Acquis d'Apprentissage Visé 5

Étudier le comportement asymptotique d'une suite

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude des suites et en particulier leur *comportement asymptotique*. C'est-à-dire ce que deviennent les termes u_n d'une suite lorsque n augmente. Dans les applications, les questions associées sont par exemple : comment évolue une population sur le long terme (par exemple, une population touchée par un virus...), comment évolue la complexité d'un algorithme en fonction de la quantité de données qu'il doit traiter, comment évolue l'argent sur votre compte en banque...

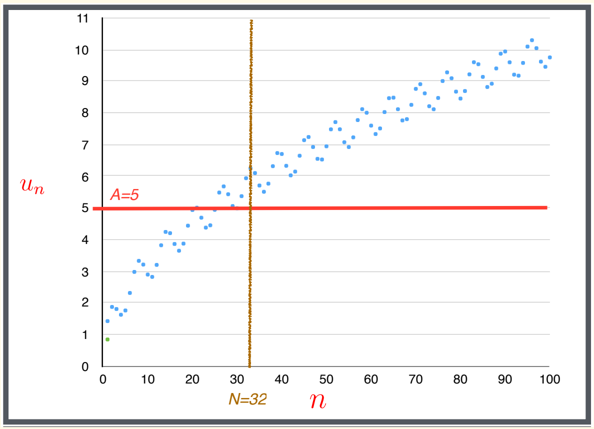
Les deux informations qui vont nous intéresser sont :

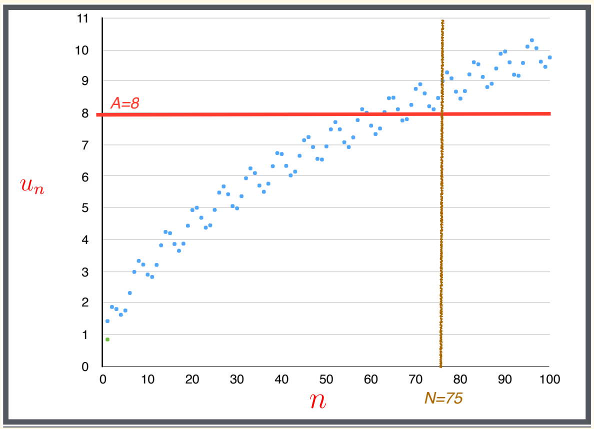
- la *limite* de la suite, qui répond à la question "de quelle valeur s'approche la suite ?"
- trouver une *suite équivalente* qui répond à la question "à quelle vitesse la suite s'approche-t-elle de sa limite ?"

1.1 Notion de limite

Définition 1: Limite infinie

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u tend vers $+\infty$ si pour tout nombre $A > 0$ on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que A





On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou bien $u_n \to +\infty$.

Remarque 1: quantificateurs

Cette définition fait naturellement apparaître plusieurs quantificateurs et peut alors s'écrire ainsi :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

Remarque 2: Suite tendant vers $-\infty$

Pour définir la notion de suite tendant vers $-\infty$, on peut :

- soit adapter la définition précédente (cf QCM Wooflash)
- définir qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exemple 1:

Démontrons, simplement en utilisant la définition, que $n+4\sin(n)\to+\infty$.

On pose un nombre $A>0$, et on cherche un rang N à partir duquel les termes de la suite dépassent A : $n+4\sin(n)\geq A$ à partir de quel n ?

On sait que $\sin(n)\geq -1$, donc $n+4\sin(n)\geq n-4$.

Ainsi, il suffit d'avoir $n-4\geq A$ pour avoir $n+4\sin(n)\geq A$.

Autrement dit, il suffit d'avoir $n\geq A+4$ pour avoir $n+4\sin(n)\geq A$. Donc à partir du rang $A+4$ (ou bien si ce n'est pas un entier, le premier entier au-dessus de $A+4$), les termes de la suite dépassent bien A.

