Chapitre 1

Approche d’un milieu fluide

1. Fluides et solides

Qu'est-ce qu'un fluide ?

1. Fluides et solides

Qu’est-ce qu’un fluide ? liquide et gaz

Quelle distance entre molécules ?

1. Fluides et solides

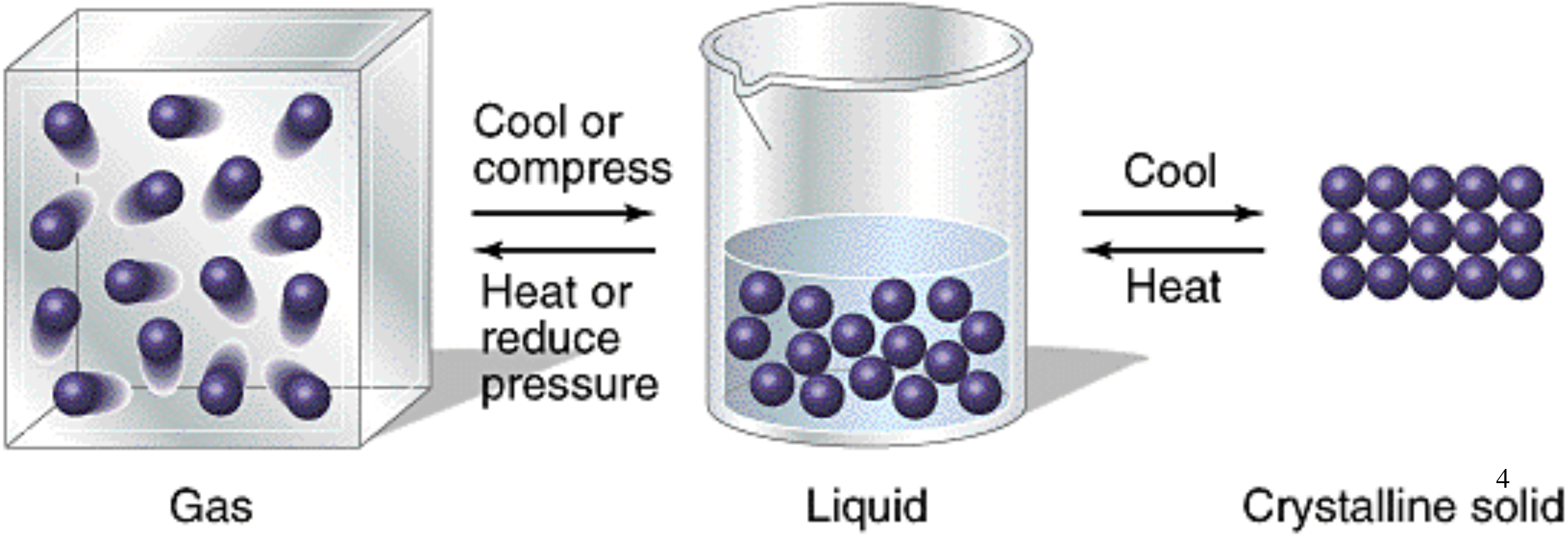
Qu'est-ce qu'un fluide ? liquide et gaz

Quelle distance entre molécules ? cf TD1

Les molécules des solides et des liquides sont très proches les unes des autres: solides et liquides sont des **phases condensées** de la matière

Les molécules des gaz sont au contraire loin les unes des autres.

Les gaz sont une phase diluée de la matière



2. Equation du mouvement pour un fluide

Quelle équation du mouvement pour un fluide ?

2. Equation du mouvement pour un fluide

Quelle équation du mouvement pour une “particule” (masse ponctuelle) ?

2. Equation du mouvement pour un fluide

Pour une masse ponctuelle, l'équation du mouvement est :

$$\frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = \sum \mathbf{f} \qquad \text{Newton (1687)}$$

Pour un fluide ?

On pourrait s'intéresser à chaque molécule du fluide :
Mais nombre de molécules ?

2. Equation du mouvement pour un fluide

Pour une masse ponctuelle, l'équation du mouvement est :

$$\frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = \sum \mathbf{F} \qquad \text{Newton (1687)}$$

Pour un fluide ?

On pourrait s'intéresser à chaque molécule du fluide :
Mais nombre de molécules ?
Pour de l'eau $\rho = 1$ g/cm^3, $M = 18$ g/mole, $N_A = 6\ 10^{23}$ molécules/moles

$$n = \frac{\rho}{M} N_A \approx 3\ 10^{22} \text{ molécules/cm}^3$$

Impossible de s'intéresser au mouvement de chaque molécule fluide
$\Rightarrow$ on s'intéresse à un petit volume fluide, appelé **"particule" fluide**.
C'est l'approche "**milieu continu**"

Equation du mouvement pour la “particule” fluide ?

L'équation du mouvement pour la "particule" fluide peut alors s'écrire

par unité de volume : $$\frac{d(\rho\mathbf{u})}{dt} = \sum \mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$$

Quelles sont les forces **extérieures** à la particule fluide (par unité de volume) ?

