Feuille de TD n° 8: *Induction électromagnétique*

1 Principe de la plaque de cuisson par induction

1. On modélise une plaque à induction et une casserole comme suit :

   - La **casserole** peut être considéré comme un milieu conducteur de conductivité γ, de perméabilité relative μ_r, qui occupe le demi-espace $z > 0$.
   - La **plaque à induction** est une plaque conductrice plane, d'épaisseur finie, occupant le demi-espace $z < 0$, et qui est parcourue par un courant de densité volumique uniforme et constante $\vec{J}_0$. Ses dimensions sont très grandes devant les longueurs intervenant dans le problème et du point de vue des symétries et des invariances, on peut les considérer comme infinies. Elle est parcourue par un courant sinusoidal de pulsation ω, et produit dans l'air, près de la surface du milieu, un champ magnétique uniforme $B_1 \cos(\omega t)\,\vec{u}_x$.

   On fait dans toute la suite les approximations suivantes :

   * La pulsation ω est suffisamment faible pour que le régime soit quasi-stationnaire.
   * Le milieu est un conducteur ohmique, sa conductivité γ ne dépend pas de ω.
   * Les dimensions sont telles que le système est invariant par toute translation parallèle au plan xOy.

   (a) Quelle est la direction des courants $\vec{J}_0$ de la plaque produisant le champ $\vec{B}_1$? Il est inutile de relier $\vec{J}_0$ à $\vec{B}_1$.

   (b) Montrer que dans le milieu, les champs magnétique et électrique ont une seule composante non nulle et qu'elle ne dépend que de z et de t. On les note $B(z, t)$ et $E(z, t)$.

2. En régime permanent, $B(z, t)$ et $E(z, t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation ω. On utilise pour les calculs la notation complexe : le champ magnétique extérieur s'écrit alors $B_1 \exp(-i\omega t)\,\vec{u}_x$ et on pose $B(z, t) = f(z) \exp(-i\omega t)$ et $E(z, t) = g(z) \exp(-i\omega t)$ où f et g sont des fonctions complexes de la variable z qu'on cherche à calculer.

   (a) Écrire les quatre équations de Maxwell dans le milieu ainsi que la loi d'Ohm. On utilisera le fait que dans un conducteur en régime quasi-stationnaire la densité volumique de charge est nulle et le courant de déplacement est négligeable. Montrer que deux équations de Maxwell sont automatiquement vérifiées.

   (b) En déduire l'équation différentielle satisfaite par $f(z)$.

3. (a) On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\,\mu_r\,\gamma\,\omega}}$. Calculer $f(z)$ en fonction de B_1, δ et μ_r en tenant compte de sa valeur en $z = 0$ et sachant que B ne peut pas devenir infini dans le milieu.

   (b) Quelle est la dimension de δ et sa signification physique ?

   (c) Calculer $g(z)$. En déduire l'expression réelle de $E(z, t)$.

4. Calculer la puissance par unité de volume dégagée en chaleur dans le milieu. En déduire la puissance moyenne temporelle de chauffage par unité de surface en fonction de B_1, μ_0, μ_r, γ et ω.

5. A.N. On donne pour le cuivre $\gamma = 6.\times 10^7\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$, $\mu_r = 1$. Pour l'acier , $\gamma = 6 \times 10^6\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$, $\mu_r = 1000$. La pulsation est $\omega = 1000\ \mathrm{rad.s}^{-1}$.

   (a) Calculer δ pour le cuivre et pour l'acier. Commentaire.

   (b) La puissance de chauffage désirée est de $10^4\ \mathrm{W.m}^{-2}$. En déduire le champ B_1 nécessaire dans les deux cas. Expliquer le choix de l'acier pour réaliser des casseroles fonctionnant sur une plaque à induction. Donner une valeur minimale de l'épaisseur du fond de la casserole en acier.

2 L'Électro-aimant

Il est constitué d'un barreau de ferromagnétique doux appelé fer, de section constante S, replié sur lui-même de façon que les deux extrémités planes soient en regard l'une de l'autre à la distance d. L'espace vide entre les extrémités est appelé entrefer. On donne la longueur de la ligne médiane du barreau (en pointillé) ℓ = 1,5 m, d = 5 cm, la perméabilité relative du fer μ_r = 4000. Un enroulement de N spires est bobiné sur une partie du fer. Il est traversé par le courant I. On admet que dans le fer les lignes de champ sont parallèles à la ligne médiane donc à la surface du barreau et que la norme de $\vec{B}$ dans le fer notée B_1 est constante sur une section droite.