Définition 2: Limite finie

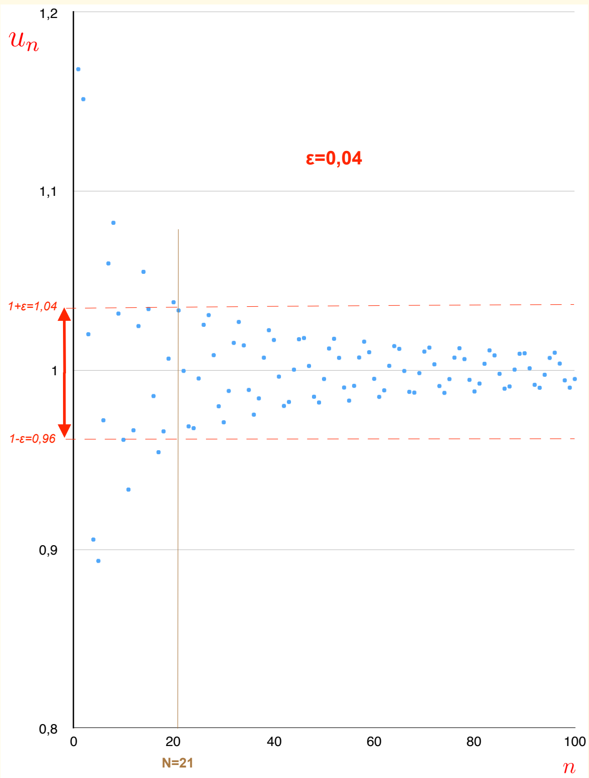
Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u tend vers un nombre $\ell\in\mathbb{R}$ (dans ce cas on dit que la suite **converge**) lorsque pour tout nombre $\varepsilon>0$, on peut trouver un rang N_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont entre $\ell-\varepsilon$ et $\ell+\varepsilon$.

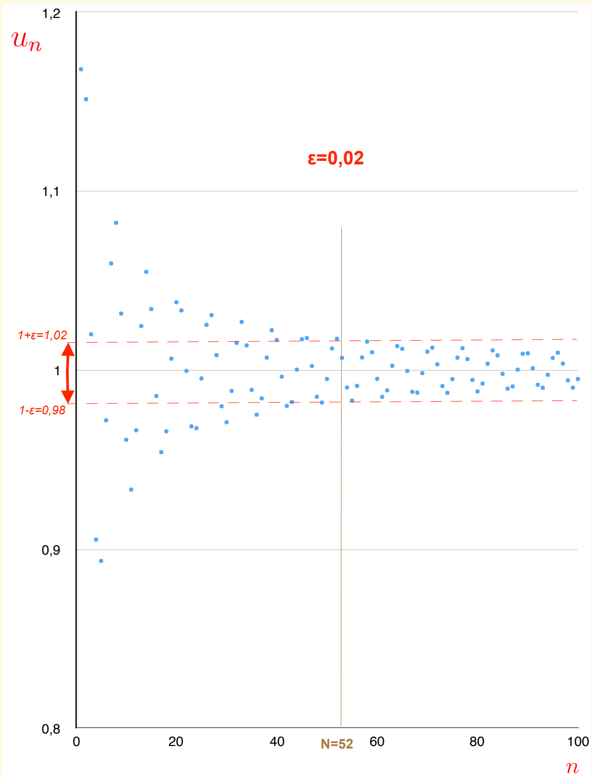
Avec des quantificateurs :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_0\in\mathbb{N},\forall n\geq N_0,|u_n-\ell|\leq\varepsilon$$

On dit parfois que les termes de la suite sont alors dans un *tube de rayon ε autour de ℓ*

Vous pouvez visualiser cette définition sur le geogebra suivant : https://www.geogebra.org/classic/czupgcfj (ou bien de manière statique sur l'image ci-dessous)





On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ ou bien $u_n\to\ell$.

Remarque 3:

Dire que $u_n \to \ell$ revient à dire que $u_n - \ell \to 0$

Exemple 2:

Démontrons, uniquement à partir de la définition, que la suite de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ a pour limite 0.

Il s'agit donc de prendre un nombre $\varepsilon > 0$, et de déterminer à partir de quel n on a $-\varepsilon \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \varepsilon$.

D'une part, puisque n est un entier positif ou nul, $\dfrac{1}{n+1}$ est positif et donc a on toujours $-\varepsilon \leq \dfrac{1}{n+1}$ (puisque $-\varepsilon$ est négatif).

D'autre part, on a $\dfrac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ lorsque $n+1 \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$ (passage à l'inverse de l'inégalité, qui change le sens de l'inégalité).

