LDD1 MPSI

Outils et méthodes pour la physique
partiel du 3 novembre 2020

Durée : 1h30

Dimensions et homogénéité

1 Troisième loi de Kepler

1. En vous aidant par exemple du principe fondamental de la dynamique, donnez la dimension d'une force.

2. On rappelle que la force de gravitation entre deux masses m_1 et m_2 situées à la distance d l'une de l'autre s'écrit

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

où G est la constante de Newton. Quelle est la dimension de G ?

3. La troisième loi de Kepler doit relier a priori les paramètres orbitaux d'une planète, le rayon R de l'orbite et la période orbitale T, la masse du soleil (source de la force de gravitation) $M_\odot$ et la constante de Newton G. A l'aide de l'analyse dimensionnelle déterminer la forme de la relation entre ces 4 quantités.

2 Vitesse de la lumière dans le vide

1. Rappeler la relation entre charge q circulant dans un circuit électrique et l'intensité i du courant. En déduire la dimension de q.

2. On rappelle la force de Coulomb entre 2 charges q_1 et q_2 situées à la distance d l'une de l'autre :

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

où ϵ_0 est la constante diélectrique du vide. Déterminer la dimension de ϵ_0.

3. La force de Laplace qu'exerce un champ magnétique $\vec{B}$ sur un élément de longueur $d\vec{l}$ d'un circuit électrique parcouru par un courant i est :

$$d\vec{f} = id\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

En déduire la dimension d'un champ magnétique.

4. Le champ magnétique créé à la distance r d'un fil rectiligne infiniment long parcouru par un courant i a pour amplitude :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r},$$

où μ_0 est la permabilité magnétique du vide. Déterminer la dimension de μ_0.

5. A partir de l'analyse dimensionnelle, montrer qu'on peut construire une constante fondamentale ayant la dimension d'une vitesse à partir exclusivement de ϵ_0 et μ_0.

6. Application numérique. On donne $\epsilon_0 \simeq 1/(36\pi 10^9)$ (SI) et $\mu_0 \simeq 4\pi 10^{-7}$ (SI). Donner une valeur numérique de cette vitesse. NB : on ne donne pas explicitement les unités SI de ϵ_0 et μ_0 pour ne pas donner les solutions aux questions précédentes !

3 Homogène ou pas homogène ?

Parmi les expressions suivantes indiquez celles qui sont homogènes et celles qui ne le sont pas. Dans ce dernier cas expliquez quel est le souci.

1. L'énergie d'une particule relativiste de masse m et de vitesse v est

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2}}$$

   où c est la vitesse de la lumière.

2. L'amplitude du champ électrique à la distance r d'un fil rectiligne parallèle à l'axe Oz portant la densité linéique de charges λ ($\lambda = dq/dz$) est donnée par :

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

3. Le potentiel électrostatique correspondant est :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r).$$

4. La force que subit une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ quand elle est plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ (force de Lorentz) est :

$$F = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

$\boxed{\text{Equations différentielles}}$

1 Filiation radioactive

Un radionucléide se désintègre avec une probabilité λ par unité de temps. L'équation différentielle qui régit le nombre de noyau N est donc donnée par

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N\,. \tag{1}$$

1. Quelle est la dimension de λ?

2. Résoudre l'équation différentielle (1). On introduira un temps caractéristique dans l'écriture de la solution.

   Le nucléide Y est soumis à deux processus :

   - D'une part, il se désintègre vers le nucléide Z avec une probabilité λ_Y par unité de temps.

   - D'autre part, il est produit par le nucléide X avec une probabilité λ_X par unité de temps.

3. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par N_X, le nombre de noyaux X.

4. Justifier le fait que le nombre N_Y de noyaux Y vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dN_Y}{dt} = -\lambda_Y N_Y + \lambda_X N_X\,. \tag{2}$$

5. Déterminer une solution particulière de l'équation (2).

6. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (2).

7. On suppose $N_Y(t = 0) = N_Y(0)$ connu. Ecrire $N_Y(t)$.

8. Discuter le comportement à t grand de la solution générale en fonction des valeurs relatives de λ_X et λ_Y, et discuter les conditions pour que $N_Y(t)/N_X(t)$ possède une limite finie à grand t.

2 Equation différentielle linéaire du second ordre

Soit $x(t)$ définie pour tout t réel obéissant à l'équation linéaire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos(2t). \tag{3}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (3). On écrira la solution générale sous forme d'une superposition de fonctions cos et sin.
2. Rechercher une solution particulière sous la forme $a\cos(2t) + b\sin(2t)$.
3. Retrouver cette solution particulière en utilisant la méthode du passage en complexe.
4. Ecrire finalement la solution générale de (3).