LDD1 MPSI

Outils et methodes pour la physique
Examen du 3 janvier 2022

Durée : 1h30

Homogène ou pas homogène ?

Parmi les expressions suivantes indiquez celles qui sont homogènes et celles qui ne le sont pas. Dans ce dernier cas expliquez quel est le souci.

1. Soit un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m suspendue à un fil de longueur L. Si θ est l'angle entre le fil et la verticale alors l'énergie potentielle de pesanteur peut s'écrire :
$$E_p = mg(1 - \cos\theta)$$
2. On considère un gaz enfermé dans une enceinte dont la paroi supérieure de surface S est mobile (piston). On pose une masse M sur le piston. La pression p du gaz devient :
$$p = p_a + \frac{Mg}{S}.$$
où p_a est la pression atmosphérique.
3. Un noyau radioactif de masse M se désintègre en un noyau fils de masse M'. L'énergie libérée est
$$E = (M - M')c^2$$
où c est la vitesse de la lumière.
4. Une particule ultrarelativiste de masse m a une vitesse v très proche de celle de la lumière c. Sa quantité de mouvement est
$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} m \frac{v}{c}$$
5. La période des oscillations d'une barre de longueur $2L$ et de masse m dans un cerceau de rayon R et de masse M est
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{6MR^2 + (m - 4M)L^2}{3(2M + m)g\sqrt{R^2 - L^2}}}.$$

Calcul différentiel

1 Electrons libres dans un conducteur. Modèle microscopique de la conduction électrique

On considère un électron libre dans un matériau conducteur tel que le cuivre. Cet électron est mis en mouvement grâce à un champ électrique supposé constant et uniforme $\vec{E}$ (champ résultant de la différence de potentiel imposée par un générateur de tension). L'électron subit deux forces, la force de Coulomb $-e\vec{E}$, où e est la charge élémentaire, et une force de frottement de type visqueux $-\lambda\vec{v}$ opposée à la vitesse. Cette dernière englobe l'effet du réseau métallique et de ses défauts et des autres électrons.

1. Quelle est la dimension de λ ? Quelle est la dimension du champ E ?
2. Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique pour l'électron (de masse m) sous la forme d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre pour le vecteur vitesse $\vec{v}$. On gardera les expressions vectorielles tout le long de l'exercice.
3. Donner une solution particulière pour $\vec{v}$ en fonction de $\vec{E}$, e et λ.
4. Déterminer la solution de l'équation homogène en faisant apparaitre un vecteur inconnu.
5. Ecrire la solution complète pour $\vec{v}$ et la déterminer complétement sachant qu'à $t = 0$, $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$.
6. Montrer que $\vec{v}$ tend vers une vitesse limite $\vec{v}_{lim}$ quand $t \to \infty$. Quelle est la relation entre cette vitesse limite et la solution particulière trouvée en (3) ?
7. On appelle vecteur densité de courant électrique le vecteur $\vec{j} = nq\vec{v}$ où n et la densité des porteurs de charges (nombre de porteur de charges par unité de volume), q leur charge (ici $q = -e$) et $\vec{v}$ leur vitesse (limite). Ecrire $\vec{j}$ en fonction de n, e, λ et $\vec{E}$
8. La conductivité électrique γ d'un conducteur ohmique est définie par $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. Déduire de ce qui précède l'expression de γ en fonction de n, e et λ. Donner la dimension de γ.

2 Dérivées partielles

Pour chacune des fonctions de plusieurs variables donner les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z}$

1. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
2. $F(x, y, z) = xyz$.
3. $F(x, y, z) = x/yz + y/xz + z/xy$.

3 Equations aux dérivées partielles et gradient

On considère un champ de vecteur défini dans le plan :

$$\vec{E} = y\vec{u}_x + x\vec{u}_y$$

1. Montrer que $\vec{E}$ est bien un champ de gradient
2. Déterminer une fonction $F(x, y)$ dont dérive $\vec{E}$.

Systèmes de coordonnées.

1. Calculer l'intégrale dans le plan xOy suivante, le domaine d'intégration étant le disque de centre O et de rayon R.
$$I = \int\int (x^2 + y^2)^{3/2} dxdy.$$
Indication : ne surtout pas calculer en cartésiennes !
2. Un cylindre de hauteur H et de rayon R est chargé en surface avec une densité surfacique $\sigma = \sigma_0 \sin\theta$ (en coordonnées cylindriques). Quelle est la charge totale du cylindre ?
3. Un planétoïde parfaitement sphérique de rayon R a une masse volumique (en coordonées sphériques) $\rho = \rho_0(1 - r^2/2R^2)$. Calculer la masse de ce planétoïde.