Il suffit donc d'avoir $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ pour avoir l'encadrement voulu, et donc se placer à partir d'un rang N_0 qui soit en entier plus grand que $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

1.2 Suites de référence et premiers calculs de limites

Évidemment ce serait un petit peu pénible de revenir à chaque fois à la définition pour établir la limite d'une suite. On va en général s'appuyer sur des suites de référence dont on connaît bien le comportement, ainsi que sur les opérations sur les limites. Tout cela est résumé dans les trois propositions ci-dessous.

Proposition 1: Suite de référence tendant vers $+\infty$

Les suites de termes généraux suivants tendent vers $+\infty$:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{n}^{\alpha} & \text{avec } \alpha > 0 \\ \mathbf{ln(n)}^{\alpha} & \text{avec } \alpha > 0 \\ \mathbf{e^{an}} & \text{avec } a > 0 \\ \mathbf{r^n} & \text{avec } r \in]1, +\infty[. \end{array}$$

Notez que le dernier cas est en fait un cas particulier du précédent, puisque $r^n = e^{n\ln(r)}$ et quand $r > 1$ alors $\ln(r) > 0$.

Proposition 2: Suite de référence tendant vers 0

Les suites de termes généraux suivants tendent vers 0 :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}^{\alpha}} & \text{avec } \alpha > 0 \\ \mathbf{e^{-an}} & \text{avec } a > 0 \\ \mathbf{r^n} & \text{avec } r \in]-1, 1[. \end{array}$$

Proposition 3: Opérations sur les limites

$\lim u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

$\lim u_n$	l	$l > 0$	$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$l < 0$	$l < 0$	$-\infty$	0
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim u_n v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

$\lim u_n$	l	0	0	$\pm\infty$
signe de u_n pour $n \geq N$		$+$	$-$	
$\lim(1/u_n)$	$1/l$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque 4: Formes indéterminées

Les points d'interrogations dans le tableau ci-dessus indiquent des "formes indéterminées", c'est-à-dire des cas qui nécessitent plus d'informations pour pouvoir calculer la limite.

On verra comment analyser plus finement ces cas-là grâce à la notion de *suite équivalente* dans la section suivante, mais voyons tout de même un exemple.

Exemple 3: exemple de forme indéterminée

Si pour tout entier n on a $u_n = n$ et $v_n = n$, alors $u_n - v_n \to 0$.

Si pour toute entier n on a $u_n = n$ et $v_n = n^2$, alors $u_n - v_n = \underbrace{n}_{\to+\infty} \times \underbrace{(1-n)}_{\to-\infty} \to -\infty$

Ces deux exemples sont bien des formes "$+\infty - \infty$" et ont deux conclusions différentes, on ne peut donc rien dire de manière générale.

Il est important de ne pas apprendre ces tableaux par cœur ! Il faut que l'analyse de la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suite se fasse "intuitivement" en terme d'ordre de grandeur, et comprendre que ce qui le justifie proprement ce sont ces opérations classiques.

Par exemple, en multipliant une suite tendant vers $+\infty$ et une suite tendant vers $-\infty$, on multiplie deux quantités "très grandes", mais l'une est négative donc le produit est "très grand" mais négatif (donc le produit tend vers $-\infty$).

Exemple 4:

On a les limites suivantes (trouvez les justifications !) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + e^{-n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-0,1n}}{\ln(n)} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{-n}} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{3^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\sqrt{n}\ln(n) = -\infty$$

Le théorème suivant, qui contient en fait deux résultats, va permettre deux choses :

- Calculer des limites de suites qui ne sont pas obtenues directement par opération sur les suites de référence
- Donner une définition alternative de la continuité d'une fonction

Théorème 1: Composition des limites

- **Caractérisation séquentielle de la continuité :** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) telle que $u_n \to a$,

$$f(u_n) \to f(a)$$

- **Théorème de composition des limites :** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$$

Remarque 5:

Notez bien que le deuxième point ne nécessite pas que la fonction f soit continue. Mais il s'utilise aussi souvent pour des fonctions continues dans le cas où $a = +\infty$ ou $a = -\infty$

Exemple 5:

- $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car :

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

- $\ln\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ car

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car

$$1+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \ln(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

- $e^{-n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car

$$-n^2+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

1.3 Négligeabilité, suites équivalentes

Définition 3: Suites équivalentes

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que les suites u et v sont équivalentes (ou que v est un équivalent de u) si :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Alternativement (et c'est en fait la "vraie" définition), cela signifie qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$.

