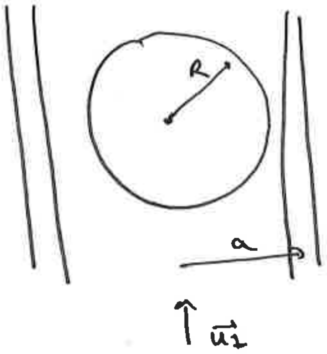
TD n° 7 Supraconducteurs



Boule supra de centre O, rayon R placée dans un solenoïde long de $\phi : 2a$ / $a > R$ de n spires/m et parcouru par un courant stationnaire I
axe : $\vec{u_z}$

et $B_\infty = \mu_0 n I$

Boule expulse $\vec{B}_{solenoïde}$ / crée $\vec{J}$ en surface

On admet dans un supra $\vec{J} = \sigma E$ est remplacée par la relation phénoménologique de London

$$\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \delta^2} \vec{A} \quad / \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

δ paramètre du matériau

En régime stationnaire :

① $\vec{A}$ doit satisfaire $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ alors le caractère non arbitraire de la loi de London l'unicité de $\vec{A}$ justifié alors le caractère non arbitraire de la loi de London ... dans un supra. En déduire l'éq. aux dérivées partielles dont est solution $\vec{B}$ et la dimension de δ.

Ecrire Eq. magnétostatique dans un supra.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$? pour cela $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0$

avec $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

on a $\mu_0 \vec{\nabla} \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \vec{E}) = 0$

$$\vec{\nabla} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho) = 0$$

en régime stationnaire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{j} = 0$

on a donc $\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \delta^2} \vec{A}$ si $\vec{\nabla} \vec{j} = 0 = \frac{-1}{\mu_0 \delta^2} \vec{\nabla} \vec{A}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla} \vec{A} = 0}$ $\Rightarrow$ unicité de $\vec{A}$. $\Rightarrow$ non arbitraire

Éq. magnétostatique

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\cdot\vec{J} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0.$$

Éq. solution de $\vec{B}$:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})}_{\shortparallel} = \mu_0\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{J}$$

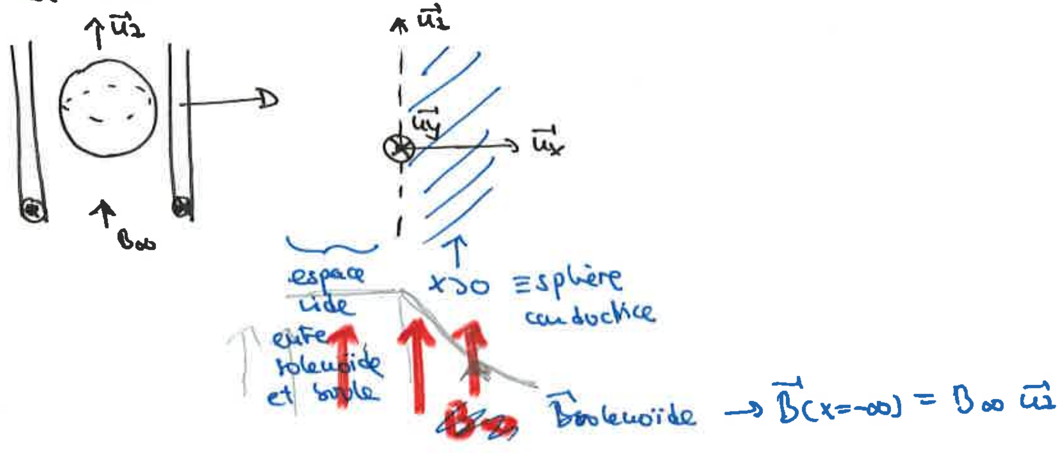
$$\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{=0} - \Delta\vec{B} = \mu_0\cdot\left(-\frac{1}{\mu_0\delta^2}\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$$

$$\boxed{\Delta\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\delta^2}}$$

sachant $\Delta : \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{u_x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{u_z}$

on déduit $\frac{\partial^2}{\partial x^2}B_i \,..\, \frac{B_i}{\delta^2} \Rightarrow$ $\boxed{\delta \rightarrow \text{unité de longueur.}}$

2. Au lieu d'utiliser coord. sphériques, on remplace le problème par:

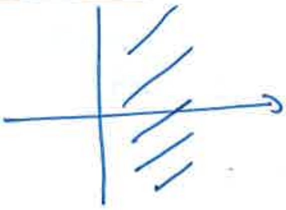


a) Montrer B uniforme dans le vide

$\vec{B}$ dans le supra en fonction de B_∞, x, δ

Tracer $\vec{B}(x)$ et interpréter δ.