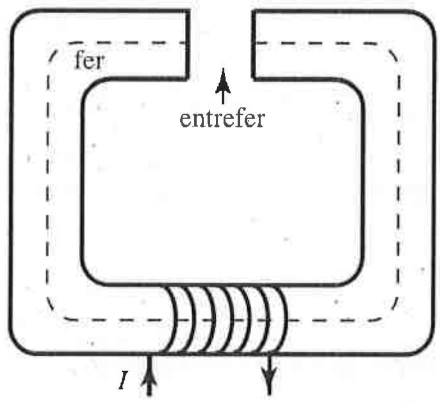
1. Montrer que B_1 est constante dans tout le fer. Calculer H_1 norme de $\vec{H}$ dans le fer en fonction de B_1 en régime linéaire.

2. On admet aussi que les lignes de champ dans l'entrefer sont perpendiculaires aux faces. Montrer que le champ B_2 dans l'entrefer est uniforme. Calculer B_2 en fonction de B_1. En déduire H_2 dans l'entrefer.

3. À l'aide du théorème d'Ampère, calculer H_1, H_2, B_1 et B_2 en fonction de μ_0, μ_r, ℓ, d, N et I.

   A.N.: $B_2 = 1$ T pour $I = 100$ A. Calculer N.

4. Refaire le calcul de B_2 quand le fer est saturé : M_s = 1,2 $\times 10^6$ A.m^{-1}. Quel champ peut-on obtenir dans l'entrefer avec le courant maximum de 180 A ?



TD n°8 Induction électromagnétique

1) Principe de la plaque de cuisson par induction

milieu conducteur : γ, μ_r $z>0$.

plaque : plaque conductrice plane épaisseur finie $z<0$ parcourue par un $\vec{J_0}$ (volumique uniforme)

et $\vec{J_0} = J_0 \cdot \cos(\omega t)$ tel que produit un $\vec{B} = B_1 \cdot \cos(\omega t) \vec{u_x}$

dimensions >> longueurs ~~des~~ problème tel que elle est ∞.

Approx : ω faible / régime quasi-stationnaire

milieu conducteur ohmique / ~~σ~~ ne dépend pas de ω

invariance par translation en ~~x, y~~. $\vec{u_x}, \vec{u_y}$

a) Direction de $\vec{J_0}$ produisant $\vec{B_1}$.

opt 1

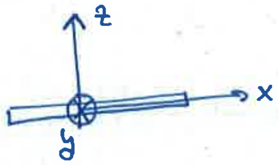
$\vec{B_1} \parallel \vec{u_x}$; plaque en $xOy \Rightarrow \vec{OP} \propto \vec{Oz}$ comme $\vec{B} \propto \dfrac{\vec{J} \wedge \vec{OP}}{(OP)^3}$ (dans la plaque, $\vec{u_z}$) $\Rightarrow$ on en déduit $\boxed{\vec{J} \parallel \vec{u_y}}$

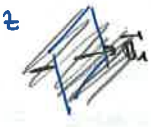
$\vec{B}$: $\vec{u_x}$

$B \vec{u_x} \Rightarrow \vec{J}$ doit être $\vec{u_y}$ ou $\vec{u_z}$

opt2

$\Rightarrow$ le plan yOz est un plan de symétrie de ~~$\vec{B}$~~. est un plan de symétrie de la distribution de courant impliquant que $\vec{J_0} \parallel \vec{u_y}$





Comme problème invariant par translation selon Ox, Oy ; on a $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \ldots$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} , \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} , \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

avec $\vec{B} = (B_x(z), B_y(z), B_z(z))$

donc $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ sont nulles (invariant par translation en x, y)

on a donc $J_z(z) = 0 \, \vec{u_z}$ pas de composante $\vec{J_z}$ pour le courant.

$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0 \right)$

puis comme $\vec{B}$ est selon $\vec{u_x}$ et $\vec{B} \perp \vec{J} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{J} = (0, J, 0)$ et pas de composante selon $\vec{u_x}$ car $\vec{B} \perp \vec{J}$ par définition

b) Montrer $B(z,t)$ dans le milieu.
$E(z,t)$

Milieu = casserolle $\equiv z>0$.

- Invariance par translation $Ox, Oy \Rightarrow B, E$ ne dependent pas de x, y

$\Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ dependent uniquement de z.

- $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont induits par $\vec{J}$ / $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Ainsi $\vec{B} \perp \vec{J}$ et $\vec{E} \perp \vec{B}$

$\vec{J} = j\vec{u_y} \Rightarrow \vec{B} = B\vec{u_x}$ (et pas $B_z(t)$ varavant)

et $\vec{E}, \vec{B} \perp$ direction de propagation $\vec{u_z} \Rightarrow \vec{E}$ soit $\vec{u_y}$

$\Rightarrow \vec{B} = B(z,t)\vec{u_x}$
$\vec{E} = E(z,t)\vec{u_y}$

$\boxed{\begin{array}{c}\vec{J} \parallel \vec{u_y} \\ \vec{B} \parallel \vec{u_x} \\ \vec{E} \parallel \vec{u_y}\end{array}}$

② En régime permanent $B(z,t)$, $E(z,t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps de pulsation ω.

