LDD1 MPSI

Outils et methodes pour la physique
Partiel du 25 octobre 2021

Durée : 1h30

Dimensions et homogénéité

1 Ondes gravitationnelles

L'amplitude h des ondes gravitationnelles émises par un système de deux trous noirs de mêmes masses m orbitant l'un autour de l'autre à la période T, séparés de la distance a est :

$$h = \frac{8\pi^2 G m a^2}{r c^4 T^2} \tag{1}$$

où r est la distance du système par rapport à l'observateur, G la constante de Newton et c la vitesse de la lumière.

1. Quelle est la dimension d'une force ?
2. De l'expression de la force de gravitation entre deux masses m_1 et m_2 distantes de d, $f = Gm_1m_2/d^2$, déduire la dimension de la constante de Newton G.
3. Déduire finalement la dimension de l'amplitude d'onde gravitationnelle h d'après l'expression (1). *Ne soyez pas surpris par le résultat !*

2 Autour du magnétisme

1. La force de Lorentz subie par une particule de charge électrique q, de vitesse v et plongée dans un champ magnétique B a pour valeur maximale $f = qvB$. Donner la dimension de B.
2. L'énergie potentielle d'un dipôle magnétique $\vec{\mu}$ plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est $E_p = -\vec{\mu}.\vec{B}$. Quelle est la dimension de μ ?
3. L'ordre de grandeur du champ magnétique créé à grande distance r par un dipôle $\vec{\mu}$ est :

   $$B \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{r^3}.$$

   En déduire la dimension de la permittivité magnétique du vide μ_0.

3 Homogène ou pas homogène ?

Parmi les expressions suivantes indiquez celles qui sont homogènes et celles qui ne le sont pas. Dans ce dernier cas expliquez quel est le souci.

1. Lors d'une décroissance radioactive, le nombre de noyaux à l'instant t est relié au nombre de noyaux initial par $N(t) = N_0 \exp(-t)$.
2. Lors d'une chute libre d'une masse ponctuelle dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ son vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = -gt$.

3. La puissance émise sous forme de rayonnement électromagnétique par une particule de charge q, de masse m et subissant l'accélération a est donnée par la formule de Larmor :

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi m c^2}.$$

Equations différentielles

1 Circuit RL série

Soit un circuit constitué d'une résistance R et d'une inductance L et alimenté par un générateur de tension E (constante ou sinusoidale). La mise en équation (loi des mailles) conduit à l'équation différentielle linéaire du 1er ordre suivante :

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E \tag{2}$$

où I est l'intensité du courant dans le circuit.

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (2).
2. On considère d'abord le cas où E est constante (régime continu). Donner une solution particulière de (2). On donne la condition initiale $I(t = 0) = 0$. Déterminer complétement $I(t)$ et montrer que $I(t)$ tend vers une valeur limite.
3. On considère maintenant le cas où $E = E_0 \cos(\omega t)$ (régime alternatif) où ω est la pulsation délivrée par le générateur. Déterminer une solution particulière de (2) pour ce second membre (on pourra chercher cette solution sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin).
4. Retrouver cette solution particulière directement par la méthode du passage en complexe.
5. Retrouver la également par la méthode de la variation de la constante. Indication : chercher une primitive de $\cos(\alpha t)\exp(\beta t)$ sous la forme $[a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t)]\exp(\beta t)$.
6. Question subsidiaire : comparer les 3 méthodes utilisées pour déterminer une solution particulière de l'équation (2) dans le cas du second membre sinusoidal.

2 Circuit LC série en régime alternatif

Soit un circuit constitué d'un condensateur de capacité C et d'une inductance L et alimenté par un générateur de tension sinusoidale $E = E_0 \cos(\omega t)$. La mise en équation (loi des mailles) conduit à l'équation différentielle linéaire du 2nd ordre suivante :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = E_0 \cos(\omega t) \tag{3}$$

où q est la charge portée par l'une des armatures du condensateur.

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation (3). On pourra poser $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
2. Déterminer une solution particulière de (3) par la méthode du passage en complexe.