Dans le vide :



- $x<0 \Rightarrow \vec{J}=\vec{0} \Rightarrow \vec{A}=\vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{B}=\vec{0}$
- invariance par translation en $y,z \Rightarrow B=B(x)$

$\vec{B}=(B_x(x), B_y(x), B_z(x))$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}=0 \\ \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial y^2}=0 \\ \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}=0 \end{array} \right.$$

on a donc $B_i = a_i x + b_i$ avec $i=x,y,z$.

$$\vec{B}=\left(a_x.x+b_x,\ a_y.x+b_y,\ a_z.x+b_z\right)$$

Conditions aux limites $\vec{B}(x\to-\infty) = B_\infty \vec{u_z} = \mu_0 n.I\, \vec{u_z}$

$\Rightarrow$ il n'a pas de $\vec{B}$ selon $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$

$$\vec{B}=(0,0,B_z(x))$$

$\Rightarrow B_\infty = B(-\infty) = cte = a_z.x+b_z \Rightarrow$ $a_z=0$, $b_z = B_\infty = \mu_0 n I$

$\Rightarrow \vec{B}_{x<0}=(0,0,B_\infty)$ et $B_\infty = cte \Rightarrow$ $\underline{\vec{B}_{x<0} \text{ est uniforme}}$

Dans le supra :

- $x>0$; ~~$\vec{J}=\vec{0}$; $\vec{A}=\vec{0}$ et $\Delta\vec{B}=\vec{0}$~~ $\vec{J}$: London $\Rightarrow \Delta\vec{B}=\dfrac{\vec{B}}{\delta^2}$
- invariance par translation en y,z.

$$\vec{B}=\vec{B}(x)=(B_x(x), B_y(x), B_z(x))$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}=\dfrac{B_x}{\delta^2} \\ \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}=\dfrac{B_y}{\delta^2} \\ \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}=\dfrac{B_z}{\delta^2} \end{array} \right\}$$

solutions de la forme :

$$B_i = a_i e^{(x/\delta)} + b_i e^{(-x/\delta)}$$

avec $i=x,y,z$.

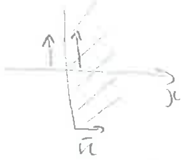
Conditions aux limites à imposer :

i) B ne diverge pas $\Rightarrow$ $a_i = 0$ car si $x \to \infty$ $\Rightarrow$ B doit rester fini

ii) condition d'interface

$B_{normal}|_{x<0^-} = B_{normal}|_{x>0^+}$

$\mu_0 n I \vec{u_z}$ $\quad$ $B_x(x=0^+) = \cancel{a_x + b_x} = 0$ $\quad a_x e^{x/\delta} + b_x e^{-x/\delta}$ $\quad \to (a_x = 0)$ précédente condition, $b_x = 0$



$(\vec{B_2} - \vec{B_1}) \times \vec{n_{12}} = \vec{J_S}$

$B_y(x=0^+) = b_y \cdot \cancel{e} = 0$ $\quad \to b_y = 0$

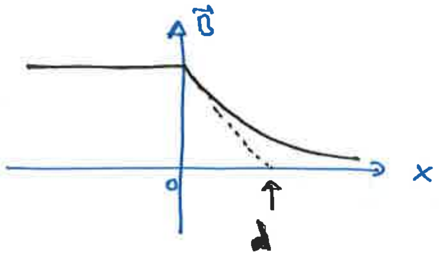
$B_z(x=0^+) = b_z \cdot \cancel{e}$ $\quad \to b_z = \mu_0 \cdot n \cdot I$