$\vec{B}_{ext} = B_1 e^{-i\omega t}\vec{u_x}$ / $B(z,t) = f(z) e^{-i\omega t}$

$E(z,t) = g(z) e^{-i\omega t}$

/ $f(z), g(z)$ sont des fonctions complexes de la variable z qu'on cherche à calculer.

a) Eq. Maxwell + loi d'Ohm.
Conducteur quasi-stationnaire $\Rightarrow \rho = 0 \quad \vec{J}_D = 0$
Montrer que 2 éq. de Maxwell sont automatiquement verifiées

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon = 0$ car $\rho = 0$.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

~~$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{J}$ + $\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r \frac{\partial E}{\partial t}$~~

$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; ~~$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\mu_r \vec{J}_{libre} + \mu_0\mu_r \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu \vec{J}_{libre} + \mu \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \mu\vec{J}_{libre} + \mu\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} + \mu\frac{\partial P}{\partial t}$~~

$\parallel$

$\vec{\nabla}\wedge\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)$

$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0(\vec{J}_{libre}) + \mu_0\underbrace{\vec{\nabla}\wedge\vec{M}}_{\substack{0 \\ \text{pas de magnetisation}}} + \mu_0\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\vec{J}_D \to 0$ quasi-stationnaire $\quad \mu_0\underbrace{\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}}_{J_D} + \mu_0\underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{J_P}$

$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{J}$

$\vec{J} = \gamma\vec{E}$

i) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ et $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (iv) Ces équations traduisent uniquement les symétries et invariances du problème et sont automatiquement vérifiés

(iii) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$

et (ii) $\vec{E} = E_y(z)\,\vec{u_y}$, $\vec{B} = B_x(z)\,\vec{u_x}$

b) Eq. diff. satisfaite par $f(z)$.

il nous restent les autres équ. de Maxwell $\Rightarrow$

a) $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$ sachant $\vec{E} = E(z,t)\,\vec{u_y}$

$E_x = 0$, $E_z = 0$

$= \left(-\frac{\partial E_y(z)}{\partial z}, 0, 0\right) = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial E_y(z)}{\partial z}\,\vec{u_x} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial t}\,\vec{u_x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial z} = +\frac{\partial B_x}{\partial t}}$ (1)

sachant $\vec{B} = B(z,t)\,\vec{u_x}$

b) $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\mu_r\,\vec{J} = \mu_0\mu_r\,\gamma\,\vec{E}$

$\begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, +\frac{\partial B}{\partial z}, 0\right) = \mu_0\mu_r\gamma\,(0, E_y(z), 0) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial B}{\partial z} = \mu_0\mu_r\gamma E_y}$ (2)

On sait $B(z,t) = f(z)\,e^{-i\omega t}$

$E(z,t) = g(z)\,e^{-i\omega t}$

on a (2) $\frac{\partial B}{\partial z} = f'(z)\,e^{-i\omega t} = \mu_0\mu_r\gamma\,E_y = \mu_0\mu_r\gamma\,g(z)\,e^{-i\omega t} \longrightarrow \boxed{f'(z) = \mu_0\mu_r\gamma\,g(z)}$

de la même façon (1) $\frac{\partial E}{\partial z} = g'(z)\,e^{-i\omega t} = f(z)\cdot(-i\omega)\,e^{-i\omega t} \longrightarrow \boxed{g'(z) = -i\omega f(z)}$

$\frac{\partial E_y}{\partial z} = +\frac{\partial B_x}{\partial t}$

à partir $\begin{cases} f'(z) = \mu_0\mu_r\gamma\,g(z) \\ g'(z) = -i\omega f(z) \end{cases} \longrightarrow f''(z) = \mu_0\mu_r\gamma\,g'(z)$

on a $f''(z) + \mu_0\mu_r\gamma\,[i\omega f(z)] = 0$

$$\boxed{f''(z) + i\omega\mu_0\mu_r\gamma\,f(z) = 0}$$

3. (a) On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \mu_r \gamma \cdot \omega}}$

Calculer $f(z)$ en fonction de B_1, δ, μ_r en tenant compte de sa valeur en $z=0$ et sachant que B ne peut pas devenir infini dans le milieu.

