Feuille de TD n$^{\underline{o}}$ 9: *Propagation dans les milieux*

1 Effet Faraday dans un diélectrique

Un milieu diélectrique isolant est modélisé par un réseau d'ions positifs de charge $+e$, immobiles, en nombre n par unité de volume. Autour de chaque ion tourne un électron qui est soumis à une force de rappel dirigée vers le centre de l'ion. Cette force tient compte de toutes les interactions de l'électron avec toutes les autres particules composant le diélectrique. Elle est donnée par $-m\omega_0^2\vec{R}$ où $\vec{R}$ est le vecteur joignant le centre de l'ion à l'électron et ω_0 une pulsation caractéristique du milieu. Chaque couple électron-ion forme un dipôle électrique. On note m la masse de l'électron, $\vec{V}$ sa vitesse, e la charge élémentaire, μ_0 la perméabilité du vide. Le but de ce problème est d'étudier l'influence d'un champ magnétique statique $\vec{B}_s = B_s\,\vec{u}_z$ sur la propagation d'une onde électromagnétique transverse plane. On suppose que les différentes grandeurs ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{R}$, etc...) associées à l'onde sont de la forme : $G = G_0\exp[i(\vec{k}\,.\,\vec{r} - \omega t)]$ où $\vec{r}$ représente le vecteur position à partir d'une origine fixe O. Du point de vue microscopique, l'onde électromagnétique se propage dans le vide en présence de charges et de courants.

A. Équation de propagation des ondes.

1. À partir des équations de Maxwell, établir l'équation de propagation de $\vec{E}$ sous sa forme la plus générale.
2. Montrer que pour une onde transverse plane $\mathrm{div}\vec{E} = 0$. Réécrire l'équation de propagation en tenant compte de ce résultat et de la forme de $\vec{E}$.

B. Détermination des caractéristiques du milieu.

On utilise dans les calculs la pulsation cyclotron $\omega_c = \dfrac{e\,B_s}{m}$ et la pulsation plasma ω_p telle que $\omega_p^2 = \dfrac{n\,e^2}{m\,\varepsilon_0}$.

1. (a) Écrire le principe fondamental de la dynamique pour un électron en présence d'une onde électromagnétique de champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et du champ magnétique $\vec{B}_s$ lorsque l'électron est non relativiste.
   (b) Justifier que l'on peut négliger l'effet du champ $\vec{B}$ devant celui de $\vec{E}$.
   (c) Justifier que l'on peut remplacer $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ par $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$
2. Dans le cas où $\vec{B}_s = \vec{0}$, déterminer la susceptibilité et la permittivité diélectriques du milieu dans le cas dynamique ($\omega \neq 0$) puis dans le cas statique ($\omega = 0$).
3. Dans le cas général où $\vec{B}_s$ est non nul, calculer les composantes cartésiennes de $\vec{R}$ en fonction de E_x, E_y, E_z, ω, ω_c, ω_0, e et m.
4. En déduire la vitesse de l'électron, puis la densité de courant $\vec{j}$ puis enfin $\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ en fonction de $\vec{E}$, μ_0, ω^2/c^2 et d'un tenseur $\bar{\bar{\chi}}$ dont on exprimera les coefficients à l'aide des nombres α, β, γ suivants :

$$\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \beta = \frac{\omega_p^2\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \qquad \gamma = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2}$$

5. En utilisant l'équation de propagation des ondes obtenue à la question A.2., déduire une relation entre $\vec{E}$ et $\bar{\bar{\chi}}$.

C. Détermination des modes propres de propagation.

1. 1$^{\text{er}}$ cas : on suppose que $\vec{E}$ est vecteur propre de $\bar{\bar{\chi}}$ avec la valeur propre α. Quelle est la direction de $\vec{E}$? Quelles sont les directions possibles pour le vecteur d'onde $\vec{k}$? Le champ $\vec{B}_s$ a-t-il une influence sur l'onde ? Calculer la vitesse de phase dans ce cas.
2. 2$^{\text{e}}$ cas : $\vec{E}$ est vecteur propre de $\bar{\bar{\chi}}$ avec une valeur propre différente de α. Déterminer les valeurs propres possibles. Déterminer la direction de $\vec{k}$ pour une onde transverse. Calculer les normes k_1 et k_2 des vecteurs d'ondes des ondes associées aux deux valeurs propres (modes propres). Étudier la polarisation de chaque mode propre.

D. Effet Faraday.

On émet dans le vide en $z = -\infty$ une onde plane transverse polarisée rectilignement selon Ox. Elle traverse une tranche du milieu étudié située entre les plans $z = 0$ et $z = L$, dans laquelle règne un champ magnétique statique $\vec{B}_s$ parallèle à la direction de propagation Oz. Les régions $z < 0$ et $z > L$ sont vides. On suppose que ω_c et ω_p sont $\ll \omega \approx \sqrt{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

1. Vérifier que α, β, γ sont $\ll 1$.

2. Dans le milieu, pour $0 < z < L$, on essaie la solution $\vec{E} = E_0 \cos(k\,z - \omega\,t)\,\vec{u}_x$. Montrer que cette solution est impossible si $B_s \neq 0$.

3. On cherche maintenant une solution qui est une combinaison linéaire des modes propres trouvés en C.2. Décomposer l'onde incidente $\vec{E}_i(z = 0,\, t) = E_0 \cos(\omega\,t)\,\vec{u}_x$ en somme d'une onde à polarisation circulaire droite et une onde à polarisation circulaire gauche. Dans le milieu on cherche une solution $\vec{E}(z,\, t) = \vec{E}_1(z,\, t) + \vec{E}_2(z,\, t)$ où l'indice 1 (respectivement 2) est relatif à une onde à polarisation circulaire gauche (respectivement droite).