$B_{normal} = \vec{B} \cdot \vec{u_x}$ en $x = 0$

$\Rightarrow B_x|_{0^-} = 0 = B_x|_{0^+} \Rightarrow b_x = 0$

$$\Rightarrow \vec{B}(x>0) = (0, 0, \mu_0 n I e^{-x/\delta})$$

Graphe :



↑ tangente à l'origine

$\frac{dB}{dx} = \delta \cdot x$

épaisseur de peau

$\delta \to$ représente l'épaisseur au delà de laquelle le champ magnétique s'annule

B pénètre dans le supra de qql δ. $\equiv$ Effet Meissner

b) $\vec{J}$ en fonction de $B_\infty, x, \mu_0, \delta$

Tracer $j(x)$.

On sait $x < 0 \to \vec{J} = 0$

$x > 0 \to \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$

$\vec{B} = (0, 0, B_\infty e^{-x/\delta})$

$$\Rightarrow \vec{J}(x>0) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left(0, -\frac{\partial B_z(x)}{\partial x}, 0\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \cdot B_\infty \cdot e^{-x/\delta} \left(-\frac{1}{\delta}\right) \vec{u_y} = \frac{B_\infty}{\mu_0 \cdot \delta} \cdot e^{-x/\delta} \vec{u_y}$$

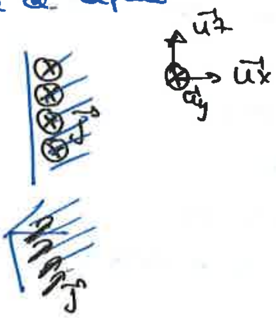
c) Colonne  dydz subit une force $\frac{d\vec{F}}{dydz} = B^2(x=0)/2\mu_0 \ \vec{u_x}$

la force de Laplace

$d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}$ ou bien $d\vec{F} = I\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

intégrale de volume

$dF \rightarrow dV = dx\,dy\,dz$



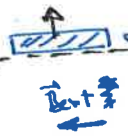
$$\frac{d^3F}{dydz} = \vec{J} \wedge \vec{B} \cdot dx$$

$$\frac{d^2F}{dydz} = \int_0^{\infty} \vec{J} \wedge \vec{B} \cdot dx = \int_0^{\infty} \frac{B_{0}}{\mu_0 \cdot \delta} e^{-x/\delta} \vec{u_y} \wedge B_0 e^{-x/\delta} \vec{u_z} \, dx$$

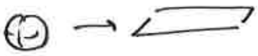
$$= \frac{(B_0)^2}{\mu_0 \cdot \delta} \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x/\delta} dx \ \vec{u_x} = \frac{(B_0)^2}{\mu_0 \cdot \delta} \cdot \left(\frac{\delta}{-2}\right) \cdot \left[e^{-2x/\delta}\right]_0^{\infty} \vec{u_x}$$

$$= \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \left[e^{-\infty} - e^{0}\right] \vec{u_x} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \vec{u_x} = \frac{B^2(x=0^-)}{2\mu_0} \vec{u_x}$$

$d^2F/dydz > 0 \Rightarrow$ la supra est deplacé ver $x \rightarrow +$.

où  tourné de 90° $x=0^-$  disque

disque se souleve par rapport au plan $x=0$
Ex: table à repose.
"effet de butation".

d) Fixé $\delta \simeq 0{,}1\,\mu m$.
commenter 
si $\delta \to 0 \Rightarrow \vec{B}$ discontinue et il faut faire intervenir $\vec{K}$ (ou $\vec{J_s}$).
Determiner $\vec{K}$ (ou $\vec{J_s}$) et verifier $\vec{J_s} = \int_0^{\infty} \vec{J}(x)\,dx$

$$\frac{d\vec{F}}{dydz} = \frac{1}{2} \vec{J_s} \wedge \vec{B}(x=0)$$

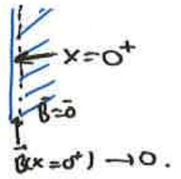
si $\delta \sim 0{,}1\,\mu m$ et $\delta << R$ sphère on peut considérer 

car seulement les premières couches du supra ont une influence de $\vec{B}_{ext}$.