On a $f''(z) + i\omega\mu_0\mu_r\gamma\, f(z) = 0$

avec $\delta = \sqrt{2/\mu_0\mu_r \gamma\omega}$

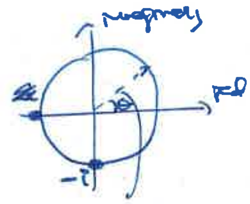
on a $f''(z) + i\dfrac{2}{\delta^2} f(z) = 0$

$\to a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow ar^2 + br + c = 0$; $r = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$

$\Rightarrow x = \alpha e^{r_+(x)} + \beta e^{r_-(x)}$

On a vu que les solutions de $f(z)$ sont de la forme :

$f(z) = A_z e^{r_+ \cdot z} + B_z e^{r_- \cdot z}$ avec $r_\pm = \pm\sqrt{\dfrac{-2i}{\delta^2}}$ (venant de $r^2 + \dfrac{2i}{\delta^2} = 0$)



on a $r_\pm = \pm\sqrt{\dfrac{-2i \cdot i}{\delta^2 \cdot i}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\delta} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{i}} =$

$i^2 = -1$; $i = e^{i\pi/2}$

$\sqrt{\dfrac{1}{i}} = \sqrt{\dfrac{i}{ii}} = \sqrt{-i}$

$-1 = 1 e^{i\pi 3/2}$

$z = a + bi = |z| e^{i\theta}$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z| e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$

$= \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\delta}\sqrt{-i} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\delta}\sqrt{1\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right]} =$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

$= \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\delta}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right] =$

$= \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\delta}\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] = \pm\dfrac{-1+i}{\delta}$; $\dfrac{-1+i}{\delta}$; $\dfrac{1-i}{\delta}$

on a $f(z) = A_z e^{\frac{-1+i}{\delta}\cdot z} + B_z e^{\frac{1-i}{\delta}\cdot z}$

on sait $B(z \to \infty)$ doit être fini $\Rightarrow$

$B_z e^{(1-i)z/\delta} = B_z e^{z/\delta} \cdot e^{-iz/\delta} \xrightarrow[z\to\infty]{} \text{fini} \Rightarrow B_z = 0$

$\Rightarrow f(z) = A_z e^{(-1+i)z/\delta}$

pour determiner A_z ; on regarde conditions de passage en $z=0$

Dans notre cas :

$$\vec{H}_{casserole} - \vec{H}_{plaque} = \vec{j_s} \wedge \underset{\text{plaque} \to \text{casserole}}{\vec{u_z}}$$

$\vec{J_s} = \vec{0}$ (pas de courant de surface)

$\Rightarrow \vec{H}_{casserole} = \vec{H}_{plaque}$ / $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

on a $\underset{(\text{interieur})}{H_{casserole}} = \left.\frac{B_{casserole}}{\mu_0 \cdot \mu_r}\right|_{z=0^+} = \left.\frac{f(z)\, e^{-i\omega t}}{\mu_0 \mu_r}\right|_{z=0^+}$

$$\underset{(\text{vide})}{H_{plaque}} = \left.\frac{B_1 \cdot e^{-i\omega t}}{\mu_0}\right|_{z=0^-}$$

on a : $\left.\frac{A_z\, e^{(-1+i)z/\delta}}{\mu_0 \mu_r}\right|_{z=0^+} e^{-i\omega t} = \left.\frac{B_1 \cdot e^{-i\omega t}}{\mu_0}\right|_{z=0^-}$

$$\frac{A_z}{\mu_r} = B_1 \quad \to \boxed{A_z = \mu_r \cdot B_1}$$

solution :

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = \mu_r \cdot B_1 \cdot e^{(-1+i)z/\delta}}$$

b) Dimension de δ et signification physique ?

D'après $f(z)$ comme $e^{(-1+i)z/\delta}$ $\Rightarrow$ δ doit être une longueur.

δ : correspond à l'épaisseur de la peau = épaisseur où des $\vec{J}$ électriques se développement sont $B_{ext}(\omega, t)$ / variations de $\vec{B}$ ~~durable~~ à l'intérieur du métal au delà de cette distance sont nulles.

Car $\vec{J}$ solénique effet autoinduction dans la casserole

c) Calculer $g(z)$. En déduire $E(z,t)$.

On sait $g'(z) = -i\omega f(z) = -i\omega\, \mu_r \cdot B_1\, e^{(-1+i)\frac{z}{\delta}}$ + on intègre

On a bien $\boxed{g(z) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r \gamma} f'(z)} = \frac{B_1}{\mu_0 \gamma} \frac{(-1+i)}{\delta} e^{(-1+i)z/\delta}$

$= \frac{B_1}{\mu_0 \cdot \gamma \cdot \delta} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{(-1+i)z/\delta}$

$= \frac{\sqrt{2} B_1}{\mu_0 \cdot \gamma \cdot \delta} e^{-z/\delta} \cdot e^{i\left(z/\delta + \frac{3\pi}{4}\right)}$

$-1+i$

$r = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$

$\boxed{E(z,t)} = Re\left(g(z) e^{-i\omega t}\right)$

$= Re\left(\frac{\sqrt{2} B_1}{\mu_0 \gamma \cdot \delta} e^{-z/\delta} e^{i\left(z/\delta + \frac{3\pi}{4} - \omega t\right)}\right) =$

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$$\boxed{= \frac{\sqrt{2} \cdot B_1}{\mu_0\, \gamma \cdot \delta} e^{-z/\delta} \cdot \cos\left(\frac{z}{\delta} + \frac{3\pi}{4} - \omega t\right)}$$