4. En déduire $\vec{E}_{1,2}(z,\, t)$ puis $\vec{E}(z,\, t)$ dans le milieu. Calculer $\vec{E}(z = L,\, t)$.

5. Dans le vide en $z > L$, on étudie la polarisation de l'onde transmise. De quelle polarisation s'agit-il ? On note θ l'angle entre $\vec{E}$ et l'axe Ox. Calculer θ en fonction de L, k_1, k_2 puis en fonction des données du problème.

Feuille n° 9 : Propagation dans les milieux

1. Effet de Faraday dans un diélectrique

e^- autour de l'ion

{ réseau de densité n (ions/volume) ions fixes dans l'espace ; charge te

e^- force de rappel $(-\vec{u_r})$ $-m\omega_0^2 \cdot \vec{R}$

e^--ion = dipôle électrique

m, $\vec{v}$, e, μ_0

milieu soumis à un Bstatique extérieur $\vec{B_s} = B_s \vec{u_z}$; effet de $\vec{B_s}$ sur la propagation d'une OEM plane transverse

on suppose $G = G_0 \exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t))$

milieu : vide en présence de charges et courants.

A) Éq. de propagation des ondes

1. À partir des éq. de Maxwell, établir l'éq. de propagation de $\vec{E}$ sous sa forme la plus générale.

Éq. Maxwell $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Éq. propagation :

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \vec{\nabla}(\rho/\varepsilon_0) - \Delta\vec{E}$$

$$= \vec{\nabla}\wedge\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(\mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) =$$

$$= -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho/\varepsilon_0)}$$

Pour $\vec{B}$: $\quad \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \mu_0(\vec{\nabla}\wedge\vec{j}) + \varepsilon_0\mu_0 \cdot \dfrac{\partial(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})}{\partial t}$

$$-\Delta\vec{B} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{B}) = \mu_0(\vec{\nabla}\wedge\vec{j}) - \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\varepsilon_0\mu_0$$

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0(\vec{\nabla}\wedge\vec{j})}$$

2. Montrer que pour une onde transverse plane $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$.
Réécrire l'équation de propagation en tenant compte de ce résultat et de la forme de $\vec{E}$.

onde plane transverse

$$\vec{E}=\vec{E_0}\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad / \quad \vec{E}\perp\vec{u_k}, \quad \vec{E}\perp\vec{B}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}$$

$$=\cancel{\frac{\partial}{\partial x}}\cdot E_{0x}\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\cdot(i k_x)+E_{0y}\cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\cdot(i k_y)+E_{0z}\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\cdot(i k_z)$$

$\vec{k}\vec{r}=k_x\cdot x+k_y\cdot y+k_z\cdot z$
$\mathrm{div}(\vec{k}\vec{r})=k_x+k_y+k_z$

$$=i\,\vec{E_0}\,\vec{k}\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}=i\cdot\vec{k}\cdot\vec{E}$$

comme $\vec{E}\perp\vec{u_k}\Rightarrow\vec{k}\cdot\vec{E}=0$ (les deux vecteurs sont $\perp$).

Ainsi $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E}=0.}$

Éq. propagation : $\Delta\vec{E}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu_0\,\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$ Or $\vec{\nabla}\vec{E}=0\Rightarrow\rho/\varepsilon_0=0$.

si $\vec{E}=\vec{E_0}\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ $\quad\frac{\partial^2}{\partial x^2}=i k_x\cdot(i k_x)$

$\Delta\vec{A}=(\Delta A_x)\vec{u_x}+(\Delta A_y)\vec{u_y}+(\Delta A_z)\vec{u_z}$
avec $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=(i k_x)^2=-k_x^2$

$$\Delta\vec{E}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot E_x\vec{u_x}+\dots$$

$$=(-k_x^2E_x-k_y^2E_x-k_z^2E_x)\vec{u_x}+(-k^2\cdot E_y\vec{u_y})-k^2\cdot E_z\cdot\vec{u_z}$$

$$=-k^2(E_x\vec{u_x}+E_y\vec{u_y}+E_z\vec{u_z})=-k^2\cdot\vec{E}$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=(-i\omega)^2\vec{E}=-\omega^2\vec{E}$$

$$\mu_0\cdot\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}=\mu_0\cdot(-i\omega)\cdot\vec{J}=-i\mu_0\cdot\omega\vec{J}$$

on a :

$$-k^2\cdot\vec{E}-\frac{1}{c^2}\cdot(-\omega^2\vec{E})=-i\mu_0\cdot\omega\vec{J}$$

$$\vec{E}\left(k^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)=i\mu_0\cdot\omega\vec{J}$$

Dans le vide $\vec{J}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}\left(k^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)=0.}$

$\Rightarrow$ on retrouve la relation de dispersion $\boxed{k=\frac{\omega}{c}}$

B. Détermination des caractéristiques du milieu

$$\omega_c = \frac{eB_s}{m}$$
$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$$

1.(a) Écrire le pp. fondamental de la dynamique pour un é en présence d'une OEM de champs $\vec E$ et $\vec B$ et du champ $\vec B_s$ lorsque l'é est non relativiste.

