LDD1 MPSI

Outils et methodes pour la physique
Examen du 4 janvier 2023

Durée : 1h30

Dimensions et homogénéité

On donne la constante de structure fine :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

où e est la charge éléctrique élémentaire, ϵ_0 la permivité diélectrique du vide, $\hbar$ la constante de Planck réduite et c la vitesse de la lumière. Quelle est la dimension de α ?

On rappelle que la norme de la force de Coulomb entre deux charges identiques q distantes de r s'écrit $F = q^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ et que l'énergie associée à une onde de pulsation ω est $E = \hbar\omega$. On rappelle également pour les étourdi.e.s que période et pulsation sont reliées par $T = 2\pi/\omega$.

Question bonus : donner la valeur numérique approchée de α. Indication : $\hbar c \sim 200$ MeV.fm et 1 fm $= 10^{-15}$m.

Calcul différentiel

1 Chute libre avec frottement

On considère un point matériel de masse m lancé dans le champ de pesanteur supposé uniforme $\vec{g}$. Cette particule subit deux forces, le poids $m\vec{g}$ et une force de frottement de type visqueux $-\lambda\vec{v}$ opposée à la vitesse.

1. Quelle est la dimension de λ ?
2. Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique pour la particule considérée sous la forme d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre pour le vecteur vitesse $\vec{v}$. On gardera les expressions vectorielles tout le long de l'exercice.
3. Donner une solution particulière pour $\vec{v}$ en fonction de $\vec{g}$, m et λ.
4. Déterminer la solution de l'équation homogène en faisant apparaitre un vecteur inconnu.
5. Ecrire la solution complète pour $\vec{v}$ et la déterminer complétement sachant qu'à $t = 0$, $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$.
6. Montrer que $\vec{v}$ tend vers une vitesse limite $\vec{v}_{lim}$ quand $t \to \infty$. Quelle est la relation entre cette vitesse limite et la solution particulière trouvée en (3) ?
7. Tracer $||\vec{v}||$ en fonction du temps.

2 Dérivées partielles

Pour chacune des fonctions de plusieurs variables donner les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$

1. $F(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.
2. $F(x, y, z) = \sqrt{xyz}$.
3. $F(x, y, z) = xy \exp(-z)$.

3 Equations aux dérivées partielles et gradient

On considère un champ de vecteur défini dans le plan:

$$\vec{E} = xy^2 \vec{u}_x + x^2 y \vec{u}_y$$

1. Montrer que $\vec{E}$ est bien un champ de gradient
2. Déterminer une fonction $F(x, y)$ dont dérive $\vec{E}$.

Systèmes de coordonnées.

1. Calculer l'intégrale dans le plan xOy suivante, le domaine d'intégration étant le disque de centre O et de rayon R.
$$I = \int\int (x^2 + y^2)^{5/2} dxdy.$$
2. Rappeler la définition des coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).
3. Un cyclindre de rayon R et de longueur L porte la charge volumique (en coordonnées cylindriques) $\rho(r, \theta) = \rho_0(1 - r/R) \cos\theta$. Calculer la charge totale.
4. Rappeler la définition des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).
5. Une boule de rayon R de centre O est chargée avec une densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0 r/R$ (en coordonnées sphériques). Quelle est la charge totale de la boule ?
6. Une autre boule de rayon R de centre O est chargée avec une densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0 \cos\theta$ (en coordonnées sphériques). Quelle est la charge totale de la boule ?