LDD1 MPSI

Outils et methodes pour la physique
Examen du 5 janvier 2021

Durée : 1h30

Barème approximatif : A/6, B/8, C/10, D/6.

(A) Dimensions et homogénéité

1 Chute libre

On considère une particule de masse m en chute libre depuis une hauteur h dans le champ de pesanteur terrestre g.

1. A l'aide de l'analyse dimensionnelle, déterminer la forme de la relation entre la vitesse v de la particule et les trois paramètres ci-dessus.
2. Pouvez-vous expliquer pourquoi m n'apparait pas en fait dans cette relation ?

2 Homogène ou pas homogène ?

Parmi les expressions suivantes indiquez celles qui sont homogènes et celles qui ne le sont pas. Dans ce dernier cas expliquez quel est le souci.

1. La pression P d'un gaz constitué de N particules identiques de masse m et de vitesse quadratique moyenne au carré $\langle v^2 \rangle$ situés dans une enceinte de volume V est donnée par
$$PV = \frac{1}{3} mN \langle v^2 \rangle \,.$$
2. Si le gaz est de plus relativiste (vitesses des particules proches de la vitesse de la lumière c), cette relation devient :
$$PV = \frac{2}{3} mN \big(1 + c^2\big) \,.$$

(B) Intégrales : théorie cinétique des gaz

On considère un gaz parfait constitué de particules identiques de masse m à l'équilibre à la température T. La loi de distribution des vitesses des particules est celle dite de Maxwell avec la densité de probabilité pour la composante v_x :

$$\pi(v_x) = \Big(\frac{m}{2\pi k_B T}\Big)^{1/2} \exp\Big(-\frac{m v_x^2}{2 k_B T}\Big) \tag{1}$$

où k_B dénote la constante de Boltzmann. On a évidemment 2 expressions analogues pour les autres composantes de la vitesse v_y et v_z. Cette densité est bien normalisée, à savoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(v_x) dv_x = 1 \,.$$

La valeur moyenne d'une fonction de v_x, $f(v_x)$ s'écrit donc :

$$< f >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) \pi(v_x) dv_x \,.$$

1. Quelle est la dimension de la quantité $k_B T$?

2. Montrer que $\langle v_x \rangle = 0$, soit par le calcul soit par des considérations de symétrie.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties judicieuse que $\langle v_x^2 \rangle = k_B T/m$.
4. En déduire l'énergie cinétique moyenne d'une particule $E_c = \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2$ et retrouver l'expression de l'énergie interne d'un gaz parfait.

(C) Equations différentielles : chute avec frottement

Dans le cas réaliste du mouvement d'un projectile de vitesse $\vec{v}$ (de norme v) dans un fluide en régime turbulent, la force de frottement, opposée au mouvement, a pour norme

$$F = \frac{1}{2}\rho v^2 C_x S \tag{2}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, S est la surface effective du projectile transverse à la direction du mouvement, et C_x un coefficient qui dépend de la forme du projectile et du niveau de turbulence de l'écoulement.

1. Quelle est la dimension du coefficient C_x?
2. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique satisfaire par le projectile en mouvement dans l'air, soumis à la pesanteur, et en déduire l'équation différentielle satisfaite par $\vec{v}$.
3. Montrer, sans résoudre l'équation différentielle obtenue, qu'une vitesse limite $\vec{v}_{\text{limite}}$ peut être atteinte, et donner son expression.
4. Discuter le comportement de cette vitesse limite en fonction des différents paramètres du problème.
5. Supposons que le projectile est une sphère pleine homogène en métal. Cette vitesse limite est-elle plus élevée pour une petite sphère ou pour une grande sphère?

   On s'intéresse à présent au mouvement d'un projectile tombant *verticalement* dans l'air.
6. Montrer que l'équation différentielle satisfaite par $V = \dfrac{v}{v_{\text{limite}}}$ s'écrit
$$\frac{dV}{dx} + V^2 = 1 \tag{3}$$
   où $x = t/\tau$, τ étant un temps caractéristique que l'on précisera.
7. Cette équation est-elle linéaire? Discuter alors de l'intérêt éventuel de résoudre l'équation homogène associée.
8. Intégrer cette équation différentielle en utilisant le fait qu'elle est à variables séparables. On supposera que le projectile est lâché avec une vitesse nulle à $t = 0$.

(D) Fonctions à plusieurs variables, différentielles et gradients

1 Dérivées partielles

La charge d'une condensateur de capacité C est donnée par la formule $Q = CU$ où U est la différence de potentiel qui règne entre ses bornes. Montrer que

$$\frac{\partial Q}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial Q} = -1.$$

2 Champ de gradient

On donne le champ du plan xOy : $\vec{E} = (x+y)\vec{u}_x + x\vec{u}_y$.

1. Est-ce un champ de gradient ?
2. Si oui déterminer un champ scalaire $\Phi(x,y)$ tel que $\vec{E} = \overrightarrow{grad}\,\Phi$.