Pp. dynamique $\sum \vec F = m\cdot\vec a$ ~~$= m\cdot\frac{d\vec v}{dt}$~~

Forces: → force rappel $-m\omega_0^2\cdot\vec R$

→ force de Lorentz $= q(\vec E + \vec v \wedge \vec B)$; $q = -e$

ici $\vec E = \vec E_{champ}$

$\vec B = \vec B_{champ} + \vec B_s$

$\Big\}\ q(\vec E + \vec v \wedge (\vec B + B_s))$

→ é a une vitesse $\vec v$ ⇒ $m\cdot\vec a = m\cdot\frac{d\vec v}{dt}$

on conclu:

$$\boxed{m\cdot\frac{d\vec v}{dt} = -m\omega_0^2\vec R - e\cdot\vec E - e\cdot\vec v\wedge(\vec B + \vec B_s)}$$

(b) Justifier que l'on peut négliger l'effet du champ $\vec B$ devant celui de $\vec E$.

onde plane transverse $\vec E \perp \vec B \perp \vec u_k$

$$\vec B = \frac{\vec u_k \wedge \vec E}{c} = \frac{\vec k \wedge \vec E}{\omega} \Rightarrow |\vec B| = \frac{|\vec E|}{c}$$

si effet $\vec B$ << effet $\vec E$ ⇒ $\vec F_B << \vec F_E$ ⇒ $q(\vec v\wedge(\vec B + \vec B_s)) << q\cdot\vec E$

0 on ne s'intéresse pas aux Bstatiq

et alors $\frac{\vec v \wedge (\vec B + \vec B_s)}{\vec E} << 1$; on considère uniquement champ $\vec B$

⇓

on vérifie si cela est le cas:

on a: $\frac{|\vec v \wedge (\frac{|\vec E|}{c}\vec u_B)|}{|\vec E|} = \frac{v}{c}\cancel{\frac{|\vec E|}{|\vec E|}}$ et comme é non relativiste

$v << c$ ⇒ on peut négliger les effets du champ. $\vec B$. devant $\vec E$

(c) Justifier que l'on peut remplacer $\frac{d\vec v}{dt}$ par $\frac{\partial \vec v}{\partial t}$.

$$d\vec v = \frac{\partial \vec v}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec v}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial \vec v}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial \vec v}{\partial z}\cdot dz$$

$$\frac{d\vec v}{dt} = \frac{\partial \vec v}{\partial t} + \frac{\partial \vec v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec v}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial \vec v}{\partial t} + \frac{\partial \vec v}{\partial x}\vec v_x + \frac{\partial \vec v}{\partial y}\cdot\vec v_y + \frac{\partial \vec v}{\partial z}\cdot\vec v_z = \frac{\partial \vec v}{\partial t} + (v_x, v_y, v_z)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\vec v$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{grad})\vec{V}$$

on sait $\vec{V}$ est de la forme $\vec{V} = \vec{V_0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -i\omega\cdot \vec{V_0} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = -i\omega\cdot\vec{V}$$

$$\vec{grad}\cdot\vec{V} = \cancel{\tfrac{\partial}{\partial x}}\ i\vec{k}\cdot\vec{V} = \cancel{ik_x V + ik_y V + ik_z V}$$

on a :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -i\omega\vec{V} + \vec{V}\cdot i\cdot\vec{k}\cdot\vec{V}$$

si $\vec{V_e} \parallel \vec{u_k} \Rightarrow V$ carrément plus petit que V

$$= -i\omega\vec{V}\left(1 - \frac{\vec{k}\cdot\vec{V}}{\omega}\right) = -i\omega\vec{V}\left(1 - \frac{\vec{V}\cdot\vec{u_k}}{\omega/k}\right) = -i\omega\vec{V}\left(1 - \frac{V}{V_\phi}\right)$$

$$\vec{V_\phi} = \frac{d\vec{r}}{dt} = V\vec{u_k} = \frac{c}{n}\vec{u_k} = \frac{\omega}{k}\vec{u_k}$$

milieu : vide $\Rightarrow V_\phi = c$.

comme $\bar{e}$ non relativiste $V \ll V_\phi = c \Rightarrow V/V_\phi \to 0$.

alors $\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = -i\omega\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$

2. Dans le cas où $\vec{B_0} = \vec{0}$, déterminer la susceptibilité χ et la permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r$ / $\varepsilon_r = (1+\chi)$ diélectriques du milieu dans le cas dynamique ($\omega \neq 0$) puis dans le cas statique ($\omega = 0$)

Dans quelle quantité / grandeur se trouve χ et ε $\longrightarrow$ Polarisation

On a : ○ ion • $\bar{e}$ / génère un dipôle électrique

on a n dipôles / par unité de volume

$d\vec{p}_{TOTAL} = \vec{P}\, dV$ où $\vec{P} = n\cdot\vec{P}_{\text{individuel } e^--ion}$ $\quad \vec{P}_{\text{individuel } e^--ion} = q\cdot\vec{d} = -e\cdot\vec{R}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = -ne\cdot\vec{R}}$ (densité de polarisation macroscopique)

si $\vec{B_0} = \vec{0} \Rightarrow$ PFD fondamentale de la dynamique

$$m\cdot\frac{d\vec{V}}{dt} = -m\omega_0^2\vec{R} - e\cdot\vec{E} \underbrace{-e\vec{V}\wedge(\vec{B} + \vec{B_0})}$$

+ on néglige ce terme $|\vec{B}| \ll |\vec{E}|$

$$\Rightarrow m\cdot\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{R} - e\vec{E}$$

$$m\cdot(-i\omega)^2\cdot\vec{R} = -m\omega_0^2\vec{R} - e\vec{E}$$

$$\vec{R}(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot m = -e\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{-e\vec{E}}{m(\omega_0^2-\omega^2)}}$$

on a donc $\boxed{\vec{P} = -ne\vec{R} = \dfrac{ne^2 \vec{E}}{m(\omega_0^2-\omega^2)}}$,

si le milieu est linéaire, homogène et isotrope

$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}}$ avec $\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

par comparaison $\chi_e = \dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0 \cdot (\omega_0^2-\omega^2)}$ et en terme de $\omega_c = \dfrac{eB_s}{m}$ et $\omega_p^2 = \dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}$

on a : $\boxed{\chi_{e\,\omega\neq 0} = \dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{\omega_0^2-\omega^2} = \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$,

