LDD1 MPSI

Outils et methodes pour la physique
Examen du 9 janvier 2024

Durée : 1h30

Dimensions et homogénéité

1. La luminosité (puissance rayonnée) d'un astre sphérique de rayon R et de température T s'écrit :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

   où σ est la constante de Stefan. Quelle est sa dimension ?

2. Dans un exercice de mécanique, on trouve que la norme de la force de Coriolis subie par une masse ponctuelle m de vitesse v et de vitesse de rotation Ω est :

$$f = 2m\Omega^2 v.$$

   Cette expression est-elle bien homogène ?

Calcul différentiel

1 Equations différentielles

On considère une masse ponctuelle m soumise à une force constante $\vec{F_0}$ et à une force de frottement visqueux $-\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse et le coefficient de frottement α est positif.

1. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique sous forme d'une équation différentielle du premier ordre pour $\vec{v}$.

2. Déterminer la solution de l'équation homogène puis une solution particulière. On gardera la notation vectorielle de bout en bout.

3. Sachant qu'à $t = 0$ la vitesse est nulle, déterminer complétement $\vec{v}(t)$ et montrer qu'il y a une vitesse limite.

2 Dérivées partielles

Pour chacune des fonctions de plusieurs variables donner les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$

1. $F(x, y, z) = x^2 + z^4$.

2. $F(x, y, z) = \exp(xyz)$.

3. $F(x, y, z) = x\exp(-y)/z$.

3 Equations aux dérivées partielles et gradient

On considère un champ de vecteur défini dans le plan:

$$\vec{E} = \exp(-y)\vec{u}_x - x\exp(-y)\vec{u}_y$$

1. Vérifier que $\vec{E}$ est bien un champ de gradient
2. Déterminer une fonction $F(x, y)$ dont dérive $\vec{E}$.

Systèmes de coordonnées.

1. Rappeler la définition des coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).
2. Calculer l'intégrale dans le plan xOy suivante, le domaine d'intégration étant le disque de centre O et de rayon R.
$$I = \int\int (x^2 + y^2)^{1/2} dxdy.$$
3. Rappeler la définition des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).
4. Une boule de rayon R de centre O est chargée avec une densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0 r^2/R^2$ (en coordonnées sphériques). Quelle est la charge totale de la boule ?
5. Calculer l'intégrale dans l'espace euclidien suivante, le domaine d'intégration étant la boule de centre O et de rayon R.
$$I = \int\int\int (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dxdydz.$$