Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 1: Révisions
Correction

Exercice 1. (Borne supérieure et inférieure).

1. Déterminer la borne supérieure et inférieure dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des parties suivantes

$$A = \left\{n^3, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad B = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad C = \mathbb{Q} \cap]1, 10[, \quad D = \left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

2. Déterminer $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1+x^2}{2+x^2}$ (on pourra commencer par esquisser le graphe de cette fonction). Même question pour la fonction $g = f - 2$.

Correction 1.

1. On a $\sup(A) = +\infty$. En effet, A consiste en l'ensemble des valeurs prises par la suite $(n^3)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui diverge vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout $M > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $M < N^3$ donc A n'est pas majoré. Comme 1 est un minorant et le minimum de A on en déduit que $\inf(A) = 1$.

   On a $\sup(B) = 1$. En effet, 1 est un majorant de B et la suite $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de B qui converge vers 1. Comme $\frac{1}{2}$ est un minorant et le minimum de B, $\inf(B) = \frac{1}{2}$.

   On a $\sup(C) = 10$. En effet, 10 est clairement un majorant de C donc $\sup(C) \leq 10$; par ailleurs, on peut remarquer que la suite $(10-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de C qui converge vers 10. De façon similaire, 1 est un minorant de C et la suite $(1 + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de C converge vers 1, donc $\inf(C) = 1$.

   Pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$ on a que $-1 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq 1$. Donc $D \subset [-1, 1]$ est un ensemble borné. On a que $\sup(D) = 1$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on veut montrer qu'il existe $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{1}{\tilde{p}} - \frac{1}{\tilde{q}} > 1 - \varepsilon.$$

   Si on pose $\tilde{p} = 1$, comme $\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} = 0$, on trouve $\tilde{q}$ tel que $\frac{1}{\tilde{q}} < \varepsilon$, ce que nous donne l'inégalité précédente. De façon similaire on prouve que $\inf(D) = -1$.

2. Une étude de fonction montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; elle vaut $\frac{1}{2}$ en 0, et ses limites monotones en $+\infty$ et $-\infty$ sont toutes deux égales à 1. On en conclut que

$$f(\mathbb{R}) = [\frac{1}{2}, 1[,$$

   et en particulier que $\|f\|_\infty = 1$. De l'étude de f on déduit que

$$g(\mathbb{R}) = \left[-\frac{3}{2}, -1\right[,$$

par conséquent

$$|g|(\mathbb{R}) = \left]1, \frac{3}{2}\right],$$

et donc $\|g\|_\infty = \frac{3}{2}$.

Exercice 2. (Borne supérieure). Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre exemple) ? Si vous répondez faux, essayez également de réparer l'énoncé pour qu'il devienne correct.

1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$;
2. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors $A \subset B \Rightarrow \inf(A) \leq \inf(B)$;
3. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$ et $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $||f||_\infty = f(x)$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et M un réel, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < M$ alors $||f||_\infty \leq M$.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et M un réel, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < M$ alors $||f||_\infty < M$.

Correction 2.

1. Vrai. Il est clair que tout majorant de B est un majorant de A. En particulier le plus petit des majorants de B est aussi un majorant de A, qui est donc par définition supérieur ou égal au $\sup A$, ce qui conclut la preuve;
2. Faux, par exemple si $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 1]$. Par contre $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$;
3. Vrai. Clairement, si A et B sont deux parties bornées de $\mathbb{R}$ alors $A + B$ est également borné. Sachant que $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$,

   $$a + b \leq \sup(A) + \sup(B), \forall\, a \in A,\, b \in B,$$

   ce qui montre que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$. En plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

   - $\exists\, \tilde{a} \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{a}$;
   - $\exists\, \tilde{b} \in B$ tel que $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{b}$.

   Ainsi,

   $$\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < \tilde{a} + \tilde{b},$$

   et donc $\sup(A) + \sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A + B$.

   En utilisant le même raisonnement pour la borne inférieure,

   $$a + b \geq \inf(A) + \inf(B), \forall\, a \in A,\, b \in B.$$

   Ainsi, $\inf(A) + \inf(B)$ est un minorant de $A + B$. En plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

   - $\exists\, \tilde{a} \in A$ tel que $\inf(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \tilde{a}$;
   - $\exists\, \tilde{b} \in B$ tel que $\sup(B) + \frac{\varepsilon}{2} > \tilde{b}$.