Dans le cas statique $\omega = 0 \Rightarrow \boxed{\chi_{e\,\omega=0} = \left(\dfrac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2}$

on détermine la $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$

dynamique $\quad \varepsilon_{r\,dyn} = 1 + \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}$

statique $\quad \varepsilon_{r\,statique} = 1 + \left(\dfrac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2 = \dfrac{\omega_0^2+\omega_p^2}{\omega_0^2}$

Note: polarisation $\nearrow$ si $\chi_e \nearrow$ $\Rightarrow$ $\omega_p \nearrow \Rightarrow n \nearrow$ densité ion-é

$\Rightarrow$ $\omega_0 \searrow \Rightarrow$ forte ionisation ou forte liaison é-ion caractérisée par la pulsation ω_0.

3. Dans le cas général où $\vec{B}_s \neq \vec{0}$, calculer les composantes cartésiennes de $\vec{R}$ en fonction de $E_x, E_y, E_z, \omega, \omega_0, \omega_c, e$ et m.

Eq. dynamique $\quad m \cdot \dfrac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} = -e\vec{E} - m\omega_0^2 \cdot \vec{R} - e\dfrac{\partial \vec{R}}{\partial t} \wedge \vec{B}_s$ $\qquad$ ici : $F_B \ll F_E$; on néglige $\vec{B}$ champ

$$m \cdot (-i\omega)^2 \vec{R} = -e\vec{E} - m\omega_0^2 \vec{R} - e(-i\omega) \cdot \vec{R} \wedge \vec{B}_s$$

$$-m\omega^2 \vec{R} = -e\vec{E} - m\omega_0^2 \vec{R} + ie\omega \vec{R} \wedge \vec{B}_s$$

$$m(\omega_0^2-\omega^2)\vec{R} = -e\vec{E} + ie\omega \vec{R} \wedge \vec{B}_s$$

$$m(\omega_0^2-\omega^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -e\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + ie\omega \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ 0 & 0 & B_s \end{vmatrix}}_{\begin{pmatrix} yB_s \\ -xB_s \\ 0 \end{pmatrix}}$$

on déduit :

$$m(\omega_0^2-\omega^2)\,x = -e\,E_x + i\omega e B_0 \cdot y$$

$$m(\omega_0^2-\omega^2)\cdot y = -e\,E_y - i\omega e B_0 \cdot x$$

$$m(\omega_0^2-\omega^2)\cdot z = -e\,E_z$$

$$\Rightarrow \left[\, z = -\frac{e\,E_z}{m(\omega_0^2-\omega^2)} = \frac{e\,E_z}{m(\omega^2-\omega_0^2)} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\omega_0^2-\omega^2)\cdot x - i\omega e B_0\, y = -eE_x \\ +i\omega e B_0\, x + m(\omega_0^2-\omega^2)\, y = -eE_y \end{array} \right.$$

$$m(\omega^2-\omega_0^2)\,x + i\omega e B_0\, y = e\,E_x$$

$$-i\omega e B_0\, x + m(\omega^2-\omega_0^2)\, y = eE_y$$

on réécrit en fonction de $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m(\omega^2-\omega_0^2) & i\omega\omega_c\cdot m \\ -i\omega\omega_c\cdot m & m(\omega^2-\omega_0^2) \end{pmatrix}}_{\Delta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eE_x \\ eE_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} eE_x \\ eE_y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \Delta^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} m(\omega^2-\omega_0^2) & -i\omega\omega_c m \\ i\omega\omega_c m & m(\omega^2-\omega_0^2) \end{bmatrix}$$

$$\det A = m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \underbrace{i^2}_{=-1}\omega^2 m^2 \omega_c^2$$

$$= m^2\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2 - \omega^2\omega_c^2\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{e}{m} \cdot \dfrac{(\omega^2-\omega_0^2)E_x - i\omega\omega_c E_y}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \\[2ex] y = \dfrac{e}{m} \dfrac{(\omega^2-\omega_0^2)E_y + i\omega\omega_c E_x}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \end{array}\right.$$

4. $\vec{v}_e$? $\vec{J}$? $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$? / sont fonctions de $\vec{E}$, μ_0, $\frac{\omega^2}{c^2}$, $\overline{\overline{\chi}}$ dont

on exprimera les coefficients à l'aide des nombres α, β, γ suivants :

$$\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \beta = \frac{\omega_p^2 \omega \cdot \omega_c}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \qquad \gamma = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2}$$

① ces quantités $\vec{v}_e$, $\vec{J}$, $\partial \vec{J}/\partial t$ sont fonction du vecteur $\vec{R} = Re^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -i\omega \vec{R}$$

$$\vec{J} = n e \cdot (\vec{v}_{ion} - \vec{v}_e) \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{v}_{ion} \ll \vec{v}_e}}{=} -ne\vec{v} = in\omega e \vec{R}$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = in\omega e \cdot (-i\omega \vec{R}) = n\omega^2 e \vec{R}$$

$\vec{v}, \vec{J}, \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$ dépendent de $\vec{R}$; il faut trouver $\vec{R} = f(\vec{E})$.