L'équation du mouvement pour la "particule" fluide peut alors s'écrire

par unité de volume : $$\frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} = \sum \mathbf{f}_{\text{ext}}$$

Les forces **extérieures** à la particule fluide (par unité de volume) sont les

- forces de surface :
  - contraintes normales (pression p) $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p$
  - contraintes de cisaillement (par la viscosité η) $\sigma_{xy} = \eta \dfrac{\partial u_x}{\partial y}$
- forces de volume :
  - force de gravité (g)
  - force électromagnétique (E,B)

Comment s'écrit le terme d'accélération (variation de quantité de mouvement) ?

$$\frac{d(\rho \mathbf{u})}{dt} = ?$$

L'équation du mouvement pour la "particule" fluide peut alors s'écrire

par unité de volume : $$\frac{d(\rho\mathbf{u})}{dt} = \sum \mathbf{f}_{\text{ext}}$$

Les forces **extérieures** à la particule fluide (par unité de volume) sont les

- forces de surface :
  - contraintes normales (pression p) $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p$
  - contraintes de cisaillement (par la viscosité η) $\sigma_{xy} = \eta \dfrac{\partial u_x}{\partial y}$
- forces de volume :
  - force de gravité (g)
  - force électromagnétique (E,B)

Le terme d'accélération (variation de quantité de mouvement) peut déjà s'écrire

$$\frac{d(\rho\mathbf{u})}{dt} = \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$ si le fluide peut être considéré comme incompressible (ρ=cte)

A quelle condition le fluide peut-il être considéré comme incompressible ?

Le fluide peut être considéré comme incompressible si la vitesse typique U de l'écoulement est inférieure à la vitesse du son c dans le fluide considéré.
En introduisant le nombre de Mach $M = U/c$:

$M < 1$: écoulement incompressible

$M > 1$: écoulement compressible

Vitesse du son dans les fluides ?

Le fluide peut être considéré comme incompressible si la vitesse typique U de l'écoulement est inférieure à la vitesse du son c dans le fluide considéré.
En introduisant le nombre de Mach $Ma = U/c$:

$Ma < 1$: écoulement incompressible

$Ma > 1$: écoulement compressible

Vitesse du son dans les fluides : $c = 340$ m/s dans l'air, $c = 1500$ m/s dans l'eau

On considérera toujours dans la suite des écoulements incompressibles ($Ma < 1$)

Comment s'écrit alors le terme d'accélération $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$?

Le fluide peut être considéré comme incompressible si la vitesse typique U de l'écoulement est inférieure à la vitesse du son c dans le fluide considéré.
En introduisant le nombre de Mach $Ma = U/c$:

$Ma < 1$: écoulement incompressible
$Ma > 1$: écoulement compressible

Vitesse du son dans les fluides : c = 340 m/s dans l'air, c = 1500 m/s dans l'eau

On considérera toujours dans la suite des écoulements incompressibles ($Ma < 1$)

Le terme d'accélération $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ reste difficile à écrire car

la vitesse du fluide dépend du temps mais aussi des coordonnées spatiales

$$\mathbf{u}(x,y,z,t)\begin{cases} u_x(x,y,z,t) \\ u_y(x,y,z,t) \\ u_z(x,y,z,t) \end{cases}$$

La vitesse **u** du fluide peut varier dans le temps à la fois parce qu'elle peut varier dans le temps en un point (x,y,z) mais aussi parce qu'elle dépend de l'espace (x,y,z) et que la vitesse est *advectée* par l'écoulement

Exemple de variation temporelle d'un paramètre scalaire advecté par un écoulement : la température $T(x,t)$

départ en voiture le matin de Paris en direction de Marseille

Exemple de variation temporelle d'un paramètre scalaire advecté par un écoulement : la température $T(x,t)$
départ en voiture le matin de Paris en direction de Marseille
La température extérieure enregistrée au cours du voyage varie à la fois parce qu'en un point la température varie dans le temps au cours de la journée et parce qu'on explore en voyageant des zones de températures différentes (existence de gradient de température à un instant t)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}$$ à 1D (suivant x)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)T$$ à 3D (suivant x,y,z)

qui s'écrit développé $$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_x\frac{\partial T}{\partial x} + u_y\frac{\partial T}{\partial y} + u_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

Pour un paramètre vectoriel, cela reste valable pour chacune de ses composantes scalaires. Par exemple pour la vitesse **u** :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}$$ (de manière compacte)

L’équation du mouvement pour un fluide s’écrit finalement :

$$\boxed{\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{g}}$$

terme instationnaire	terme d’advection (non linéaire)	terme gradient de pression	terme de contrainte visqueuses	terme de gravité

C’est l’équation de Navier-Stokes

Claude Louis Marie Henri Navier
(1785-1836)

Sir George Gabriel Stokes
(1819-1903)

Équation non-linéaire : multiplicité des solutions
Difficile à résoudre : un des 7 problèmes du Prix du Millénaire

Le Prix du Millénaire

7 défis mathématiques réputés insurmontables mis à prix par le Clay Mathematical Institute à la fin du 20ème siècle :

- Hypothèse de Riemann
- Conjecture de Poincaré*
- Problème ouvert P=NP
- Conjecture de Hodge
- Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer
- Équations de Navier-Stokes
- Équations de Yang-Mills

1 million de dollars pour chacun

* résolu en 2003 par Grigori Perelman, validé en 2006

Equations de Navier-Stokes

développées en coordonnées cartésiennes *(x,y,z)*

$$\rho\left\{\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\rho f_x$$

$$\rho\left\{\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\rho f_y$$

$$\rho\left\{\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\rho f_z$$

Equations de Navier-Stokes

développées en coordonnées cylindriques *(r,θ,z)*

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$