Ainsi,
$$\inf(A) + \inf(B) + \varepsilon > \tilde{a} + \tilde{b}$$
et donc $\inf(A) + \inf(B)$ est le plus grand des minorants.

4. Faux, par exemple si $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ tel que demontré à l'exo 1. En effet, il n'y a aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| = 1$, car pour tout x, le dénominateur est toujours strictement plus grand que le numérateur;

5. Faux, par exemple si f est la fonction constante -1 et $M = 0$, on a bien $f < 0$ mais $\|f\|_\infty = 1$. Ce qui est vrai c'est que : $(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < M) \Rightarrow ||f||_\infty \leq M$;

6. Faux, voir le point précédent.

Exercice 3. (Borne supérieure). Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tous $a \in A$ et $b \in B$, on a $a \leq b$. Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Correction 3. Montrons d'abord que A est majoré. Comme B est non-vide, fixons $b \in B$. D'après l'énoncé, pour tout $a \in A$, $a \leq b$. Donc b est un majorant de A. Donc A est majoré, et $b \geq \sup(A)$ puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A.

Montrons maintenant que B est minoré. Comme A est non-vide, fixons $a \in A$. D'après l'énoncé, pour tout $b \in B$, $b \geq a$. Donc a est un minorant de B. Donc B est minoré, et $\inf(B) \geq a$ puisque $\inf(B)$ est le plus grand des minorants de B.

Finalement, montrons que $\sup(A) \leq \inf(B)$. Nous avons montré que pour tout $b \in B$, $b \geq \sup(A)$. Donc $\sup(A)$ est un minorant de B, qui est par conséquent inférieur ou égal au plus grand des minorants de B, à savoir $\inf(B)$. En conclusion $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 4. (Définition de limite). En utilisant uniquement les définitions formelles de limite pour les suites réelles :

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n - a| < \epsilon$;
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n > A$;

montrer que :

1. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs divergeant vers $+\infty$ alors la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ a pour limite 0.

2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$.

Correction 4. 1. Soit $\epsilon > 0$ et soit $A = \frac{1}{\epsilon} > 0$. Alors, puisque $x_n \to \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ nous avons:
$$\frac{1}{\epsilon} = A < x_n \tag{1}$$
Puisque la suite (x_n) est telle que pour tout n, $x_n > 0$, ceci implique que:
$$\frac{1}{x_n} = \left|\frac{1}{x_n} - 0\right| < \epsilon \tag{2}$$
ce qui prouve le résultat, par la définition de la limite.

2. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|y_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$. En plus, comme $x_n \to 0$ nos avons que pour tout $n \geq N$
$$|x_n| < \frac{\epsilon}{M}.$$
Ainsi, pour tout $n \geq N$
$$|x_n \cdot y_n| < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon.$$

Exercice 5. (Suites réels) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels qui admet une sous-suite majorée. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Correction 5. Il suffit de montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite majorée. En effet, soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de (x_n) majorée par M. Comme d'après la définition $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (x_n) est croissante on a que
$$x_{\varphi(n)} \geq x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Ainsi $x_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme (x_n) est croissante et majorée, elle est également convergente.

Exercice 6. (Fonctions indicatrices). Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer $\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}$.
2. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.
3. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
4. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

Correction 6.

1. Notons que, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{1}_A \circ f(x) = \mathbb{1}_A(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$
Or, $f^{-1}(A) := \{x \,|\, f(x) \in A\}$ par définition. Il en suit que :
$$\mathbb{1}_A \circ f(x) = \mathbb{1}_A(f(x)) = \begin{cases} 1 & x \in f^{-1}(A) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}(x) \tag{4}$$

2. On commence par montrer l'implication ($\Rightarrow$). Supposons donc que $A \subset B$. On rappelle que pour deux fonctions sur $\mathbb{R}$, f et g, on dit que $f \leq g$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1 \leq 1 = \mathbb{1}_B(x)$;
   - Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0 \leq \mathbb{1}_B(x) \in \{0, 1\}$.