on réécrit $x, y, z \equiv \vec{R}$ ~~...~~ ~~...~~ en fonction des nouveaux paramètres

$$x = \frac{e}{m} \frac{(\omega^2-\omega_0^2)E_x - i\omega\omega_c E_y}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} = \left(-\frac{\gamma}{\omega_p^2} \cdot E_x - i\frac{\beta}{\omega_p^2} \cdot E_y\right)\frac{e}{m}$$

$$y = \frac{e}{m} \frac{(\omega^2-\omega_0^2)E_y + i\omega\omega_c E_x}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} = \left(-\frac{\gamma}{\omega_p^2} \cdot E_y + i\frac{\beta}{\omega_p^2} \cdot E_x\right)\frac{e}{m}$$

$$z = \frac{eE_z}{m(\omega^2-\omega_0^2)} = \frac{e}{m} \cdot \frac{\alpha}{\omega_p^2} \cdot E_z$$

sous forme matricielle

$$\vec{R} = \underset{\uparrow}{-}\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{\omega_p^2} \begin{bmatrix} \gamma & i\beta & 0 \\ -i\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \vec{E}$$

soit : $\vec{v} = i \frac{e \cdot \omega}{m\, \omega_p^2} \overline{\overline{\chi}} \cdot \vec{E}$

$$\vec{J} = -\frac{i\, ne^2\omega}{m\omega_p^2} \overline{\overline{\chi}} \cdot \vec{E} \underset{\substack{? \\ \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}}{=} -i\omega\varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}\vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\frac{n\omega^2 e^2}{m\,\omega_p^2} \overline{\overline{\chi}} \cdot \vec{E} \underset{\substack{? \\ \omega_p = \dots}}{=} -\omega^2 \cdot \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}}\vec{E}$$

5. En utilisant l'équation de propagation des ondes obtenue à la question A.2., déduire une relation entre $\vec{E}$ et $\bar{\bar{\chi}}$.

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\cdot\left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right) \cancel{+ \vec{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

on a : $\boxed{\vec{E}\cdot\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = i\mu_0\,\omega\,\vec{J}}$

avec $\vec{J} = -i\omega\,\varepsilon_0\,\bar{\bar{\chi}}\,\vec{E}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = i\mu_0\omega(-i\omega\,\varepsilon_0\,\bar{\bar{\chi}}\cdot\vec{E}) = \varepsilon_0\mu_0\cdot\omega^2\,\bar{\bar{\chi}}\,\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\cdot\bar{\bar{\chi}}\cdot\vec{E}$$

$$\vec{E}\cdot\frac{c^2}{\omega^2}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = \bar{\bar{\chi}}\cdot\vec{E}$$

$$\vec{E}\,\underbrace{\left(\frac{c^2k^2}{\omega^2} - 1\right)}_{\lambda \text{ scalaire}} = \underbrace{\bar{\bar{\chi}}}_{\text{tenseur}}\,\vec{E}$$

on a $\lambda\vec{E} = \bar{\bar{\chi}}\,\vec{E}$ $\Rightarrow$ valeurs propres de l'équation nuplique de $\bar{\bar{\chi}}$ si $\vec{E}$ est un vecteur propre de
λ valeur propre vaut $\frac{k^2c^2}{\omega^2} - 1$

c. Détermination des modes propres de propagation.

1. 1er cas : on suppose que $\vec{E}$ est vecteur propre de $\bar{\bar{\chi}}$ avec la valeur propre α. Quelle est la direction de $\vec{E}$? Quelles sont les directions possibles pour le vecteur d'onde $\vec{k}$? Le champ $\vec{B_s}$ a-t-il une influence sur l'onde ? Calculer la v_φ dans ce cas.

α valeur propre de $\bar{\bar{\chi}}$
$\vec{E}$ vecteur propre de

$\vec{E}$ direction ? OEM transverse $\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{u_k}$

l'onde OEM est définie par $\vec{R} = -\frac{e}{m\omega p}\begin{bmatrix} \gamma & i\beta & 0 \\ -i\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}\vec{E}$ où l'unique

vecteur ~~propre~~ diagonalisable est $\alpha\,\vec{u_z}$

on rappelle $\bar{\bar{\chi}} = \begin{bmatrix} \gamma & +i\beta & 0 \\ -i\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$

dans ce cas $\vec{E} \parallel \vec{u_z}$ car $\vec{E}$ vecteur propre avec α.
et $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \in xOy$.

→ influence de B_s :

• $\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ $\Rightarrow \alpha$ ne dépend pas de $\omega_c = \frac{eB_s}{m}$ quantité sur laquelle le champ B_s intervient. Dans ce cas, α ne dépend pas de B_s $\Rightarrow$ B_s n'a pas d'influence sur l'onde

$\alpha = \frac{c^2k^2}{\omega^2} - 1$ → indépendant de B_s
↳ implique $\vec{E} \parallel \vec{u_z}$ puis $\vec{k}$ e oxy

<u>vitesse de phase:</u>

$$\left(\frac{k^2c^2}{\omega^2} - 1\right)\vec{E} = \bar{\bar{\chi}}\cdot\vec{E} = \alpha\vec{E}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{k^2c^2}{\omega^2} - 1 = \alpha} \quad \text{soit} \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1+\alpha}} = f(\omega)$$

$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = \alpha + 1$; $\frac{\omega}{kc} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$; $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1+\alpha}}$

<u>NOTE:</u> ~~...~~ F_L dû au B_s champ statique

$$-e\cdot\vec{V}\wedge\vec{B_s} = -\frac{i\omega e^2}{m\omega_p^2}\cdot\bar{\bar{\chi}}\cdot\vec{E}\wedge\vec{B_s}$$

$\vec{E} \parallel \vec{u_z}$

$B_s \parallel \vec{u_z}$

$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\vec{E}\wedge\vec{B_s}}\ (\propto \vec{F_L}) = 0.$

et $E\wedge B_s \propto F_L \Rightarrow F_L = 0$

2 $2^{ème}$ cas: $\vec{E}$ vecteur propre de $\bar{\bar{\chi}}$ avec une valeur différente de α. Direction de $\vec{k}$ pour une onde Transverse
Déterminer les valeurs propres possibles. Direction de $\vec{k}$ pour une onde Transverse
Calculer k_1, k_2 des vecteurs des ondes des ondes associées aux deux valeurs propres (modes propres). Étudier la polarisation de chaque mode propre.