si $\delta << R$ → la "symétrie sphérique" n'est plus effective → "plan"

si $\delta << 1$ ou $\delta \to 0$ ⇒ $\vec{B}_{int}$ supra est nul très rapidement ; voir

on peut dire que $\vec{B}(x=0^+) \to \vec{0}$



Pour déterminer $\vec{J}_s$ on va analyser la discontinuité de B_T

$\underbrace{\vec{n}_{1\to 2}}_{2} \wedge (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \cdot \vec{J}_s$ ici : $\vec{n}_{1\to 2} = \vec{u}_x$

$\vec{B}_1 = \vec{B}(x=0^-) = \mu_0 \cdot n I \cdot \vec{u}_z$

$\vec{B}_2 = \vec{B}(x=0^+)$ "dans le SC"

on a dit que B_{int} supra $=0$.

$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_2$

$\uparrow\ \uparrow$

$u_z\ \ 0\ \ \vec{J}_s \wedge (-\vec{u}_x)$

$+\vec{u}_y$

$(-\vec{u}_x) \times (B_0 \vec{u}_z - 0) = \mu_0 \cdot \vec{J}_s$

$\Rightarrow \vec{J}_s = \dfrac{B_0}{\mu_0} \cdot (+\vec{u}_y)$ ⇒ $\vec{B}$ est discontinue ; ∃ $\vec{J}_s \neq 0$.

- $\vec{J}_s = \int_0^\infty \vec{J}(x) \cdot dx \underset{\substack{\uparrow \\ x>0}}{=} + \dfrac{B_0}{\mu_0 \delta} \int_0^\infty \dfrac{e^{-x/\delta}}{\cancel{\delta}}\, dx\, \vec{u}_y$

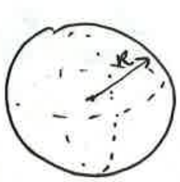
$= \dfrac{B_0}{\mu_0} \cdot \left[e^{-x/\delta} \right]_0^\infty \vec{u}_y = + \dfrac{B_0}{\mu_0} \cdot \vec{u}_y$

- $\dfrac{d^2\vec{F}}{dy\,dz} = \dfrac{B^2(x=0^-)}{2\mu_0} \vec{u}_x \overset{?}{=} \dfrac{\vec{J}_s \wedge B}{2}$

peut se réécrire ou

$\dfrac{1}{2}\ \dfrac{+B_0}{\mu_0} \vec{u}_y \wedge B_0 \vec{u}_z$

3. Sphère de rayon R avec $\delta = 0$. $\Rightarrow$ Nouvelle situation !!



intérieur boule

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}_{int} &= \vec{0} \\ \vec{J} &= \vec{0} \\ \vec{A} &= \vec{0} \end{aligned}}$$

- condition continuité de B à la surface $\vec{B}\cdot\vec{n} = 0$
- $\exists \vec{J}_S$ / B_T discontinue
- Boule $\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{1}{2}\vec{J}_S \wedge \vec{B}$ / $\vec{B}$ champs dans le vide à la surface

Questions :

a) Éq. locales dont $\vec{B}$ est solution dans le vide

Pb. de méca fluide analogue ?

Tracer allure de $\vec{B}$

Indiquer $\|\vec{B}\| > B_\infty$ [région de l'espace].

$<$

Boule: $\vec{B} = \vec{0}$, $\vec{J} = 0$, $\vec{A} = 0$

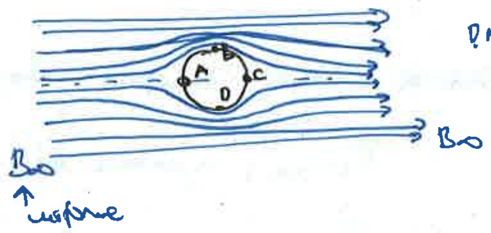
vide : $\vec{J} = \vec{0}$

$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{J} = \vec{0}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$+ \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \Delta\vec{B} = \vec{0}$

$\equiv$ lignes de champ équivalent aux lignes du champ de vitesse d'un fluide incompressible s'écoulant sur la boule



! Note $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow$ la particule ne tourne sur elle-même $\Rightarrow$ pas d'influence sur la trajectoire des lignes de champ.