   Montrons maintenant ($\Leftarrow$) et supposons que $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. Alors, pour tout $x \in A$, nous avons:
$$1 = \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x) \tag{5}$$
   Puisque l'indicatrice est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on en conclut que $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et donc $x \in B$ d'après la définition de l'indicatrice. Donc $A \subset B$.

3. Supposons $x \in A \cap B$. En particulier, $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$. Donc $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1$, d'où on conclut $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ dans ce cas.

   Supposons maintenant $x \notin A \cap B$. Alors par contraposition, soit $x \notin A$, soit $x \notin B$. Dans le premier cas, $\mathbb{1}_A(x) = 0$, et dans le second cas $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Dans tous les cas, $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0$. Donc $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$ dans ce cas aussi, ce qui conclut.

4. Supposons $x \in A \cup B$. Si $x \in A$ et $x \notin B$ on a $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Donc, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$. Avec le même raisonnement on montre l'égalité quand $x \notin A$ et $x \in B$. Si $x \in A \cap B$, $\mathbb{1}_A(x) = 1$, $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$. Donc $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.

   Supposons $x \notin A \cup B$. Donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$, $\mathbb{1}_B(x) = 0$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et clairement $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$.

Exercice 7. (Densité). Vrai ou faux ? (On n'oubliera pas de justifier.)

1. $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ alors $f(A)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ alors $f^{-1}(A)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction 7.

1. Faux. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $|n - 1/2| \geq 1/2$. Par conséquent aucune suite d'entiers ne converge vers $1/2 \in \mathbb{Q}$.
2. Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$, on veut approcher x par une suite d'irrationnels. Si x est irrationnel la suite constante de valeur x convient. On suppose maintenant $x \in \mathbb{Q}$ alors la suite (x_n) définie par $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est une suite d'irrationnels convergeant vers x.
3. Faux. Contre exemple : la fonction constante nulle f et l'ensemble $A = \mathbb{R}$. En effet $f(A) = \{0\}$ qui n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
4. Faux. Contre exemple : la fonction constante nulle f et l'ensemble $A = \mathbb{R}^*$. En effet $f^{-1}(A) = \emptyset$ qui n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (Suites de fonctions). Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre exemple) ?

1. Une limite simple de fonctions 1-périodiques est 1-périodique.
2. Une limite simple de fonctions paires est paire.
3. Une limite simple de fonctions bornées est bornée.
4. Une limite simple de fonctions continues est continue.
5. Une limite simple de fonctions de limite nulle en $+\infty$ est de limite nulle en $+\infty$.
6. Une limite simple de fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Correction 8.

1. Vrai. Soit (f_n) une suite de fonctions 1-périodiques de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On veut montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ et $f(x+1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+1)$ par définition de convergence simple. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f_n est 1-périodique, on a $f_n(x+1) = f_n(x)$. Par conséquent $f(x+1) = f(x)$ par unicité de la limite. Ainsi f est 1-périodique.

2. Vrai. Soit (f_n) une suite de fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On veut montrer que f est paire, c'est à dire que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ et $f(-x) = \lim_{n\to\infty} f_n(-x)$ par définition de convergence simple. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f_n est paire, on a $f_n(x) = f_n(-x)$. Par conséquent $f(x) = f(-x)$. Ainsi f est paire.

3. Faux. Voir la suite (g_n) de l'exercice 11.

4. Faux. Voir la suite (h_n) de l'exercice 9.

5. Faux. Voir la suite (f_n) de l'exercice 11.

6. Faux. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{R}$, la fonction f_n est strictement croissante. Montrons que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (qui n'est pas strictement croissante). Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, il vient $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. D'où le résultat annoncé.

Exercice 9. (Convergence simple). Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n\sin(x)}{1+n}, \quad g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n}, \quad h_n(x) = \frac{1}{x^4 + nx^2 + 1}, \quad k_n(x) = e^{-nx^2}.$$

