Examen du 5 janvier 2021

A - Dimensions et homogénéité

1 - Chute libre

1 - $v = m^{\alpha} h^{\beta} g^{\gamma}$

$[v] = L.T^{-1} = M^{\alpha} L^{\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma}$

soit $\begin{cases} \alpha = 0 \\ 1 = \beta + \gamma \\ -1 = -2\gamma \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$

|| $v = k\sqrt{gh}$ $\quad$ k = constante sans dimension.

2 - La masse m n'intervient pas car dans un mouvement de chute libre, la masse inertielle étant égale à la masse gravitationnelle (principe d'équivalence), l'accélération de la particule est égale à l'accélération de la pesanteur puisqu'aucune autre force ne s'exerce sur la particule.

2 - Homogène ou pas homogène

1 - $PV = \frac{1}{3} m N \langle v^2 \rangle$

$P = \frac{F}{S}$ donc $[PV] = [F] L = MLT^{-2} L = ML^2T^{-2}$

Par ailleurs, $[\frac{1}{3} m N \langle v^2 \rangle] = ML^2T^{-2}$.

|| La relation est donc bien homogène.

2 - $PV = \frac{2}{3} m N (1 + c^2)$

|| Cette relation n'est pas homogène car 1 et c^2 n'ont pas la même dimension et ne peuvent donc être additionnés.

B – Intégrales : théorie cinétique des gaz

$$n(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2 k_B T}}$$

Cette distribution est bien normalisée : rappelons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

donc ici, avec $x = \sqrt{\frac{m}{2k_BT}}\, v_x$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(v_x)\, dv_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\left[\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}\, v_x\right] e^{-\left(\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}\, v_x\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

1 – La quantité $\frac{m v_x^2}{2k_BT}$ étant sans dimension, comme argument de la fonction exponentielle, $\left[\frac{m v_x^2}{2k_BT}\right] = 1$ donc

$$[k_BT] = [mv^2] = ML^2T^{-2} \quad \text{(énergie)}.$$

2 – $\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x\, n(v_x)\, dv_x$.

. La fonction $n(v_x)$ est paire : $n(-v_x) = n(v_x)$.

. v_x est impaire

donc l'intégrale de $v_x\, n(v_x)$ sur $]-\infty, +\infty[$ est nulle.

En effet, $\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x\, n(v_x)\, dv_x = \int_{+\infty}^{-\infty} (-v'_x)\, n(-v'_x)\, d(-v'_x)$

par changement de variable $v'_x = -v_x$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} v'_x\, n(v'_x)\, dv'_x$$

soit $\langle v_x \rangle = -\langle v_x \rangle$ et donc $\langle v_x \rangle = 0$.

On peut bien entendu calculer explicitement $\langle v_x \rangle$:

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_BT}} \, dv_x$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{-1/2} \left[e^{-\frac{m v_x^2}{2k_BT}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

3 – $$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_BT}} \, dv_x$$

$$u = v_x \qquad v' = v_x \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_BT}}$$

$$u' = 1 \qquad v = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{-1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_BT}}$$

donc $$\langle v_x^2 \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{-1/2} \underbrace{\left[v_x \, e^{-\frac{m v_x^2}{2k_BT}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\longrightarrow 0}$$

$\longrightarrow 0$ par dominance de la fonction exponentielle sur une fonction polynomiale

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{-1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_BT}} \, dv_x}_{= \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{-1/2}}$$

d'où $$\boxed{\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}}$$

4 – $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$

donc $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle$

soit $\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT}$

d'où $\boxed{U = N \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} nRT}$ avec $N = n\mathcal{N}$ et $R = \mathcal{N} k_B$.

C - Équations différentielles : chute avec frottement

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 C_x S.$$

1- $C_x = \frac{2F}{\rho v^2 S}$ donc $[C_x] = \frac{[F]}{[\rho][v^2][S]} = \frac{M L T^{-2}}{M L^{-3} L^2 T^{-2} L^2}$

$= 1$

|| C_x est donc un coefficient sans dimension.

2- $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \frac{1}{2} \rho v^2 C_x S \frac{\vec{v}}{v}$

donc || $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\rho C_x S}{2m} v \vec{v} = \vec{g}$

3- Dans le régime limite où $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, on obtient $\vec{v} \to \vec{v}_{limite}$

avec || $\vec{V}_{limite} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_x S}} \frac{\vec{g}}{g}$

$$v_{limite} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_x S}}$$

4- V_{limite} croît avec m : il faut atteindre une plus grande vitesse pour une grande masse, toute chose égale par ailleurs, avant que les effets du frottement deviennent significatifs par rapport à l'effet du poids.

