

## Outils et méthodes pour la physique Partiel du 25 octobre 2023

Durée : 1h30

### Dimensions et homogénéité

## 1 Dimensions

1. On rappelle l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$PV = nRT.$$

Quelle est la dimension de la constante des gaz parfaits  $R$  ?

2. En mécanique des fluides le nombre de Reynolds  $Re$  est un nombre sans dimension qui permet de caractériser un écoulement (si  $Re \gg 1$  alors l'écoulement est turbulent). Il s'écrit en fonction de la masse volumique du fluide  $\rho$ , de sa vitesse caractéristique  $V$ , de la longueur caractéristique  $L$  de la conduite et de la viscosité dynamique  $\eta$  du fluide :

$$Re = \frac{\rho VL}{\eta}.$$

Quelle est la dimension de  $\eta$  ?

## 2 Equation aux dimensions

Un satellite est en orbite circulaire de rayon  $R$  autour de la planète Mars de masse  $M$ . On propose les 3 expressions suivantes pour la période  $T_0$  :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{GM}} \text{ (a)}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \text{ (b)}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{GM}{r^3}} \text{ (c)}.$$

Retrouver d'abord la dimension de la constante de la gravitation universelle  $G$  puis, grâce à la méthode de l'analyse dimensionnelle, indiquer quelle est la bonne parmi les trois propositions (a), (b) ou (c).

## 3 Homogène ou pas homogène ?

La vitesse limite  $v$  d'une sphère de rayon  $r$  et de masse volumique  $\rho$  tombant dans un milieu visqueux de coefficient de viscosité  $\eta$  et de masse volumique  $\rho_0$  est donnée par :

$$v = \frac{1}{9} \frac{(\rho - \rho_0)gr^2}{\eta\rho_0},$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Cette équation est-elle homogène ? Justifier votre réponse.

---

# Equations différentielles

## 1 ED du premier ordre

On considère un mobile de masse  $m$  lancé sur l'axe horizontal avec une vitesse initiale  $v_0$  et soumis à la force de frottement due à l'air  $f$ . Il n'y a pas d'autre force en jeu, la réaction de l'axe et le poids, forces toutes deux verticales, se compensant.

On considère d'abord une force de frottement visqueux  $f = -\alpha v$ , où  $\alpha$  est un coefficient positif. L'équation du mouvement s'écrit donc, en projection sur l'axe horizontal :

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha v = 0 \quad (1)$$

1. L'équation (1) est-elle linéaire ou non linéaire ? Justifier votre réponse.
2. Résoudre l'équation (1) et donner  $v(t)$  en fonction de  $t$ ,  $m$ ,  $\alpha$  et  $v_0$ .
3. Tracer  $v(t)$ .

On considère maintenant une force de frottement du type  $f = -\beta v^2$ , où  $\beta$  est un coefficient positif. L'équation du mouvement s'écrit désormais, en projection sur l'axe horizontal :

$$m \frac{dv}{dt} + \beta v^2 = 0 \quad (2)$$

Reprendre les 3 questions précédentes avec cette nouvelle équation différentielle (2).

## 2 EDL du premier ordre : variation de la constante

On considère l'équation différentielle suivante (variable  $x$  et fonction inconnue  $y(x)$ ) :

$$y' - y = \frac{1}{3} x^3 \exp(x). \quad (3)$$

1. Déterminer la solution de l'équation homogène associée à (3).
2. Déterminer une solution particulière de (3) par la méthode de la variation de la constante.

## 3 EDL du second ordre : circuit RLC série

On considère un circuit RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  variable. La loi des mailles donne l'équation du circuit :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0 \cos(\omega t), \quad (4)$$

où  $q$  est la charge aux bornes du condensateur.

Déterminer une solution particulière de (4) grâce à la méthode du passage en complexe.