4. Puissance/volume dégagée en chaleur dans le milieu.

$\langle P \rangle_T$ de chauffage par unité de surface

$\frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E} = (\gamma \cdot \vec{E})\vec{E} = \gamma \cdot E^2$

$\frac{dP}{dV} = \frac{2 B_1^2 \cdot \cancel{\gamma}}{\mu_0^2 \gamma^{\cancel{2}} \delta^2} e^{-2z/\delta} \cdot \cos^2\left(\frac{z}{\delta} + \frac{3\pi}{4} - \omega t\right)$

$1/2$

$\langle dP/dV \rangle_T = \cancel{2} \cdot \left(\frac{B_1}{\mu_0 \cdot \delta}\right)^2 \frac{e^{-2z/\delta}}{\gamma} \cancel{\frac{1}{2}}$ puissance moyenne dissipée par effet Joule

$\langle \frac{dP}{dS} \rangle_T$? surface x,y ; colonne de chaleur en z. ⇒ intégrer $\frac{dP}{dV}$ en dz

$\langle \frac{dP}{dS} \rangle_T = \left(\frac{B_1}{\mu_0 \cdot \delta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\gamma} \underbrace{\int_0^\infty e^{-2z/\delta} dz}_{\left.-\frac{\delta}{2} e^{-2z/\delta}\right]_0^\infty = \frac{\delta}{2}} = \frac{B_1^2}{2\mu_0^2 \delta \cdot \gamma}$

5. A.N. On donne pour ~~le~~ Cuivre : $\omega = 1000 \ \frac{rad}{s}$

Cuivre : $\gamma_{cu} = 6 \cdot 10^7 \ \Omega^{-1} m^{-1}$ Acier : $\gamma = 6 \cdot 10^6 \ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$

$\mu r_{cu} = 1$ $\mu r = 1000$

a) δ_{cu}, δ_{acier}. Commentaire

b) si $P_{chauffage} = 10^4 \ W/m^2 \Rightarrow B_1$?

Pourquoi choisir l'acier ?

Donner épaisseur minimale du fond de la casserole.

a) On a : $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \cdot \mu r \ \gamma \cdot \omega}}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

$$\delta_{cu} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 10^7 \cdot 10^3}} = 5 mm$$

$$\delta_{acier} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot 10^3}} = 0,5 mm$$

$\delta_{acier} < \delta_{cu} \Rightarrow$ champ $\propto e^{-z/\delta} \Rightarrow$ si $\delta \nearrow \Rightarrow$ le champ pénètre plus loin ; par contre la puissance $\frac{P^{ext}}{S} \propto \frac{B_1^2}{\delta}$ "vite de la dissipation"

$\Rightarrow$ donc si $\delta \searrow \Rightarrow$ "plus de puissance de chauffe".
de chaleur sur moins de longueur.

$\Rightarrow$ Pour maximiser le chauffage, on doit avoir un δ faible dans la zone $\Rightarrow$ le champ pénètre moins mais reste plus intense $\Rightarrow$ préférable l'acier.

b) On a $\langle \frac{d\mathcal{P}}{dS} \rangle_T = \dfrac{B_1^2}{2\mu_0^2 \gamma \cdot \delta} \Rightarrow B_1^2 = 2 \langle \frac{d\mathcal{P}}{dS} \rangle_T \cdot \gamma \cdot \delta \ \mu_0^2$

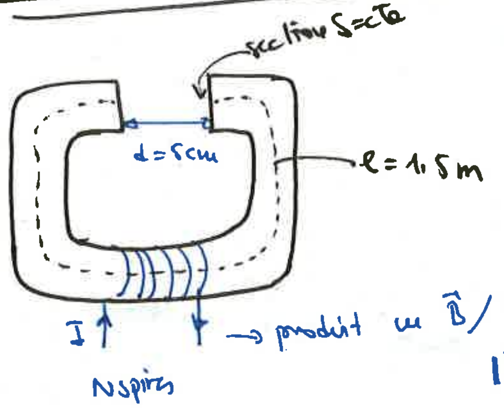
$$B_1^{cuivre} = \mu_0 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 100 mT$$

$$B_1^{acier} = \mu_0 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 10 mT$$

$B_1^{acier} < B_1^{cuivre}$ + $\delta_{acier} < \delta_{cuivre}$ $\Rightarrow$ casseroles en acier sont plus avantageuses.

épaisseur casserole $\geqslant \delta_{cu}$

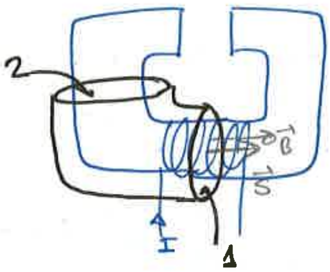
2. L'électro-aimant



$\mu_r\, fer = 4000$

→ produit un $\vec{B}$ / $\vec{B} \parallel$ ligne pointillée
$\|\vec{B}\| = B_1$ est cte sur la section droite

① Montrer que B_1 = cte dans tout le fer. Calculer $H_1 = \|\vec{H}\|$ en régime linéaire.