1. Rappeler la définition de la convergence simple d'une suite de fonctions.

2. Pour chacune des suites (f_n), (g_n), (h_n) et (k_n):

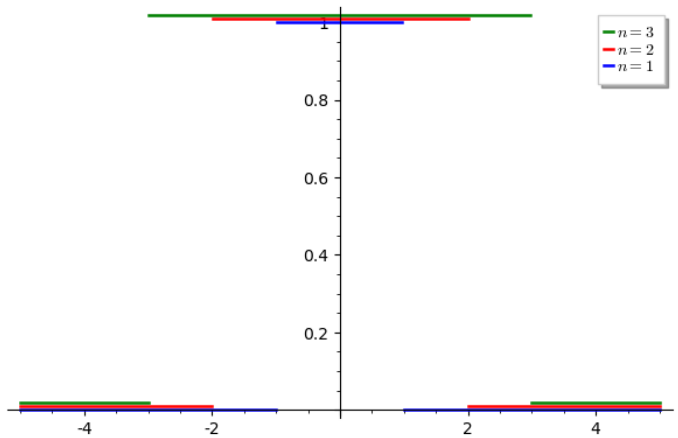
   (a) Esquisser le graphe de quelques éléments de la suite. (On ne cherchera pas à décrire précisément l'allure de chacune des fonctions mais simplement de présenter graphiquement leur comportement quand n varie.)

   (b) Montrer que ces suites de fonctions convergent simplement et déterminer leur limite simple.

Correction 9.

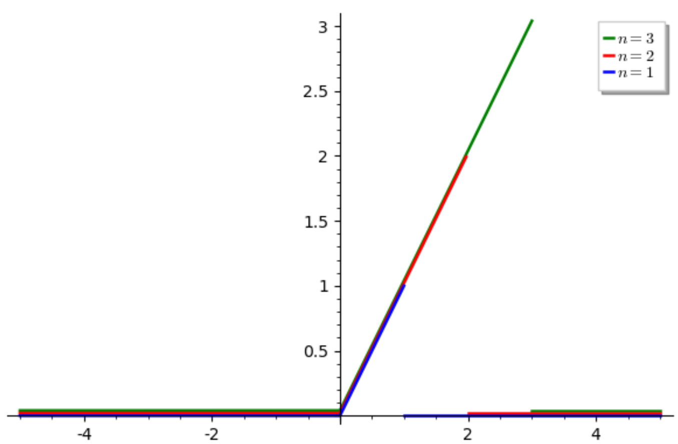
1. voir cours

2.
   - Étude de (f_n)



Montrons que (f_n) converge simplement vers la fonction sinus. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, il vient $\lim_{n\to\infty} \sin(x)\frac{n}{n+1} = \sin(x)$ et donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sin(x)$. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction sinus.

- Étude de (g_n)

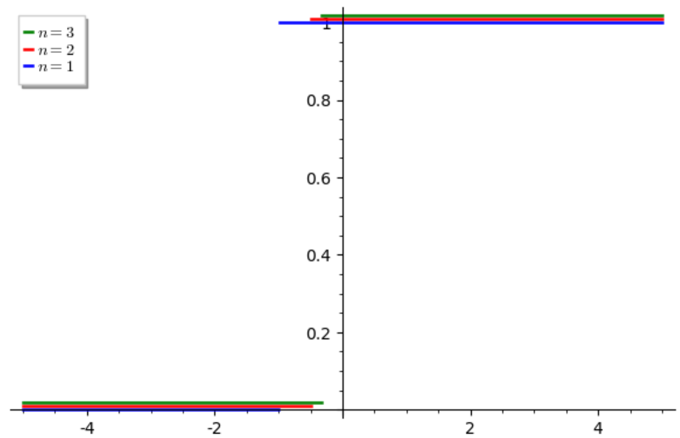


Montrons que (g_n) converge simplement vers la fonction nulle. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

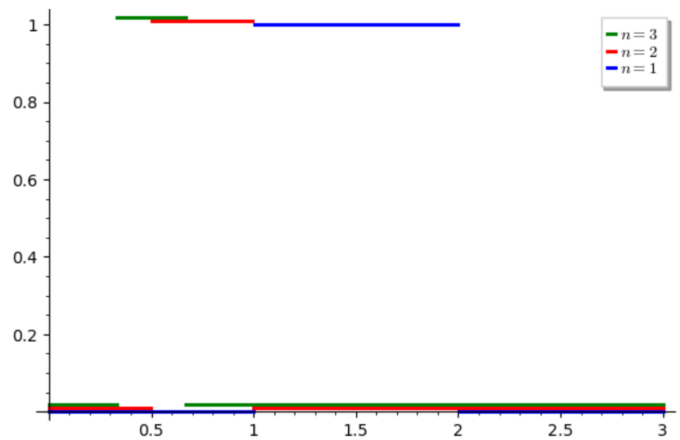
et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Donc (g_n) converge simplement vers la fonction nulle.