$$\bar{\bar{\chi}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\bar{\chi}}' \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \alpha \end{pmatrix}$$

on se restreint au $\bar{\bar{\chi}}'$ (valeurs propres $\neq \alpha$.) et donc à l'espace $\vec{u_x}, \vec{u_y}$.

on détermine les valeurs propres de $\bar{\bar{\chi}}'$

$$\bar{\bar{\chi}}' = \begin{pmatrix} \gamma & i\beta \\ -i\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

~~det $\bar{\bar{\chi}}' = \gamma^2 - 1$~~

↳ $\det(\bar{\bar{\chi}}' - \lambda I) = 0$ avec λ les valeurs propres
I l'identité.

$$\det\begin{pmatrix} \gamma-\lambda & i\beta \\ -i\beta & \gamma-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (\gamma-\lambda)^2 - (i\beta)\cdot(-i\beta) =$$

$$(\gamma-\lambda)^2 - \beta^2 = 0$$

$$\gamma - \lambda = \pm\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = \gamma - \beta \\ \lambda_2 = \gamma + \beta \end{matrix}}$$

$\vec{E}\cdot\vec{k}=0$ onde plane transverse

$\vec{E} \in (\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ on a donc $\vec{k} \parallel \vec{u}_z$; $\vec{u}_z$ direction de propagation de l'onde.

modes propres

$$\left(\frac{k^2c^2}{\omega^2}-1\right)\vec{E} = \bar{\bar{\chi}}\cdot\vec{E} = \lambda\vec{E}$$

$$\lambda_1 = \gamma-\beta = \frac{k_1^2c^2}{\omega^2}-1 \longrightarrow k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\lambda_1+1} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\gamma-\beta+1}$$

$$\lambda_2 = \gamma+\beta = \frac{k_2^2c^2}{\omega^2}-1 \longrightarrow k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\lambda_2+1} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\gamma+\beta+1}$$

polarisation de chaque mode

$\lambda_{1,2}$ sont telles que $\bar{\bar{\chi}}'\vec{E} = \lambda\cdot\vec{E}$

or soit $\vec{E}\in(\vec{u}_x,\vec{u}_y)$

on déduit $(\bar{\bar{\chi}}' - \lambda_i I)\vec{E}_i = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} \gamma-\lambda_i & i\beta \\ -i\beta & \gamma-\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$(\gamma-\lambda_i)E_{ix} + i\beta E_{iy} = 0 \rightarrow E_{iy} = -\frac{1}{i\beta}(\gamma-\lambda_i)E_{ix} = \frac{i(\gamma-\lambda_i)}{\beta}E_{ix}$

$-i\beta E_{ix} + (\gamma-\lambda_i)E_{iy} = 0 \rightarrow E_{ix} = \frac{\gamma-\lambda_i}{i\beta}E_{iy} = -\frac{i(\gamma-\lambda_i)}{\beta}E_{iy}$

Calculons pour :

- $\lambda_1 = \gamma-\beta$

$$\boxed{E_{1y} = \frac{i(\gamma-\gamma+\beta)}{\beta}E_{1x}} = iE_{1x} = E_{1x}e^{i\pi/2}$$

$$= E_{0x}e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t)}e^{i\pi/2}$$

↑ on rappelle $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

E_{1x} diffère de E_{1y} en $-i \Rightarrow$ changement de $e^{i\pi/2}$

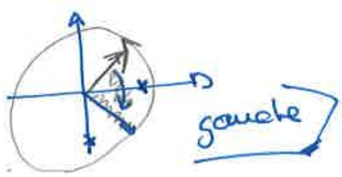
$$E_{1y} = E_{0x}e^{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega t+\frac{\pi}{2})}$$

$$E_{1x} = -i\frac{(\gamma-\gamma+\beta)}{\beta}.E_{1y} = -iE_{1y}$$

$$\vec{E} = E_{0x}\begin{vmatrix} \cos(\vec{k}_1\cdot\vec{r}_1-\omega t) \\ +\sin(\vec{k}_1\vec{r}_1-\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

tracé arbitrairement

donné par $e^{i\pi/2}$



$|E_{1x}| = |E_{1y}|$, $\varphi = \varphi_1-\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ } circulaire

sens gauche

• pour $\lambda_2 = \gamma + \beta$

rappel vecteur Jones

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ gauche

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ droite

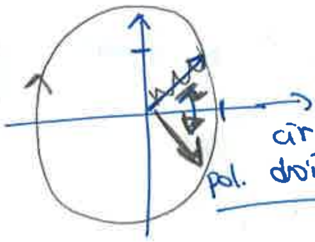
$$\boxed{E_{2y} = \frac{i}{\beta}(\gamma - \lambda_2)E_{2x} = \frac{i}{\beta}(\gamma-\gamma-\beta)E_{2x} \quad \frac{-i\beta}{\beta} = -i\,E_{2x}}$$

supposons $\vec{E} = \vec{E_0}\cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$

$$\boxed{E_{2y} = -i\,E_{2x} = -i\,\vec{E}_{0x}\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}} = E_{0x}\cdot e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\cdot e^{+\frac{3\pi}{2}}$$

$$= E_{0x}\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\frac{3\pi}{2})}$$

$$\vec{E_2} = E_{0x}\cdot\left|\begin{array}{l}\cos(\vec{k}_2\vec{r}_2-\omega t)\\ -\sin(\vec{k}_2\cdot\vec{r}_2-\omega t)\\ 0\end{array}\right.$$



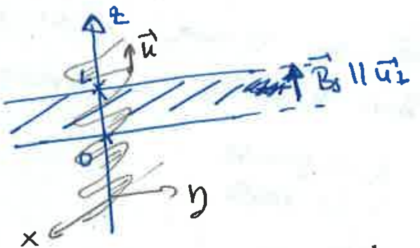
circulaire pol. droite

D. Effet Faraday

On émet dans le vide en $z=-\infty$ une onde plane transverse polarisée rectilignement selon Ox. Elle traverse une tranche du milieu étudié située entre les plans $z=0$ et $z=L$, dans laquelle règne un champ magnétique statique $B_s \parallel \vec{u_z}$. Les régions $z<0$ et $z>L$ sont vides.