Si nous regardons l'image

lignes $\nearrow$ dans les pôles (B, D) $\Rightarrow$ $\nearrow \vec{B}$ par rapport B_∞.

$\searrow$ dans l'équateur (A, C) $\searrow \vec{B}$

par fait

b) ϕ_{mag} / $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_{mag}$

De quelle équation "L" est solution ϕ_{mag} ? On cherche une solution de "L" de la forme $\phi_{mag} = \alpha\cdot r\cos\theta + \beta\cdot\cos\theta/r^2$

Justifier sans calcul par des analogies électrostatiques que ces potentiels sont solutions de "L".

Déterminer α, β en fonction de B_∞ et R.

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\text{grad}}\,\phi_{mag} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{\nabla}\cdot(\text{grad}\,\phi_{mag}) = \boxed{\Delta\phi_{mag} = 0} \quad \text{Eq. de Laplace.}$$

Rappel: Boule uniformément polarisée $\Rightarrow \Delta\phi = 0$ et $\phi \propto a\cdot r\cdot\cos\theta + b\cdot\cos\theta/r^2$

Déterminer α, β de ϕ_{mag}

• On sait $\vec{B} = \vec{grad}\,\phi_{mag} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u_\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{u_\varphi} \right) \cdot \phi_{mag}$

$$\phi_{mag} = \alpha r \cos\theta + \beta \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \left(\alpha \cos\theta - 2\beta \frac{\cos\theta}{r^3} \right) \vec{u_r} + \frac{1}{r} \left(\alpha r (-\sin\theta) + \frac{\beta}{r^2} \cdot (-\sin\theta) \right) \vec{u_\theta} + 0\, \vec{u_\varphi}$$

$$= \left(\alpha - \frac{2\beta}{r^3} \right) \cos\theta\, \vec{u_r} - \left(\alpha + \frac{\beta}{r^3} \right) \sin\theta\, \vec{u_\theta}$$

• B_{normal} est continue et $\vec{B_{int}} = \vec{0}$.

$$\vec{u_r} \cdot \left(\vec{B}_{ext}(r=R) - \vec{B}_{int}(r=R) \right) = 0$$

$$\left(\alpha - \frac{2\beta}{R^3} \right) \cos\theta = 0 \quad \begin{cases} \to \cos\theta = 0 \\ \to \alpha = \frac{2\beta}{R^3} \end{cases}$$

∘ Loin de la boule $B_{uniforme} = B_\infty$

$$\vec{B}(r \to \infty) = \mu_0 \cdot n \cdot I\, \vec{u_z}$$

$$\vec{B}(r \to \infty) = \alpha \cos\theta\, \vec{u_r} - \alpha \sin\theta\, \vec{u_\theta} = B_\infty \vec{u_z}$$

$\vec{u_z}$ en sphérique

$\vec{u_r} = \sin\theta \cos\varphi\, \vec{u_x} + \sin\theta \cdot \sin\varphi\, \vec{u_y} + \cos\theta\, \vec{u_z}$

$\vec{u_\theta} = \cos\theta \cos\varphi\, \vec{u_x} + \cos\theta \sin\varphi\, \vec{u_y} - \sin\theta\, \vec{u_z}$

$\vec{u_\varphi} = -\sin\varphi\, \vec{u_x} + \cos\varphi\, \vec{u_y}$

$$= \alpha \left(\cos\theta\, \vec{u_r} - \sin\theta\, \vec{u_\theta} \right) = \alpha \cdot \big(\underbrace{\cos^2\theta - (-\sin^2\theta)}_{1} \big) \vec{u_z} = \alpha\, \vec{u_z} = B_\infty \vec{u_z}$$

$$\alpha = B_\infty = \frac{2\beta}{R^3} \quad ; \quad \boxed{\begin{array}{l} \beta = \frac{R^3}{2} B_\infty \\ \alpha = B_\infty \end{array}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = B_\infty \left(1 - \frac{R^3}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{r^3} \right) \cos\theta\, \vec{u_r} - B_\infty \left(1 + \frac{R^3}{2} \frac{1}{r^3} \right) \sin\theta\, \vec{u_\theta}$$

$$= B_\infty \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) \cos\theta\, \vec{u_r} - B_\infty \left(1 + \frac{R^3}{2 r^3} \right) \sin\theta \cdot \vec{u_\theta}$$

c) Déduire $\vec{J_s}$

Soit $\vec{B_s}$ le champ magnétique créé par $\vec{J_s}$ au centre O de la boule