On note alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

Exemple 6:

- Puisque $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$, on a $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$
- On a $1 + \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$ (prendre $v_n = 1$ dans la définition !)

Remarque 6: Équivalent d'une suite convergente

Un cas particulier qu'on a parfois tendance à oublier est l'équivalent d'une suite convergente :

si (u_n) est une suite qui converge vers ℓ avec $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$ puisque $\dfrac{u_n}{\ell} \to 1$ (d'où l'importance d'avoir $\ell \neq 0$

On pourra alors s'intéresser à calculer un équivalent de $u_n - \ell$ pour savoir à quelle vitesse la suite s'approche de ℓ.

Calcul une suite équivalente juste à partir de la définition n'est pas forcément facile, car la définition fait intervenir une suite qu'on ne connaît pas a priori ((v_n)) sauf si on nous la donne ou si on en a l'intuition.

La notion de *négligeabilité* d'une suite va permettre de calculer une suite équivalente plus directement.

Définition 4: Négligeabilité

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_n = \epsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \epsilon_n \to 0$$

Alternativement, si à partir d'un certain rang la suite (v_n) ne s'annule pas, cela revient au même de dire que

$$\frac{u_n}{v_n} \to 0$$

On note alors $u_n << v_n$ ou $u_n = o(v_n)$

Exemple 7:

Si $0 < c < d$, alors

$$c^n << d^n$$

En effet,

$$\frac{c^n}{d^n} = \left(\frac{c}{d}\right)^n \to 0 \quad \text{car } 0 < \frac{c}{d} < 1$$

Voilà ci-dessous les relations de négligeabilité entre les suites classiques tendant vers $+\infty$, à connaître absolument !

Proposition 4: Échelle de négligeabilité (croissances comparées)

Pour $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et $n \to +\infty$ on a :

$$1 << \ln(n)^\alpha << n^\beta << \gamma^n << n!$$

Remarque 7: Pour les suites qui tendent vers 0

De la proposition précédente peut aussi être déduite l'échelle de négligeabilité **pour des suites qui tendent vers 0**. Pour $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et $n \to +\infty$

$$\frac{1}{n!} << \gamma^{-n} << \frac{1}{n^\beta} << \frac{1}{\ln(n)^\alpha} << 1$$

La proposition ci-dessous explique en quoi la négligeabilité permet de calculer "facilement" des suites équivalentes.

Proposition 5:

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si $u_n << v_n$, alors pour toutes constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha u_n + \beta v_n \underset{+\infty}{\sim} \beta v_n$$

La présence des constantes n'est pas inutile. Cela permet de comprendre que le signe (positif ou négatif) ou des coefficients (constants) multiplicatifs n'ont aucune influence sur la négligeabilité. En particulier, une suite qui tend vers $+\infty$ peut très bien être négligeable devant une suite qui tend vers $-\infty$! (Les symboles "<<" et "<" n'ont donc vraiment rien à voir !)

Preuve :

Exercice de TD

Exemple 8: Équivalents de sommes de suites

On a les équivalents suivants :

- $-n^3 - 2n + 1 \underset{+\infty}{\sim} -n^3$ car
$$1 << n << n^3$$
- $e^n + \ln(n) - \frac{1}{n^2} + 3^n \underset{+\infty}{\sim} 3^n$. En effet, $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\ln(n) << e^n$ et de plus, puisque $0 < \frac{e}{3} < 1$:
$$\frac{e^n}{3^n} = \left(\frac{e}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc $e^n << 3^n$.
Finalement on a bien
$$e^n + \ln(n) - \frac{1}{n^2} + 3^n \underset{+\infty}{\sim} 3^n$$
- $e^{-n} + \frac{1}{n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -1$ car $e^{-n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$ et donc par somme de limite,
$$e^{-n} + \frac{1}{n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$$

Ainsi,
$$e^{-n} + \frac{1}{n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -1$$

La proposition suivante va nous permettre de calculer des équivalents de suites dont l'expression est un peu plus complexe (produit ou quotient de suites).