On suppose ω_c et ω_p sont $\ll \omega \simeq \sqrt{|\omega_0^2-\omega^2|}$.

onde $\vec{E} = E_0\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ avec $\vec{E}\parallel\vec{u_x}$, $\vec{k}\parallel\vec{u_z}$ $\Big\}$ $\vec{E} = E_{0x}\,e^{i(k_1 z-\omega t)}\,\vec{u_x}$



$\vec{B_s}\parallel\vec{u_z}$ / B_s statique

① . Vérifier $\alpha, \beta, \gamma \ll 1$

on suppose ω_p et $\omega_p \ll \omega \simeq \sqrt{|\omega_0^2-\omega^2|}$

rappel : $\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1$ ($\omega_p \ll \omega$)

$$\beta = \frac{\omega_p^2\cdot\omega\cdot\omega_c}{(\omega_0^2-\omega^2)^2-\omega^2\omega_c^2} \simeq \frac{\omega_p^2\,\omega\,\omega_c}{(\omega^2)^2-\underbrace{\omega^2\cdot\omega_c^2}_{\ll\omega^4}} \simeq \frac{\omega_p^2\omega_c\cdot\omega}{\omega^4} \simeq \frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega^3} \ll 1$$

$\omega_p \ll \omega$, $\omega_c \ll \omega$

$$\gamma = \frac{\omega_p^2\,(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2-\omega^2\omega_c^2} \simeq \frac{\omega_p^2\cdot\omega^2}{(\omega^2)^2-\underbrace{\omega^2\omega_c^2}_{\ll\omega^4}} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1.$$

(2) Dans le milieu pour $0<z<L$, on essaie la solution

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz-\omega t)\,\vec{u_x}$$

Montrer que cette solution est impossible si $B_s \neq 0$.

on rappel $\left(\frac{k^2c^2}{\omega^2}-1\right)\vec{E} = \bar{\bar{\chi}}\vec{E}$

si $\vec{k} \parallel \vec{u_z}$ $\Rightarrow$ $\bar{\bar{\chi}}'$ $\Rightarrow$ et donc $\vec{E}$ selon $\vec{u_x}\vec{u_y}$ comme demandé ($E\vec{u_x}$)

on avait $\left(\frac{k^2c^2}{\omega^2}-1\right) = \gamma . E_x + i\beta E_y$.

$$\gamma = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2-\omega^2\omega_c^2}$$

où γ et β dependent de ω_c et donc de B_s

$$\beta = \frac{\omega_p^2 . \omega\omega_c}{(\omega_0^2-\omega^2)^2-\omega^2\omega_c^2}$$

Maintenant si $\vec{E} \parallel \vec{u_x}$ ~~est pas de $\vec{B_s}$~~

on aura $\left(\frac{k^2c^2}{\omega^2}-1\right) = \gamma . E_x + 0$ ~~≠ valeur propre du $\vec{B_s}$~~

impose $\beta=0$ ($E\vec{u_x}$). $\Rightarrow$ $\omega_c=0$ $\Rightarrow$ $B_s=0$.

$\vec{E}$ dans le plan Oxy

Par contre si $\vec{B_s}$ est non nulle, cela sévère un $\vec{E}$ dans le plan Oxy qui demande $\beta\neq 0$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{si } \vec{E} \parallel \vec{u_x} \Rightarrow B_s = 0.}$

(3) Solution construction des modes α_1, α_2.

Solution construction des modes en somme d'une onde

Décomposer l'onde $\vec{E_i}(z=0,t) = E_0 . \cos(\omega t)\vec{u_x}$ en somme d'une onde à polarisation circulaire droite + autre gauche. Dans le milieu on cherche une solution $\vec{E}(z,t) = \vec{E_1}(z,t) + \vec{E_2}(z,t)$ où 1 → gauche, 2 → droite

onde gauche

$\alpha_1 = \gamma - \beta$

$$\vec{E} = E_{0x}\begin{cases}\cos(\vec{k_1}\vec{r_1}-\omega t)\\ -\sin(\vec{k_1}\vec{r_1}-\omega t)\\ 0\end{cases}$$

onde droite

$\alpha_2 = \gamma + \beta$

$$\vec{E} = E_{0x}\begin{cases}\cos(\vec{k_2}.\vec{r_2}-\omega t)\\ \sin(\vec{k_1}.\vec{r_2}-\omega t).\end{cases}$$

On a en $z=0$ $\vec{E}(0,t) = E_0 \cdot \cos(\omega t)\,\vec{u_x}$

ainsi $\vec{E}(0,t) = \underset{\text{gauche}}{E_{+}(0,t)} + \underset{\text{droite}}{E_{-}(0,t)}$

$$\begin{pmatrix} E_0 \times \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t) \\ E_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t) \\ -E_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} \\ A_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. En déduire $\vec{E}_{1,L}(z,t)$ puis $\vec{E}(z,t)$ dans le milieu. Calculer $\vec{E}(z=L,t)$.