Donner sans calcul la direction de $\vec{B_s}$

une portion sphère de $dS = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$ $\equiv$ spire circulaire parcourue par dI

Montrer que $dI = j_s R d\theta$; puis calculer $\vec{B_s}$ et commenter le mécanisme de l'effet Meissner.

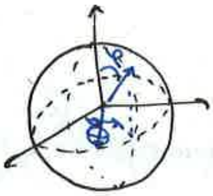
J_s se déduit de la discontinuité de B transversal

$$\vec{u_r} \wedge \left(\vec{B_{ext}}(r=R) - \underset{0}{\vec{B_{in}}(r=R)} \right) = \mu_0 \cdot \vec{J_s}$$

$(\ )\vec{u_r} + (-)\vec{u_\theta}$

$$-u_\varphi \cdot \left(B_\infty \left(1 + \frac{R^3}{2R^3}\right)\right) \sin\theta = \mu_0 \cdot \vec{J_s}$$

$$\boxed{\vec{J_s} = \frac{-B_\infty}{\mu_0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{3/2} \sin\theta\, \vec{u_\varphi}} = -\frac{3}{2\mu_0} B_\infty \sin\theta\, \vec{u_\varphi}$$



$\rightarrow$ plan :

courant surfacique $\vec{J_s}$ tournent autour de la sphère et son proportionnelles au $\sin\theta$

$\Rightarrow \vec{J_s}$ $\rightarrow 0$ aux pôles ; $\rightarrow$ maximum à l'équateur.

- selon règle main droite $\Rightarrow \vec{B_s} \parallel \vec{u_z}$
- on sait tout plan ~~…~~ contenant $\vec{u_z}$ est un plan de l'antisymétrie et donc $\vec{B} \parallel \vec{u_z}$.

- $dI = j_s \cdot \underset{d\ell}{R d\theta}$ on sait ~~…~~ $\vec{J_s} = I / \text{Surface}$

sphère

Formée par anneaux $\equiv$ spires de rayon $R\sin\theta$ ayant un courant $dI = dS \cdot \vec{J}$ et $dS = 2\pi(R\sin\theta) \cdot \underset{d\ell}{R d\theta}$

$$\vec{B}_{spire} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2R} \sin^3\theta \, \vec{u_z}$$

dans la sphère

$$d\vec{B}_{spire} = \frac{\mu_0 \cdot dI}{2R_{spire}} \sin^3\theta \, . \quad ; \quad R_{spire} = R\sin\theta$$
$$dI = j_s R \, d\theta$$

$$d\vec{B}_{surface} = \frac{\mu_0 \cdot j_s \, R \, d\theta}{2 \; R\sin\theta} \sin^3\theta \, \vec{u_z}$$

$$= \frac{\mu_0}{2} j_s \sin^2\theta \, d\theta \, \vec{u_z} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left(-\frac{3}{2\mu_0} B_\infty \sin\theta \, d\theta\right)\vec{u_z} = -\frac{3}{4} B_\infty \sin^3\theta \, d\theta \, \vec{u_z}$$

$$\vec{B}_{surface} = -\frac{3}{4} B_\infty \cdot \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \, \vec{u_z}$$

si $x = \cos\theta$
$dx = -\sin\theta \, d\theta$
$x : [1, -1]$

$$= \frac{3}{4} B_\infty \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)(-\sin\theta)d\theta \, \vec{u_z} = -\frac{3}{4} \cdot B_\infty \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx \, \vec{u_z} =$$

$$= -\frac{3}{4} B_\infty \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-1}^{1} \vec{u_z} = -B_\infty \vec{u_z}$$

On note $\vec{B}_{surface} = \vec{B}_{solénoïde}$

en effet le supra (diamagnétique parfait) développe des $\vec{J_s}$ en surface qui s'opposent au $\vec{B}_{ext}$ s'annulant à l'intérieur du supra

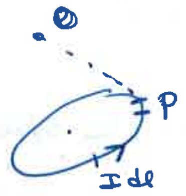
d) Calculer $d\vec{M}$ (le moment magnétique de la spire élémentaire)

. En déduire $\vec{M}$ total de la boule SC, mettre $\vec{M}$ sous la forme $\vec{M} = \frac{\chi}{\mu_0} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \vec{B}_\infty$

et déterminer χ.