Proposition 6: Opérations sur les équivalents

On peut faire trois choses (c'est à la fois peu et beaucoup !) :

1. Multiplier des équivalents : si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$
2. Diviser des équivalents (en particulier passer à l'inverse) : si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{u'_n}{v'_n}$
3. "Passer à la puissance" des équivalents : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $u_n \sim u'_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

Preuve :

Exercice de TD

Remarque 8: Quelques erreurs classiques à éviter

- Quelle que soit la situation, une suite non nulle ne peut jamais être équivalente à 0 !
- On n'additionne/soustrait pas des équivalents ! (Regardez l'équivalent de $u_n - v_n$ lorsque $u_n = n+1$ et $v_n = n$)
- On n'applique pas une fonction à des équivalents ! (n et $n+1$ sont équivalents, mais e^n est-il un équivalent de e^{n+1} ?)

Lorsqu'on cherche un équivalent d'une suite, c'est chercher son comportement en $+\infty$ de manière encore plus précise que sa limite. C'est dire : "ça ressemble très fortement à telle suite qui est beaucoup plus simple". La proposition ci-dessous signifie qu'on peut en particulier étudier un équivalent pour déterminer une limite.

Proposition 7:

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Autrement dit, si deux suites sont équivalentes, si l'une a une limite (même infinie) alors l'autre aussi et c'est la même.

Preuve :

Exercice de TD

Bonne pratique : Utilisation des équivalents pour le calcul des limites

La proposition précédente permet alors de simplifier l'étude d'une limite grâce aux équivalents, qui pourra se faire en deux étapes :

1. Calculer un équivalent le plus simple possible de la suite à étudier
2. Déterminer la limite éventuelle de l'équivalent, qui est alors la même limite que la suite initiale.

Exemple 9:

On a :

- $n - n^2 + e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ car $e^{-n} \to 0$ et $n << n^2$ donc

$$n - n^2 + e^{-n} \underset{+\infty}{\sim} -n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

- $(1+n-n^2)(n-\ln n) \to -\infty$ car :
d'une part $1+n-n^2 \sim -n^2$ et $\ln(n) << n$ donc $n - \ln(n) \sim n$. Ainsi par produit d'équivalents :

$$(1+n-n^2)(n-\ln n) \underset{+\infty}{\sim} -n^2 \times n = -n^3$$

Or $-n^3 \to -\infty$ donc
$$(1+n-n^2)(n-\ln n) \to -\infty$$

- $\dfrac{n}{e^{-n}} \to +\infty$ car : $\dfrac{n}{e^{-n}} = ne^n$ et il n'y a pas d'équivalent plus simple. Par produit de limites on a bien le résultat voulu.
- $\dfrac{(n+1)^2 + (\ln n)^3}{2^n - n^2} \to 0$ car :
d'une part
$$(n+1)^2 + (\ln n)^3 = n^2 + 2n + 1 + (\ln n)^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$$
car par croissances comparées
$$1 << (\ln n)^3 << n << n^2$$
D'autre part par croissances comparées toujours $n^2 << 2^n$ donc
$$2^n - n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$$
Ainsi, par quotient d'équivalents :
$$\frac{(n+1)^2 + (\ln n)^3}{2^n - n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^n}$$
Or par croissances comparées $n^2 << 2^n$ donc
$$\frac{n^2}{2^n} \to 0$$
et on obtient donc ainsi la limite cherchée.
- $\dfrac{e^{-n} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\ln n}} \to 0$

1.4 Autres réflexes de calcul

Les sections précédentes permettent de régler un grand nombre de cas dans l'étude des limites et des équivalents. Notons quand même quelques exemples qui demandent un ou deux autres réflexes.

Dans l'avant dernier point de l'exemple précédent, on pourrait être tenté d'écrire $(n+1)^2 \sim n^2$ (ce qui est vrai par passage des équivalents à la puissance) puis $(n+1)^2 + (\ln n)^3 \sim n^2 + (\ln n)^3$. **Mais cet argument est faux** car on fait ici une somme d'équivalents, propriété qui est fausse en générale.

