Exercices sur les équations différentielles

1 Premier ordre

Exercice 1 :

1. $y' + 2y = x^2$.

2. $y' + y = 2\sin x$.

3. $y' - y = (x+1)e^x$.

4. $y' + y = x - e^x + \cos x$.

Exercice 2 :

Déterminer toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in [0,1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)\,.$$

Exercice 3 :

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'\sin x - y\cos x + 1 = 0 \text{ sur }]0,\pi[\,.$$

Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\pi/4) = 1$.

Exercice 4 : variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante:

1. $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y = 1$ sur $]0,+\infty[$.

2. $y' - y = x^k e^x$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

3. $x(1+\ln^2 x)y' + 2\ln x\, y = 1$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5 :

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a\,.$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$.

2. $a = -1$. (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$).
Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Exercice 6 :

Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $x^2y' - y = 0$.

2. $xy' + y - 1 = 0$.

2 Second ordre

Exercice 7 :

Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

2. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

3. $y'' - 2y' + y = 0$.

4. $y'' + y = 2\cos^2 x$.

Exercice 8 :

On considère l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 4y = d(x).$$

1. Résoudre l'équation homogène.

2. Trouver une solution particulière lorsque

a. $d(x) = e^{-2x}$.

b. $d(x) = e^{2x}$.

3. Donner la forme générale des solutions quand

a. $d(x) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(2x)$,

b. $d(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}(2x)$,

où le cosinus et le sinus hyperbolique sont définis par

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$