

## Feuille 2

**Exercice 1** : Soit  $p, q$  deux entiers premiers entre eux et soit  $E$  l'équation  $3x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$ .

1. Montrer que si  $\frac{p}{q}$  est une solution de  $E$ , alors  $p \mid 4$  et  $q \mid 3$ .
2. En déduire que  $E$  possède une unique solution rationnelle.

**Exercice 2** : Montrer que si  $n$  est un entier, le nombre  $n^5 - n$  est un multiple de 30.

**Exercice 3** : Soit  $a, b$  deux nombres rationnels tel que  $a + b$  et  $ab$  sont des entiers. On écrit  $a = \frac{p_1}{q_1}, b = \frac{p_2}{q_2}$  avec  $\text{pgcd}(p_1, q_1) = \text{pgcd}(p_2, q_2) = 1, q_1 > 0, q_2 > 0$ .

1. Montrer que  $q_1 \mid q_2$
2. En déduire que  $q_1 = q_2$
3. Prouver que  $a, b$  sont des entiers.

**Exercice 4** : Soient  $a, b$  deux entiers premiers entre eux. Déterminer le pgcd  $(a + b, a - b)$ . [ Discuter selon la parité de  $a, b$ ].

**Exercice 5** : Trouver tous les entiers  $x, y$  qui vérifient l'équation  $15x - 22y = 1$ .

**Exercice 6** : Trouver tous les entiers qui vérifient l'équation  $15x + 24y = 5$ .

**Exercice 7** : Soit  $n$  un entier qui n'est divisible ni par 2 ni par 5. Montrer qu'il existe un entier  $m$  tel que le produit  $nm$  s'écrit 111111...1. [ ind : poser  $n_i = 11111 \cdots 1, i$  chiffres et regarder le reste de la division euclidienne de  $n_i$  par  $n$  ].

**Exercice 8** : Soit  $j$  le jour de naissance d'un étudiant,  $m$  le mois de naissance [  $1 \leq j \leq 31, 1 \leq m \leq 12$  ]. On multiplie  $j$  par 31 et  $m$  par 12 et on fait la somme et on trouve 308. Quelle est la date de naissance de l'étudiant ?

**Exercice 9** :

1. Trouver le  $\text{pgcd}(1995, 2975)$ .
2. On divise 2003 par  $n$ , le reste est égal à 8, on divise 3002 par  $n$ , le reste est égal à 27. quel est ce nombre  $n$  ?

**Exercice 10** : Soit  $c$  un nombre premier tel que  $11c + 1$  soit le carré d'un nombre entier . Déterminer  $c$  .

**Exercice 11** : Trouver les entiers naturels  $a, b$  tel que :  $pgcd(a, b) = 24, ppmc(a, b) = 1344$ .

**Exercice 12** : Résoudre dans  $\mathbb{N}$

1.

$$\begin{cases} xy = 1512 \\ ppmc(x, y) = 252 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x + y = 276 \\ ppmc(x, y) = 1440 \end{cases}$$

**Exercice 13** : On dit qu'un entier  $a$  est un carré parfait si  $a = c^2$  où  $c$  est un entier .

1. Soit  $a$  un entier parfait et soit  $a = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ , sa décomposition en facteurs premiers , que vérifie les  $\alpha_i$ ?
2. Montrer que si  $a, b$  sont des entiers parfaits , leur produit  $ab$  l'est aussi .

**Exercice 14** : Soient  $a, b$  deux entiers tel que  $a^2 \mid b^2$ . Montrer que  $a \mid b$ . On donnera deux preuves différentes dont l'une utilise la décomposition en facteurs premiers .

**Exercice 15** : Montrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas un rationnel .