- Étude de (h_n).



Montrons que (h_n) converge simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{\{0\}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, on a $h_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\lim_{n\to\infty} h_n(0) = 1$. Si $x \neq 0$, comme $\lim_{n\to\infty} x^4 + nx^2 + 1 = +\infty$, il vient $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Donc (h_n) converge simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{\{0\}}$.

- Étude de (k_n).



Montrons que (k_n) converge simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{\{0\}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, on a $k_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\lim_{n\to\infty} k_n(0) = 1$. Si $x \neq 0$, comme $\lim_{n\to\infty} -nx^2 = -\infty$, il vient $\lim_{n\to\infty} \exp(-nx^2) = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = 0$. Donc (k_n) converge simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{\{0\}}$.

Exercice 10. (Convergence simple). Alice et Bob révisent ensemble leur cours sur la convergence simple des suites de fonctions. Bob dit la chose suivante:

> Étant données deux suites réelles (u_n) et (v_n) qui convergent vers u et v respectivement, telles que pour tout n, on a $u_n \leq v_n$, alors la suite de fonctions $\mathbb{1}_{[u_n,v_n]}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{[u,v]}$.

Alice doute de la véracité de ce résultat, et propose à Bob l'exemple suivant: la suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$f_n : x \mapsto \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]}(x).$$

1. Montrer que, pour tout $x \geq 1$ et pour tout $x \leq 0$, on a $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer soigneusement que, pour tout $x \in]0,1[$, on a $f_n(x) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

3. Quel est l'intervalle I pour lequel on a convergence simple $\mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]} \to \mathbb{1}_I$?

Correction 10.

1. Soit $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \notin \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ et donc $f_n(x) = 0$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

2. Soit $x \in]0,1[$. Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $0 < \frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $x \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ et donc $f_n(x) = 1$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

3. Les deux questions précédentes montrent précisément que (f_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_{]0,1[}$.

Exercice 11. (Convergence simple). Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[-n,n]}(x), \quad g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x)x, \quad h_n(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n}, +\infty[}(x) \quad k_n(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[}(x).$$

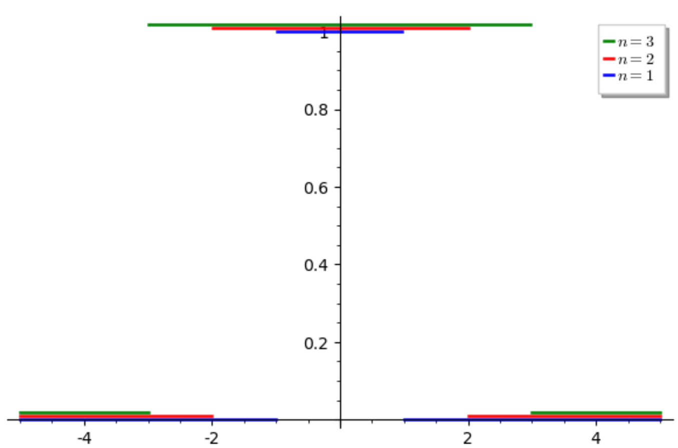
Pour chacune des suites (f_n), (g_n), (h_n) et (k_n):

1. Esquisser le graphe de quelques éléments de la suite.

2. Montrer que ces suites de fonctions convergent simplement et déterminer leur limite simple.

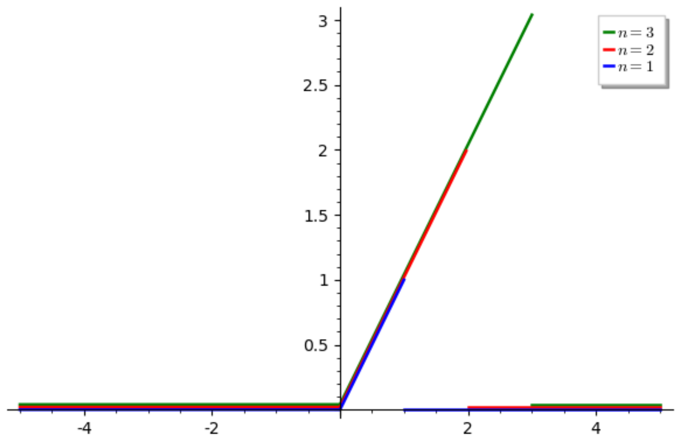
Correction 11.