1) Calcul de $\vec{E}$ dans le milieu $(0<z<L)$

$$\vec{E}(0<z<L,t) = \frac{1}{2} \overbrace{\begin{pmatrix} E_0 \cos(k_1 z - \omega t) \\ E_0 \sin(k_1 z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}}^{E_1(z,t)} + \frac{1}{2} E_0 \overbrace{\begin{pmatrix} \cos(k_2 z - \omega t) \\ -\sin(k_2 z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}}^{E_2(z,t)}$$

$$= \frac{E_0}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(k_1 z - \omega t) + \cos(k_2 z - \omega t) \\ \sin(k_1 z - \omega t) - \sin(k_2 z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

on utilise $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$= \frac{E_0}{2} \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \omega t\right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z \cancel{-\omega t}\right) \\ \sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z \cancel{-\omega t}\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{E(z,t) \quad 0<z<L \text{ milieu}}$$

calculer

$$\vec{E}(z=L,t) = \frac{E_0}{2} \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} L - \omega t\right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} L \cancel{-\omega t}\right) \\ \sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2} L \cancel{-\omega t}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

~~on a $|E_x| = |E_y|$~~

extra en L : $\frac{E_x}{E_y} = \frac{\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} L \cancel{-\omega t}\right)}{\sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2} L \cancel{-\omega t}\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{k_1 - k_2}{2} L\right)} = \text{cte}$.

⑤ Dans le vide $z>L$, on étudie la polarisation de l'onde transmise. De quelle polarisation s'agit-il ? On note θ l'angle entre $\vec{E}$ et l'axe Ox. Calculer θ en fonction de L, k_1, k_2 puis en fonction des données du problème.

polarisation en sortie $\Rightarrow z=L$

on a : $\frac{E_x}{E_y} = \frac{1}{tg\left(\frac{k_1-k_2}{2}L\right)} = cte$

$$\vec{E} = E_z \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}L\right) \\ \sin\left(\frac{k_1-k_2}{2}L\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $E_z = E_0 \cdot \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}L - \omega t\right)$

pol. linéaire — déphasage de $0, \pm\pi$

circulaire — $|E_x| = |E_y|$ — déphasage $n\pi/2$; n impaire

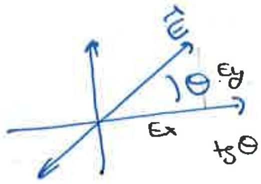
$\frac{E_x}{E_y} = \frac{1}{tg}$; $E_y = tg \cdot E_x$

ici : $\vec{E} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_x \\ E_x \cdot tg\left(\frac{k_1-k_2}{2}L\right) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}L - \omega t\right)$

On a donc $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0 \Rightarrow$ car E_x, E_y dépendent tous les deux en $\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}L - \omega t\right)$ et leur modules sont réels.

$\Rightarrow$ Polarisation linéaire ~~rectiligne~~ en sortie du milieu.

l'angle entre $\vec{E}$ et l'axe $\vec{u_x}$ est $\boxed{\theta = \frac{k_1-k_2}{2}L}$



$tg\theta = \frac{E_y}{E_x}$

Et maintenant θ en fonction des données du problème : $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\simeq} 1 + \frac{1}{2}x + \dots$

$\gamma, \beta \ll 1$

$k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\overbrace{\gamma-\beta}^{x}+1} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{2}(\gamma-\beta) + \dots\right)$

$k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\gamma+\beta+1} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{2}(\gamma+\beta) + \dots\right)$

$k_1 - k_2 = \frac{\omega}{c}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}(\gamma-\beta) - 1 - \frac{1}{2}(\gamma+\beta)\right) = -\frac{\omega}{c}\beta$

$\theta \simeq -\frac{\omega\beta L}{c2}$

$$\Theta \simeq -\frac{\omega \cdot \left(\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega^3}\right) \cdot L}{c \quad 2} \simeq -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{L}{2c} \times \frac{e B_s}{m} \propto B_s$$

Θ : $\nearrow$ si $L \nearrow$
si $B_s \nearrow$.

Θ : angle de rotation de Faraday } $\Theta = VLB$

cte de Verdet V
relie le angle tourné au champ B appliqué sur la région traversé L

Application: Effet Faraday dans les milieux interstellaires
→ permet de mesurer un champ, connu la densité d'électrons "n" en utilisant une source lumineuse polarisée (pulsar) en intégrant la n_e le long du parcours.

$$\Theta = \int_0^d \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{e}{2mc}\,\underbrace{B_s(\ell)}_{?}\,d\ell = \dots = \frac{e^3}{8\pi^2 \varepsilon_0 m^2 c^3}\,\lambda^2 \int_0^d \underbrace{n(\ell)}_{\text{connu}}\,\underbrace{B_s(\ell)}_{?}\,d\ell$$

déviation mesuré

longueur de la source connu.

Note: déflexion ≡ ~~[illegible]~~ la polarisation tourne d'un angle Θ au passage d'un milieu. et le cas de la monocouche de graphène monoatomique la plus grande pour un épaisseur fixe

graphène à Th
$d = 30\mu m$
$\omega = 1{,}5$ THz
$B_s = 8$ T
} $\Theta \sim 6^\circ$.

Faraday : changement de polarisation de l'onde incident dans un milieu où il $\exists$ un $\vec{B}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{B} \parallel \vec{u}_k$
basé sur un $\vec{v}$ de propagation légèrement $\neq$ pour 6 polarisation circulaire +, −
car charges tournent circulairement et génèrent son propre $\vec{B}$ qui est $\neq$ par +, − ; ~~une rotation~~ un sens polarisation s'ajoute avec B_s ; l'autre soustrait.