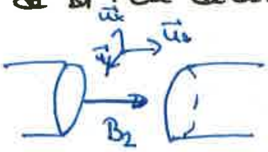
$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ conservation du flux ; $\vec{B} \parallel \vec{S}$ dans positions 1 et 2

$B_1(1)\cdot S_1 = B_1(2)\cdot S_2$ comme S = cte ⇒ $S_1 = S_2$
position 1 — position 2

$\Rightarrow B_1(1) = B_1(2) = B_1 \Rightarrow \boxed{B_1 = cte}$

$$\boxed{\|\vec{H}\| = H_1 = \frac{B_1}{\mu_r \cdot \mu_0}}$$

② On admet que les lignes de champ dans l'entrefer sont ⊥ aux faces. Montrer que le champ B_2 dans l'entrefer est uniforme. Calculer B_2 en fonction de B_1. En déduire H_2 dans l'entrefer.



$B_2 \perp$ section ⇒ $\vec{B_2} \parallel \vec{n}_{section}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{B_2} \parallel \vec{u_z} \\ B_2 = B_2(x,y,z)\end{array}\right\} \vec{B_2} = B_{2z}(x,y,z)\,\vec{u_z}$

on sait $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ $\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\vec{B_2} = \underbrace{\frac{\partial B_{2,x}}{\partial x}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial B_{2,y}}{\partial y}}_{0} + \frac{\partial B_{2,z}}{\partial z} = 0$ $\Big\}$ $\frac{\partial B_{2z}}{\partial z} = 0$

$B_2 = (0, 0, B_{z_2})$

$\Rightarrow B_2 = B_2(x,y)$
et pas de z.
(car $\nabla\cdot\vec{B} = 0$)

on sait B_1 = cte dans le fer et il doit avoir continuité de la composante normale de $\vec{B}$ à l'interface.

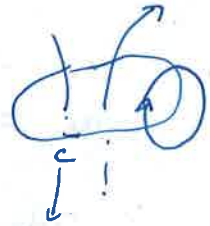
$\Rightarrow \vec{B_1}\cdot\vec{u_z} = B_{1,normal} = B_{2,normal}$

Cela mène $\vec{B_2} = (0,0,B_{2,z}) = B_{2,z}(x,y)\vec{u_z} = B_1\vec{u_z}$ $\Rightarrow$ $B_{2,z} = c^{te}$ $\Rightarrow$ uniforme

On sait $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$; dans l'entrefer $\vec{H_2} = \underbrace{\frac{\vec{B_2}}{\mu_0}}_{\text{car vide}} = \frac{\vec{B_1}}{\mu_0}$. $\boxed{\vec{H_2} = \frac{\vec{B_1}}{\mu_0}}$

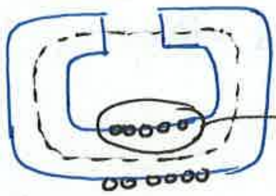
3. À l'aide du théorème d'Ampère,
Calculer H_1, H_2, B_1 et B_2 en fonction de μ_0, μ_r, l, d et I.
A.N. $B_2 = 1T$; $I = 100A$. Déterminer N.

Théorème d'Ampère $\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = \sum I_{\text{enlacés}}}$



Ici : — circuit C : pointillés
$\text{distance}_C = l + d$

$\sum I_{\text{enlacés}} = N\cdot I$



$\cancel{\oint_C H_1 \cdot l}$ $\boxed{\oint_C \vec{H}\vec{dl} = H_1\cdot l + H_2\cdot d = N\cdot I}$

On a : $H_2 = \frac{B_1}{\mu_0}$, $H_1 = \frac{B_1}{\mu_0\cdot\mu_r}$ $\Rightarrow$ $\frac{B_1}{\mu_0\mu_r}l + \frac{B_1}{\mu_0}\cdot d = N\cdot I$

$B_1\left\{\frac{l}{\mu_0\cdot\mu_r} + \frac{d}{\mu_0}\right\} = N\cdot I = B_1\left\{\frac{l+\mu_r d}{\mu_0\mu_r}\right\} = \frac{B_1}{\mu_0}\left\{\frac{l}{\mu_r}+d\right\}$

$$B_1 = \frac{\mu_0\cdot N\cdot I}{l/\mu_r + d} = \frac{\mu_0\cdot\mu_r\cdot N\cdot I}{l+\mu_r\cdot d}$$

$$H_2 = \frac{\mu_r\cdot N\cdot I}{l+\mu_r\cdot d}$$

$$H_1 = \frac{N\cdot I}{l+\mu_r\cdot d}$$

A.N. $B_2 = 1T$
$I = 100A$
$l = 15cm$
$d = 5cm$
$\mu_r = 4000$

On a $\vec{B_2} = B_1\cdot\vec{u_z} = \frac{\mu_0\cdot\mu_r\cdot N\cdot I}{l+\mu_r\cdot d}$

$$N = \frac{(l+\mu_r d)B_2}{\mu_0\cdot\mu_r\cdot I} = \frac{(15 + 4000.5.10^{-2}).1}{4\pi10^{-7}.4000.100} = \underline{400 \text{ spires}}$$