C'est pourquoi dans l'exemple on a développé le carré. Une méthode plus générale consiste aussi à effectuer des factorisation, ce qui permet en général de résoudre les problèmes où les propriétés sur les équivalents ne suffisent pas.

Exemple 10: Factorisation, premier exemple

Considérons la suite dont le terme général est $u_n = e^{n+1} - e^n$.

C'est la somme de deux suites, le premier réflexe qu'on peut avoir est de déterminer laquelle est négligeable par rapport à l'autre. Mais ici aucune n'est négligeable car $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e$, qui ne tend pas vers 0.

On ne peut pas non plus étudier la limite directement puisque c'est une forme indéterminée.

On peut alors chercher une factorisation, qui permettra dans ces cas là de lever l'indétermination :

$$u_n = \underbrace{e^n}_{\to+\infty}\underbrace{(e-1)}_{>0} \to +\infty$$

Passons à un exemple où la factorisation est moins évidente. Cherchons l'équivalent de

$$n^3 - \sqrt{1+n^2}$$

S'il est vrai que $\sqrt{1+n^2} \sim n$ par passage des équivalents à la puissance ($1+n^2 \sim n^2$ puis passage à la racine carrée), on ne peut pas en déduire que $n^3 - \sqrt{1+n^2} \sim n^3 - n \sim n^3$ car l'on ferait alors une somme de deux équivalents :

$$n^3 \sim n^3 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+n^2} \sim n$$

Il faut donc faire autrement !

Exemple 11: Factorisation, deuxième exemple

L'idée et de factoriser par le terme qui, intuitivement, nous paraît dominant. Ici n^3 :

$$n^3 - \sqrt{1+n^2} = n^3(1 + \frac{\sqrt{1+n^2}}{n^3})$$

On a alors $\sqrt{1+n^2} \sim n$ par passage des équivalents à la puissance, puis par quotient d'équivalents :

$$\frac{\sqrt{1+n^2}}{n^3} \sim \frac{n}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$$

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{1+n^2}}{n^3} \to 0$$

donc on a

$$n^3 - \sqrt{1+n^2} = n^3(1+\varepsilon_n)$$

où ε_n est une suite tendant vers 0. Ce qui est exactement la définition de

$$n^3 - \sqrt{1+n^2} \sim n^3$$

On aurait pu aussi, avoir avoir eu l'intuition que l'équivalent serait n^3, faire le quotient $\dfrac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{n^3}$ et démontrer que ce quotient tend vers 1.

Le deuxième réflexe à avoir est lorsqu'on a affaire à une différence de deux racines carrées (c'est donc facile à repérer).

Exemple 12: Multiplier par la quantité conjuguée

Considérons la suite dont le terme général est $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

C'est naturellement une forme indéterminée, et on ne peut pas trouver un équivalent plus simple avec les méthodes vues précédemment : $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ donc aucune des suites n'est négligeable devant l'autre. Pas question non plus de soustraire des équivalents !

Dans ce cas, on va *multiplier par la quantité conjuguée*, qui signifie juste qu'on va faire sauter les racines grâce à l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

On peut alors calculer la limite de la dernière expression sans soucis !

Enfin, une dernière méthode est l'utilisation de limites connues, notamment celles données par les taux d'accroissements.

Exemple 13: Calcul d'un équivalent grâce à un taux d'accroissement

On cherche à calculer l'équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

On sait, d'après la définition de la dérivée, que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1$$

Ainsi, par composition de limite,

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et donc par définition des suites équivalentes :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

▸ **Pour aller plus loin**.

1.5 Extension aux suites complexes

Contrairement aux notions de majoration, minoration et monotonie qui nécessitent des inégalités sur les termes de la limites (et donc que s'appliquent qu'à des suites dont les termes sont des nombres réels), les notions de "suite bornée" et de limite s'adapte aux suites à termes complexes grâce au module.

Définition 5: Suite bornée

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est bornée s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C$$

À l'écrit c'est la même définition que pour les suites réelles, mais il faut bien comprendre qu'ici $|\cdot|$ représente le module.

Il est de plus intéressant d'interpréter cela en terme de distance : pour deux complexes z et z', la distance entre ces deux complexes est représentée par le module

$$d(z, z') = |z - z'|$$

En particulier $|z|$ représente la distance du complexe z au complexe 0.