Le milieu est-il paramagnétique ou diamagnétique ?

on sait $\vec{m} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} \vec{OP} \wedge I\vec{dl} = \int_S I \cdot dS$



dans le cas d'une spire quelconque de la boule

$$\left.\begin{aligned} dI|_{r_{spire}} &= J_s \cdot R\,d\theta \\ r_{spire} &= R \cdot \sin\theta \\ S_{spire} &= \pi (R\sin\theta)^2 \end{aligned}\right\} \quad d\vec{M} = dI \cdot S_{spire} = J_s \cdot R\,d\theta \cdot \pi (R\sin\theta)^2$$

et $\vec{J_s} = -\frac{3}{2\mu_0} \cdot B_\infty \cdot \sin\theta \, \vec{u_\varphi}$

pour la boule

$$\vec{M} = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{-3\pi \cdot R^3}{2\mu_0} B_\infty \sin^3\theta \, d\theta \, \vec{u_z} = -\frac{3\pi}{2\mu_0} R^3 \cdot B_\infty \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta}_{4/3} \, \vec{u_z} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{3 B_\infty}{2\mu_0} \vec{u_z}$$

on sait $\vec{M} = \int_V \chi_{mag} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{densité volumique}}}{d\vec{H}} = \chi_{mag} \cdot \vec{H}$

ici $dV \to V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\vec{B} = B_\infty \vec{u_z} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ } "en densité volumiques"

par comparaison :

$$\vec{M} = -\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{B_\infty}{\mu_0}\right)\vec{u_z}$$

on a donc $\chi_{mag} = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow$ diamagnétique (s'oppose au $\vec{B}_{ext}$).

e) Analyse symétrie de forces $d\vec{F}$ montre $\Sigma d\vec{F} = \vec{0}$ sur la boule

$d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{J} \wedge \vec{B}$ $\quad \vec{J_s} = -\frac{3}{2\mu_0} \cdot B_\infty \sin\theta \, \vec{u_\varphi}$

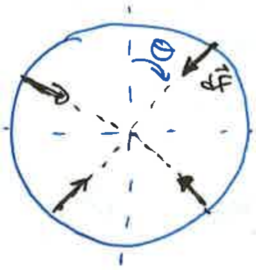
$\vec{B} = B_\infty \vec{u_z} = B_r \vec{u_r} - B_\theta \vec{u_\theta}$ (pas de dépendance en φ, par symétrie autour axe $\vec{u_z}$).

on a donc $d\vec{F} = -\frac{1}{2} J_s B_\theta \cdot \vec{u_r} + \frac{1}{2} J_s \cdot B_r \vec{u_\theta}$

À la surface $r = R$ on sait que $B_{r\,ext}$ nulle $\left(\vec{B} = B_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\vec{u_r} - B_\infty \cdot \sin\theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\vec{u_\theta}\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{F} &= -\frac{1}{2} J_s \cdot B_\theta \, \vec{u_r} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2\mu_0} \cdot B_\infty \sin\theta\right) \cdot \left(-B_\infty \cdot \sin\theta \left(\frac{3}{2}\right)\right) \vec{u_r} \\ &= -\frac{9}{8\mu_0} B_\infty^2 \cdot \sin^2\theta \, \vec{u_r} \end{aligned}$$

sur la sphère



$d\vec{F} < 0$

radial

dépend $\sin^2\theta$ ⇒ symétrie tous les 90°.

Ainsi les 4 quarts de la sphère s'annulent et cela aussi après rotation selon axe $\vec{u_1}$.