8.5

4 Refaire le calcul de B_2 quand le fer est saturé: $M_s = 1{,}2\cdot 10^6$ Am^{-1}

Quel champ peut-on obtenir dans l'entrefer avec le courant maximum de 180 A ?

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0(\vec{J}_{ext} + \vec{\nabla}\times\vec{M})$$

$$\vec{\nabla}\wedge\underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)}_{=\vec{H}} = \mu_0\vec{J}_{ext}$$

si $\vec{M} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}}$

si fer aimanté $\Rightarrow B_1 = \mu_0(H_1 + M_s) \neq \mu\cdot H_1$ (non aimanté)

B_2 (entrefer) $= B_1 = \mu_0(H_1 + M_s)$.

on refait le calcul en utilisant théorème d'Ampère:

$\oint H\, dl = \cancel{\mu_0}\cdot I_{enc}$.

$$H_1\cdot \ell + H_2\cdot d = N\cdot I$$

$$H_1\cdot \ell + \frac{B_2}{\mu_0}\cdot d = NI$$

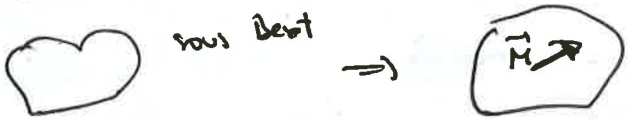
$$H_1\cdot \ell + (H_1 + M_s)\, d = NI \;;\quad H_1(\ell + d) + M_s\cdot d = NI$$

$$H_1 = \frac{NI - M_s\cdot d}{\ell + d}$$

$$B_2 = B_1 = \mu_0(H_1 + M_s) = \frac{NI + M_s\ell}{\ell + d} = \ldots = \underline{\underline{1{,}56\,T}}$$

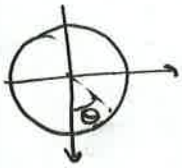
③ Feuille TD n°6

Aimant permanent



et $\vec{M}$ conservée même si $\vec{B}_{ext} \to \vec{0}$

Ici : cylindre creux d'axe $\vec{u_z}$, de rayon intérieur a et extérieur b, de longueur très grande (du point de vue des symétries et invariances = ∞) et présentant l'aimantation suivante (on utilise les coordonnées cylindriques usuelles) :



$$\vec{M} = M_0 \left(\cos\Theta\, \vec{u_r} + \sin\Theta\, \vec{u_\theta}\right) \quad \text{où } M_0 = cte$$

Par ailleurs, on trouve qu'un cylindre creux d'épaisseur négligeable, portant des courants surfaciques $\vec{J_s} = j_s \cdot \sin\Theta\, \vec{u_z}$, crée un champ $\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot j_s}{2}\, \vec{u_x}$ à l'intérieur du cylindre et un champ nul à l'extérieur.

1. Étude de l'aimant permanent

a) Déterminer la distribution totale de courant du système
Nature de ces courants.

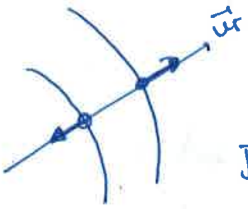
b) $\vec{B}$ intérieur cylindre de rayon a : calculer et exprimer en fonction de μ_0, M_0, a et b.

si $b - a \ll a$ et aussi ($\Rightarrow b-a \ll b$) $\Rightarrow$ épaisseur négligeable $\Rightarrow \exists\ \vec{J_s} \propto \vec{u_z}$

- $\vec{J}_{libre}$ ∄ $\Rightarrow \vec{J}_{libre} = \vec{0}$
- $\vec{J}_{displacement} \propto \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$
- $\vec{P}$ polarisation $= 0$, car $\vec{\nabla} \vec{P} = 0$ et $\vec{J}_{polarisation} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ généré par le mvt des charges $\underline{= 0}$.
- $\vec{J}_{mag} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ (en 3D)
  $\vec{K}_{mag} = \vec{J}_{s,mag} = \vec{M}(\vec{r}) \wedge \vec{n}(\vec{r})$
  ⇓
  on calcule les possibles $\vec{J}_{mag}$ et $\vec{K}_{mag}$

$$\vec{J}_{mag} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge M_0(\cos\Theta, \sin\Theta, 0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{u_\rho} & \vec{u_\theta} & \vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_0\cos\Theta & M_0\sin\Theta & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, +\frac{1}{\rho} M_0 \sin\Theta\right)$$