- V_{limite} décroît pour ρ croissant : un milieu plus dense exerce moins de frottements.
- V_{limite} décroît pour C_x croissant : un objet moins profilé sera plus freiné
- V_{limite} décroît pour S croissant : un objet offrant une plus grande surface à l'écoulement atteindra une vitesse limite plus faible

5 – Pour une sphère :

- $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{métal}}$
- $S = 4 \pi R^2$

donc $V_{\text{limite}} = \sqrt{\frac{2R \rho_{\text{métal}}\, g}{\rho}}$ croît quand R croît.

Une grande sphère aura une vitesse limite plus élevée qu'une petite sphère.

On sait bien qu'un tir de gros calibre reste plus dangereux qu'un petit calibre à plusieurs centaines de mètres du tir !

6 – $\frac{dv}{dt} + g\frac{v^2}{v_{\text{limite}}^2} = g$

soit $\frac{d \frac{v}{v_{\text{limite}}}}{dt} + \frac{g}{V_{\text{limite}}} \left(\frac{v}{V_{\text{limite}}}\right)^2 = \frac{g}{V_{\text{limite}}}$

Posons $\tau = \frac{V_{\text{limite}}}{g} = \sqrt{\frac{2m}{\rho C_x S g}}$.

On a alors, avec $V = \frac{v}{V_{\text{limite}}}$ et $x = t/\tau$,

$$\frac{dV}{dx} + V^2 = 1$$

7 – L'équation $\frac{dV}{dx} + V^2 = 1$ est non linéaire.

Donc une solution de l'équation homogène n'est pas très intéressante, car contrairement au cas linéaire où la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète est encore une solution de l'équation complète, ce ne sera pas vrai ici.

8 - $\frac{dV}{dx} + V^2 = 1$

donc $dV + V^2 dx = dx$

$\Leftrightarrow dV = dx\,(1-V^2)$

$\Leftrightarrow \frac{dV}{1-V^2} = dx$ à variables séparables

$\Leftrightarrow \frac{dV}{2}\left[\frac{1}{1-V} + \frac{1}{1+V}\right] = dx$

Supposons que $V \leq 1$.

Alors $\frac{1}{2}\int_0^V dV'\left[\frac{1}{1-V'} + \frac{1}{1+V'}\right] = x$

où l'on a utilisé la condition initiale $t=0 \Leftrightarrow v=0$

ie $x=0 \Leftrightarrow V=0$.

On obtient donc :

$\frac{1}{2}\left[\ln(1+V) - \ln(1-V)\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{1+V}{1-V} = x$

et donc $\frac{1+V}{1-V} = e^{2x} \Leftrightarrow 1+V = e^{2x}(1-V)$

d'où finalement $V = \frac{-1+e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$$\boxed{v(t) = V_{limite}\,\frac{1-e^{-2t/\beta}}{1+e^{-2t/\beta}}}$$

qui reste bien inférieure à V_{limite}, d'où la cohérence de l'hypothèse initiale $V<1$.

On vérifie sur cette solution que $v(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} v_{limite}$.

D- fonctions à plusieurs variables, différentielles et gradients

1- Dérivées partielles

$$Q = CU$$

$$\frac{\partial Q}{\partial U} = C$$

$U = \frac{Q}{C}$ donc $\frac{\partial U}{\partial C} = -\frac{Q}{C^2}$

$C = \frac{Q}{U}$ donc $\frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{1}{U}$

donc finalement, $\frac{\partial Q}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial Q} = C\left(-\frac{Q}{C^2}\right)\frac{1}{U} = \frac{-Q}{CU} = -1$

Attention, donc, aux simplifications abusives!

2- Champ de gradient

$$\vec{E} = (x+y)\vec{u_x} + x\vec{u_y}$$

1- $\frac{\partial E_x}{\partial y} = 1$ $\qquad$ $\frac{\partial E_y}{\partial x} = 1$

C'est donc un champ de gradient (remarque : $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe).

2- On écrit $\vec{E} = \overrightarrow{grad}\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{u_y}$.

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = x + y$ donc $\Phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + f(y)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x = x + f'(y)$ donc $f(y) = cste$

finalement, on a donc $\boxed{\Phi = \frac{1}{2}x^2 + xy + cste}$