Et donc dire qu'une suite complexe est bornée par 1 signifie par exemple que tous ces termes sont dans le disque unité (disque centré en 0 et de rayon 1).

Définition 6: Limite d'une suite à termes complexes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note toujours $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Attention, la notion de limite infinie n'a aucun sens pour une suite complexe. Ils sont où $-\infty$ et $+\infty$ dans $\mathbb{C}$?

Remarque 9:

Il est équivalent d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ DANS $\mathbb{C}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$ DANS $\mathbb{R}$.

Exemple 14:

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$:
  $$\text{si} \quad |z| < 1 : \quad \lim_{n\to+\infty} z^n = 0$$
  En effet,
  $$|z^n - 0| = |z|^n \quad \text{par propriété du module}$$
  et comme $|z| < 1$, $|z|^n \to 0$ (suite de référence).
  Ainsi $|z^n - 0| \to 0$ et donc z^n converge donc bien vers 0.
- Posons pour tout entier $N \geq 0$,
  $$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n$$
  On a
  $$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-z}$$

Vous pouvez visualiser la convergence d'une suite complexe ici : https://www.geogebra.org/m/ZFFUwTgF

Remarque 10: Et suites d'autre chose ?

Si on analyse bien, définir les notions de suite bornée et de limites nécessitent "simplement" d'avoir une notion de distance entre les objets (distance entre les termes de la suite et 0 pour la définition de bornée, distance entre les termes de la suite et un objet fixé pour la limite).

Par exemple si on arrivait à donner une notion de distance entre deux fonctions, on pourrait définir la notion de limite de suites de fonctions...

La section suivante s'applique aux suites réelles comme aux suites complexe. Comme les réels sont aussi des complexes, les énoncés seront donnés pour des suites complexes (et s'appliquent donc aux suites réelles).

1.6 Valeurs d'adhérence

Définition 7: Suite extraite, valeur d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

- **Suite extraite :** On appelle suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante appelée parfois fonction d'extraction ou *extractrice*.
- **Valeur d'adhérence :** On appelle valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute limite FINIE d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La fonction φ n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels utilisés comme de nouveaux indices. Par exemple, si : $\varphi = (2, 4, 5, 8, 24, 59, \ldots)$, la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_2, u_4, u_5, u_8, u_{24}, u_{59}, \ldots)$.

La suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est jamais que la composée $u \circ \varphi$.

Exemple 15: Sous-suite des termes d'indices pairs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres.

La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de (u_n). C'est la suite correspond aux termes d'indices pairs de (u_n).

L'extractrice est la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\varphi(n) = 2n$.

On pourrait de même former la sous-suite des termes d'indices impairs.

L'étude des suites extraites, et notamment de leurs limites, forme une des briques de base de la topologie, qui est un vaste champ des mathématiques.

Remarque 11: Extraction d'extraction

Si on en extrait une nouvelle suite à partir d'une fonction $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, le résultat est

$$u \circ \varphi \circ \psi = \left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

et non pas $u \circ \psi \circ \varphi = \left(u_{\psi\circ\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 16:

- Les suites $\left(\sqrt{2^n + 4n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite de terme général $\sqrt{n}$, associées respectivement aux fonctions d'extraction $n \longmapsto 2^n + 4n$ et $n \longmapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite de terme général $(-1)^n$. Les réels 1 et -1 sont donc deux valeurs d'adhérence de cette suite.

Attention ! Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le terme qui vient après u_{2k} dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)} = u_{2k+2}$ et non pas u_{2k+1}. De même, le terme qui vient après u_{2k+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3}$ et non pas u_{2k+2}.

Lemme 1:

Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \geqslant n$$

Preuve :

Exercice de TD

Théorème 2: Limites de suites extraites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est sa seule valeur d'adhérence.

Ce résultat reste valable lorsque la limite est infinie pour les suites réelles.

Preuve :

Exercice de TD

Ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

Exemple 17:

- La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite car $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = 1$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = -1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car : $u_{9n^2} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que : $u_{(3n+1)^2} = \dfrac{(3n+1)^2}{9} - \left\lfloor \dfrac{3n+1}{3} \right\rfloor^2 = \left(n^2 + \dfrac{6n+1}{9}\right) - n^2 = \dfrac{6n+1}{9} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.