$$\vec{J}_{s,mag} = \vec{M} \wedge \vec{n}(\vec{r_s})$$

$$\vec{M} = M_0 (\cos\theta\, \vec{u_r} + \sin\theta\, \vec{u_\theta})$$

$$\vec{J}_{s,mag}(r=a) = \vec{M} \wedge (-\vec{u_r}) = M_0 \cdot \sin\theta\, (\vec{u_\theta} \wedge -\vec{u_r}) = M_0 \sin\theta\, \vec{u_z}$$

$$\vec{J}_{s,mag}(r=b) = \vec{M} \wedge (\vec{u_r}) = \underline{-M_0 \cdot \sin\theta\, \vec{u_z}}$$

$$\vec{J}_{mag} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial M_z}{\partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial z} \,,\; \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \,,\; \frac{1}{r}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r}(r M_\theta) - \frac{\partial M_r}{\partial \theta}\right] \right)$$

avec $\vec{M} = M_r \vec{u_r} + M_\theta \vec{u_\theta}$; $M_r = M_0 \cdot \cos\theta$

$M_\theta = M_0 \sin\theta$

$M_z = 0$

$$\vec{J}_{mag} = \left(0,\, 0,\, \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r M_0 \sin\theta) - \frac{\partial (M_0 \cos\theta)}{\partial \theta} \right) =$$

$$= \left(0, 0, \frac{M_0 \sin\theta}{r} + \frac{M_0 \sin\theta}{r} \right) = \frac{2 M_0 \sin\theta}{r} \vec{u_z}$$

b) $\vec{B}_{r<a}$ du cylindre infini.

$$\vec{B}_{int} = \vec{B}(\vec{J}_{s,r=a}) + \vec{B}(\vec{J}_{s,r=b}) + \vec{B}(\vec{j}, a<r<b)$$

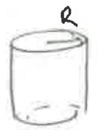
: 3 contributions

j_{mag} (volume) , $\underbrace{\vec{J}_{s}(r=a)_{mag} , \vec{J}_{s}(r=b)_{mag}}_{surface}$

Les courants surfaciques $\vec{J}_s = j_s \cdot \sin\theta\, \vec{u_z} \longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u_x}$

$$\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 J_{s,a}}{2}\vec{u_x} + \frac{\mu_0 J_{s,b}}{2}\vec{u_x} + \int_a^b \vec{B}(j \text{ volumique } a<r<b) \text{ pour } r<a$$

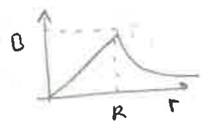
$$= \frac{\mu_0}{2}\Big\{ \underbrace{M_0 \sin\theta\, \vec{u_x} - M_0 \sin\theta\, \vec{u_x}}_{0} \Big\} + \vec{B}(j_{mag}\ a<r<b) \text{ pour } r<a$$



si $r<R$ $\quad \oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{en}$

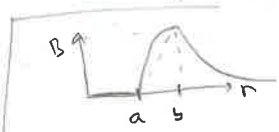
$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 j$

$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{r}{R^2}$



et $I_0 = \pi r^2 \cdot j_{mag}$

$j_{mag} = \frac{2 M_0}{r} \sin\theta\, \vec{u_z}$



$\int \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I$

au lieu

$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

$r<a \Rightarrow H_{r<a} = 0$

$a<r<b \Rightarrow 2\pi r \cdot H_{a<r<b} = i\pi(r^2 - a^2)$

$$H_{a<r<b} = \frac{i}{2}\left(r - \frac{a^2}{r}\right) = \frac{I}{2\pi(b^2 - a^2)}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

$r>b \Rightarrow H_{r>b}$

$2\pi r \cdot H_{r>b} = i\pi(b^2 - a^2)$

$$H_{r>b} = \frac{i}{2r}(b^2 - a^2) = \frac{I}{2\pi r}$$

avec i = cte et selon $\vec{u_z}$

pour le cylindre creux de $\vec{J}_{mag}$ volumique, on considère

$$j_{mag} = \int_a^b j_{s,mag}^{*} dr \quad \text{et on utilise} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot j_s}{2} \vec{u_x}$$

on a $j_{mag} = \dfrac{2M_0 \cdot \sin\Theta}{r} \vec{u_z}$ avec $j_{s,mag}^{*} = j_{s,mag}^{*} \cdot \sin\Theta \cdot \vec{u_z}$

donc $j_{s,mag}^{*} = \dfrac{2M_0}{r}$

on a ainsi $B_{a<r<b} = \displaystyle\int_a^b \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{2M_0}{r} \cdot dr \ \vec{u_x} = \mu_0 \cdot M_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \vec{u_x}$

$$\boxed{\vec{B_{int}} = \mu_0 \cdot M_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \vec{u_x}}$$