LDD1 MPSI

Outils et methodes pour la physique
Partiel du 26 octobre 2022

Durée : 1h30

Dimensions et homogénéité

1 Dimensions

1. L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe à la vitesse angulaire ω s'écrit :
$$E = \frac{1}{2} J\omega^2,$$
où J est son moment d'inertie. Quelle est la dimension de J ?

2. Une masse ponctuelle est soumise à la force :
$$\vec{f} = a\vec{g} - k\vec{r},$$
où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur et $\vec{r}$ le vecteur position. Déterminer les dimensions des paramètres a et k.

3. Montrer qu'une pression est homogène à une énergie par unité de volume.

4. La pente de la courbe d'équilibre d'un système diphasé (par exemple liquide/vapeur) dans le diagramme (P, T) est donnée par la formule de Clapeyron :
$$\frac{dP}{dT} = T^a L^b (\Delta v)^c,$$
où L est la chaleur massique de changement d'état (énergie par unité de masse) et Δv est la différence des volumes massiques des deux phases. Déterminer a, b et c et écrire la formule de Clapeyron explicite.

2 Homogène ou pas homogène ?

Parmi les expressions suivantes indiquez celles qui sont homogènes et celles qui ne le sont pas. Dans ce dernier cas expliquez quel est le souci.

1. La quantité de mouvement d'une masse ponctuelle m animée d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R est $p = mR\dot{\theta}$.

2. Dans un exercice de mécanique on trouve que l'énergie cinétique au cours du temps s'écrit $E = mgL\cos(t)$ où m est la masse du système, g l'accélération de la pesanteur et L une certaine longueur.

3. Dans un problème de pendule double faisant appel à deux masses m_1 et m_2 suspendues à deux fils de longueurs L_1 et L_2, on trouve que la période vaut :
$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_1 L_1 + m_2 L_2}{(m_1 + m_2)g}},$$
g étant l'accélération de la pesanteur.

4. Un gaz de capacité calorifique C initialement à la température T_0 est chauffé par effet Joule à l'aide d'une résistance R alimentée par une générateur de tension constante E. Au bout d'un temps t, sa température devient :
$$T(t) = \sqrt{T_0^2 + \frac{2E^2 T_0}{CR} t}.$$

Equations différentielles

1 EDL du premier ordre

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre (variable x, fonction $y(x)$):

$$y' + xy = x \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (1).
2. Déterminer une solution de l'équation (1) par la méthode de la variation de la constante.
3. On donne la condition "initiale" : $y(x = 0) = 0$. Déterminer complétement cette solution.

2 EDL du second ordre : l'oscillateur harmonique idéal

On considère une masse ponctuelle m suspendue à un ressort de raideur k. L'opérateur excite périodiquement cette masse (avec une pulsation ω) de sorte que l'équation du mouvement s'écrive :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = a_0 \cos(\omega t). \tag{2}$$

1. Quelle est la dimension de a_0 ?
2. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (2). On pourra poser $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
3. Déterminer une solution particulière de (2) en la recherchant sous forme d'une combinaison linéaire de cos et sin.
4. Retrouver cette solution particulière par la méthode du passage en complexe.
5. Déterminer complétement la solution grâce aux conditions initiales : $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$.