

Notes sur la mesurabilité

Ce court poly reprend les éléments donnés en cours concernant la mesurabilité: il se substitue à la section A du chapitre 2. On ne demandera jamais de vérifier qu'une fonction est mesurable ou qu'une partie est mesurable. Ces éléments donnent néanmoins les définitions, ce qui me semble indispensable en mathématiques.

Plus loin dans le cours, on dit qu'une partie A de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, est mesurable si sa fonction indicatrice 1_A est une fonction mesurable. Les deux notions sont équivalentes et l'ordre est souvent inversé: On part d'abord des parties mesurables.

Dans \mathbb{R}^n , on connaît les parties ouvertes et appelons $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ la collection de toutes ces parties.

On appelle tribu toute collection de parties de \mathbb{R}^n vérifiant

1. stabilité par réunion dénombrable
2. stabilité par passage au complémentaire
3. l'ensemble vide et \mathbb{R}^n sont dans la collection

Les collections $\{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sont des tribus, mais elles sont peu intéressantes.

Theorem 1 (admis). *Il existe une et une seule tribu, minimale au sens de l'inclusion, qui contient $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Cette tribu s'appelle la tribu borélienne et est notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Les éléments de cette tribu sont appelées les parties mesurables (de \mathbb{R}^n).*

Exemple 1. *Toute partie ouverte est mesurable. Toute partie fermée est mesurable. En revanche, il y a des parties mesurables qui ne sont ni ouvertes, ni fermées: $[0, 1] \cup]2, 3[$ dans \mathbb{R} . N'importe quel intervalle de \mathbb{R} est une partie mesurable de \mathbb{R} . Il existe des parties non mesurables, mais elles sont difficiles à construire (voir chapitre 9).*

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$, est continue si l'image réciproque $f^{-1}(B)$ par f de tout ouvert B de \mathbb{R}^m est un ouvert de \mathbb{R}^n . On rappelle que $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in B\}$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est mesurable si l'image réciproque par f de toute partie mesurable B de \mathbb{R}^m est une partie mesurable de \mathbb{R}^n .

L'exemple typique est la fonction indicatrice d'une partie mesurable A de \mathbb{R}^n . Soit B une partie mesurable de \mathbb{R} . Si B contient 0 et 1, $1_A^{-1}(B) = \mathbb{R}^n$, si B contient 1 et pas 0, $1_A^{-1}(B) = A$, Si B contient 0 et pas 1, alors $1_A^{-1}(B) = A^c$ et si B ne contient ni 0 ni 1, $1_A^{-1}(B) = \emptyset$. Dans les 4 cas, c'est une partie mesurable de \mathbb{R}^n . Donc 1_A est une fonction mesurable. [Et si 1_A est une fonction mesurable alors A est une partie mesurable: on a que $A = 1_A^{-1}(\{1\})$.]

Le résultat suivant fait le lien entre continuité et mesurabilité.

Theorem 2. *Toute fonction continue est mesurable.*

On fait la preuve à titre indicatif pour montrer la puissance de la notion de tribu minimale.

Proof. Regardons la collection $\{B \subset \mathbb{R}^m : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. Cette collection vérifie les trois axiomes d'une tribu (cela prend quelques lignes utilisant les règles dites de Hausdorff sur les images réciproques vraies pour toutes fonctions: l'union d'images réciproques est l'image réciproque des unions et l'image réciproque d'un complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque, l'image réciproque du vide est le vide et celle de \mathbb{R}^m est \mathbb{R}^n). Comme f est continue, cette tribu contient tous les ouverts de \mathbb{R}^m , donc la tribu minimale contenant les ouverts de \mathbb{R}^m , c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Cela montre que l'image réciproque de toute partie mesurable de \mathbb{R}^m par f est une partie mesurable de \mathbb{R}^n . Donc f est mesurable. \square

Evidemment, la fonction indicatrice d'une partie mesurable non vide n'est jamais continue donc la réciproque n'est pas vraie.

L'ensemble des fonctions mesurables est un espace vectoriel. On peut aussi composer deux fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. La composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est mesurable. On verra cela plus tard.

Pour information, pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il y a un critère de mesurabilité pratique: f est mesurable ssi pour tout $\alpha > 0$ les ensembles de niveau $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$ sont des parties mesurables. Noter que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$ est l'image réciproque d'un intervalle qui est une partie mesurable particulière. En cours, on fera un dessin pour comprendre ce que cela représente.

Ce critère s'étend aux fonctions prenant éventuellement les valeurs $-\infty$ et $+\infty$ qu'on considèrera ensuite.