- Étude de (f_n).



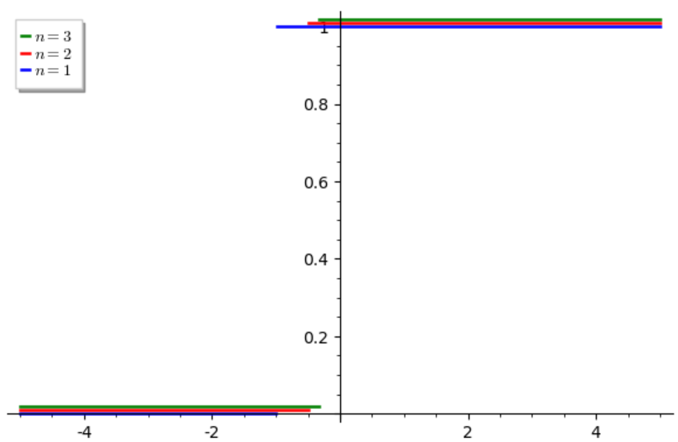
  Montrons que (f_n) converge simplement vers la fonction constante 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in [-N, N]$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $x \in [-n, n]$ et donc $f_n(x) = 1$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Par conséquent (f_n) converge simplement vers la fonction constante 1.

- Étude de (g_n).



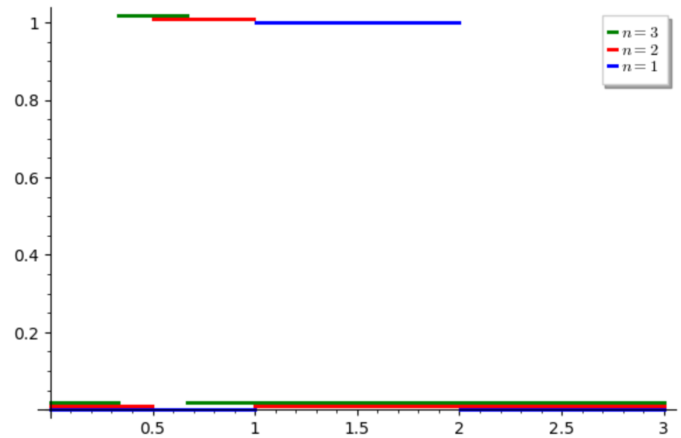
Montrons que (g_n) converge simplement vers la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $g(x) = x$ si $x \geq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \notin [0, n]$ par conséquent $g_n(x) = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Si $x \geq 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in [0, N]$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $x \in [0, n]$ et donc $g_n(x) = x$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = x$. Donc (g_n) converge simplement vers g.

- Étude de (h_n).



Montrons que (g_n) converge simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \in \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right[$ et donc $h_n(x) = 1$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Si $x < 0$, comme $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $x < -\frac{1}{n} < 0$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $x \notin \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right[$ et donc $h_n(x) = 0$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Donc (h_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.

- Étude de (k_n).



Montrons que (k_n) converge simplement vers la fonction nulle. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \notin \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ par conséquent $k_n(x) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = 0$. Si $x > 0$, comme $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < x$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $x \notin \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ et donc $k_n(x) = 0$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = 0$. Donc (k_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Exercice 12. (Convergence uniforme).

1. Rappeler la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions réelles.

2. Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n\sin(x)}{1+n}, \quad g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n]}(x)x, \quad h_n(x) = e^{-nx^2}.$$

   On a vu dans les exercices précédents que ces suites de fonctions convergeaient simplement. La convergence est-elle uniforme ?

Correction 12.

1. Voir cours.

2. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction sinus ; en examinant la preuve, on se convainc facilement que la convergence est uniforme. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - \sin(x)| = \frac{1}{n+1}|\sin(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

   On a majoré $|f_n(x) - \sin(x)|$par une quantité indépendante de x, qui tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$, ce qui permet de conclure.

