résultat.

3 Compacité

Exercice 3.1 (Caractérisation de la compacité ★). Le but de cet exercice est de démontrer que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.

1. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact.

(a) On utilise la caractérisation séquentielle. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K qui converge vers un certain $x \in \mathbb{R}^n$. Par compacité, il existe une sous-suite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $\ell \in K$. Mais on a $x_{\phi(k)} \to x$, donc $x = \ell \in K$. Ainsi, K est fermé.

(b) Par compacité, il existe une sous-suite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $\ell \in K$. Mais alors, $\|x_{\phi(k)}\| \to \|\ell\|$, ce qui contredit $\|x_{\phi(k)}\| \to +\infty$. Ainsi, K est borné.

2. On considère maintenant une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ fermée et bornée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F.

(a) Parce que K est bornée, la suite $(x_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Or, c'est une suite de réels, donc par le Théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous-suite qui converge.

(b) Il suffit d'appliquer le même raisonnement qu'à la question précédente à la suite $(x_{\varphi_1(k)}(2))_{k\in\mathbb{N}}$.

(c) En procédant par récurrence, on construit des sous-suites $(x_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_m(k)}(m))_{k\in\mathbb{N}}$ pour tout $1 \leqslant m \leqslant n$ qui chacune convergent vers une limite ℓ_m. Posons maintenant $\phi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n$. Alors, pour tout $1 \leqslant m \leqslant n$, $(x_{\phi(k)}(m))_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de la sous-suite précédente, donc converge vers ℓ_m. Autrement dit, $x_{\phi(k)} \to (\ell_1, \cdots, \ell_m)$. Comme K est fermé, cette limite est dans K, ce qui conclut.

3. Un projecteur orthogonal est une application linéaire qui vérifie $P = P^*$ et $P = P^2$. En utilisant des suites, on voit facilement que cet ensemble est fermé. De plus, la norme d'un projecteur orthogonal est toujours égale à 1, donc cet ensemble est égalemetn borné. Ainsi, les projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ forment bien un compact.

4. Dans $\mathbb{R}^2$, soit P_θ la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'angle θ. L'image de $(0,1)$ par P_θ est $(-\tan(\theta)^{-1}, 0)$ donc $\|P_\theta\| \geqslant \tan(\theta)^{-1}$. Autrement dit, l'ensemble des projecteurs n'est pas borné.

Exercice 3.2 (Fonctions tendant vers l'infini ★). On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tend vers l'infini si

$$|f(x)| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Nous allons montrer qu'une fonction tendant vers l'infini admet toujours un minimum global.

1. Cela s'écrit de la façon suivante : pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $R > 0$ tel que si $\|x\| > R$, alors $f(x) > C$.

2. Il suffit d'appliquer la question précédente avec $C = f(0)$.

3. D'après la question précédente, il existe $r > 0$ tel que $f(x) \geqslant f(0)$ dès que $\|x\| > R$. Comme la boule fermée $B_f(0, R)$ est compacte et que f est continue, elle y admet un minimum (d'après le Théorème des bornes atteintes) que nous noterons m. Alors, on a $m \leqslant M$ et pour tout $x \in U$,

- Si $\|x\| \leqslant R$, alors $f(x) \geqslant m$ par définition d'un minimum ;
- Si $\|x\| > R$, alors $f(x) \geqslant m$ par définition de R.

Ainsi, m est bien un minimum global de f.

4 Optimisation à une variable

Exercice 4.1 (La formule de Wilson)**.** L'un des problèmes fondamentaux pour les services logistiques d'entreprises est celui de la gestion des commandes et des stocks. Concrètement, imaginons qu'une entreprise commande tous les T jours des matériaux dont elle utilise ensuite une quantité k chaque jour. Ceci représente un double coup : celui de l'achat des matériaux et celui de leur stockage. L'objectif est de choisir T pour minimiser le coût total.

1. Le coût de stockage au n-ième jour après la commande est $c_s k(T-n)$, donc le coût total de stockage est
$$\sum_{n=1}^{n} c_s k(T-n) = c_s k \frac{T(T-1)}{2}.$$
Le temps total de stockage étant de $T-1$ jour, on obtient un coût par unité de temps égal à
$$\frac{c_s k T}{2}.$$

2. On a
$$C(T) = \frac{c_s k T}{2} + \frac{c_\ell}{T}.$$

3. On dérive pour étudier la fonction C sur $[0;+\infty[$:
$$C'(T) = \frac{c_s}{2} - \frac{c_\ell}{T^2}.$$
Cette fonction ne s'annule qu'une fois, en
$$T_* = \sqrt{\frac{2c_\ell}{kc_s}}$$
et le tableau de variations ci-dessous indique qu'elle y atteint un minimum global.

T	0		T_*		$+\infty$
$C(T)$	$+\infty$	$\searrow$	$C(T_*)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Puisqu'on va utiliser une quantité k de matériau par jour, on doit commander
$$Q = kT_* = \sqrt{\frac{2kc_\ell}{c_s}}.$$

Exercice 4.2 (Étudier plus pour réussir plus)**.** Vous planifiez vos révisions pour deux examens E_1 et E_2. Les deux ont le même coefficient, mais vous êtes meilleur dans la matière de E_1 que dans celle de E_2. Concrètement, vous estimez qu'en fonction du temps t passé à travailler, votre note sur 100 à chacun des examens sera
$$N_1(t_1) = 20 + 20\sqrt{t_1} \quad \& \quad N_2(t_2) = -80 + 3t_2.$$
Vous disposez de 60 heures de révisions, à répartir entre le temps t_1 passé à préparer E_1 et le temps t_2 passé à préparer E_2.

1. Pour que ces expressions aient un sens, il faut qu'elles soient comprises entre 0 et 100. Pour la première, on remarque que $N_1(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$, et que $N_1(t) \leqslant 100$ si et seulement si $t \leqslant 16$. Quant à la seconde, $N_2(t)$ sera positive si et seulement si $t \geqslant 80/3$ et inférieure à 100 si et seulement si $t \leqslant 60$.

2. Comme on a $t_2 = 60 - t_1$, on peut se ramener à un problème d'optimisation à une variable : il s'agira de maximiser la fonction

$$N : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto 10 + 10\sqrt{t} - 40 + \frac{3}{2}(60 - t).$$

Pour ce faire, on dérive N, ce qui donne

$$N'(t) = \frac{5}{\sqrt{t}} - \frac{3}{2}.$$

Cette quantité s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}_+$, pour $\widetilde{t} = 100/9$. On peut donc tracer le tableau de variations.

t	0		$\frac{100}{9}$		$+\infty$
$N(t)$	60	$\nearrow$	$N_{\max}$	$\searrow$	$-\infty$

On observe ainsi que la fonction N a un maximum global sur $\mathbb{R}_+$. Les valeurs correspondantes du problème initial sont $t_1 = 100/9 \leqslant 16$ et $t_2 = 60 - 100/9 \geqslant 80/3$. Ainsi, ces valeurs font sens. Nous avons donc trouvé la moyenne maximale que nous pouvons obtenir, et qui sera

$$N(\widetilde{t}) = 60 + \frac{100}{3} - \frac{3}{2}\frac{100}{9} = 60 + \frac{50}{3} = \frac{230}{3} \approx 76,67.$$