   La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g, mais la convergence n'est pas uniforme; au contraire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(|g_n(x) - g(x)|) = \sup_{x>n}(|g_n(x) - g(x)|) = \sup_{x>n}(|x|) = +\infty,$$

   (la première égalité s'obtient car g et g_n coincident pour $x \leq n$) donc on n'a pas convergence uniforme.

   La suite (h_n), constituée de fonctions continues, converge simplement vers l'indicatrice de $\{0\}$, qui n'est pas continue. Ceci contredit la convergence uniforme : d'après un théorème du cours, si (h_n) convergeait uniformément, alors sa limite serait continue.

Exercice 13. (Convergence simple et convergence uniforme). Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = 0$ si $x < 0$, $f_n(x) = x^n$ lorsque $0 \leq x \leq 1$ et $f_n(x) = 1$ lorsque $x > 1$ ($n \geq 1$).

1. Esquisser les graphes de f_1, f_2 et f_3.

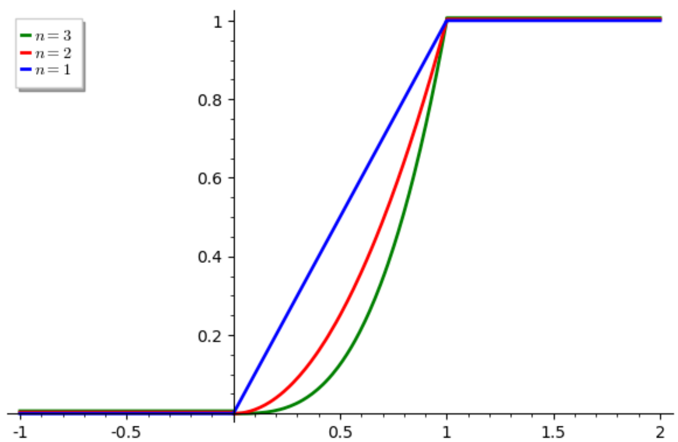
2. Les fonctions f_n sont-elles continues ?

3. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera.

4. La convergence est-elle uniforme ?

Correction 13.

1.



2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, où elle est définie par des polynômes ; en les points 0 et 1, elle admet des limites à gauche et à droite. Ces limites coincident et coincident avec $f(0)$ et $f(1)$, donc f est continue en ces points. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons en fonction des différents intervalles sur lesquels on a défini la suite.

   - Si $x < 0$ alors la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 0, donc converge vers 0.
   - Si $x \geq 1$, alors de manière similaire la suite $(f_n(x))$ converge vers 1.
   - Si $x \in [0, 1[$, alors pour tout n, on a $f_n(x) = x^n$, et en particulier $f_n(x)$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

   En conclusion, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $1_{[1,+\infty[}$.

4. Les fonctions f_n sont continues mais la suite (f_n) converge simplement vers une fonction discontinue. La limite ne peut donc pas être uniforme, comme dans l'exercice précédent.

Exercice 14. (Convergence uniforme) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

2. Montrer que $\|f_n\|_\infty = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

3. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Correction 14. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\sin(x) = 0$, donc $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f_n \to 0$ simplement. Si $\sin(x) \neq 0$, dans ce cas $|\cos(x)| < 1$ et $\cos^n(x) \to 0$ simplement. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n \to 0$ simplement.

2. Comme $|f_n|$ est une fonction paire, π-périodique et continue on a que $|f_n|$ atteint son maximum absolu dans un point $\tilde{x} \in]0, \pi/2[$. Ainsi

$$(f_n)'(\tilde{x}) = \cos^{n-1}(\tilde{x}) \left(\cos^2(\tilde{x}) - n(1-\cos^2(\tilde{x}))\right) = 0.$$

Comme $\cos^{n-1}(\tilde{x}) \neq 0$, on a

$$\cos^2(\tilde{x}) - n(1-\cos^2(\tilde{x})) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

En utilisant le même argument, on en déduit que $\sin(\tilde{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ainsi,

$$f_n(\tilde{x}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

et

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

3. Comme $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} < 1$, d'après la question précédente on en déduit que

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

quand $n \to \infty$. Donc $f_n \to 0$ uniformément.