TD4 : Magnétostatique

4.1 Introduction

En magnétostatique, les équations locales deviennent

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

soit, dans leurs versions intégrales

$$\iint_S \vec{B}.\vec{dS} = 0$$
$$\oint_C \vec{B}.\vec{d\ell} = \mu_0 I_C (\text{courant enlacé})$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est lié au champ magnétique par la relation $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$, le vecteur potentiel étant, par ailleurs, à flux conservatif $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ (jauge de Coulomb). On déduit ainsi l'équation vectorielle de Poisson $\vec{\Delta}\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ soit

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau$$
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I\vec{d\ell} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

4.2 Solénoïde fini

Soit un solénoïde de longueur L, constitué de N spires jointives identiques de rayon R parcourues par un courant I. On note n le nombre de spires par unité de longueur. L'origine O est choisie au centre de la bobine et l'axe de la bobine est Oz.

1. Quelle est la direction du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'axe de la bobine ?

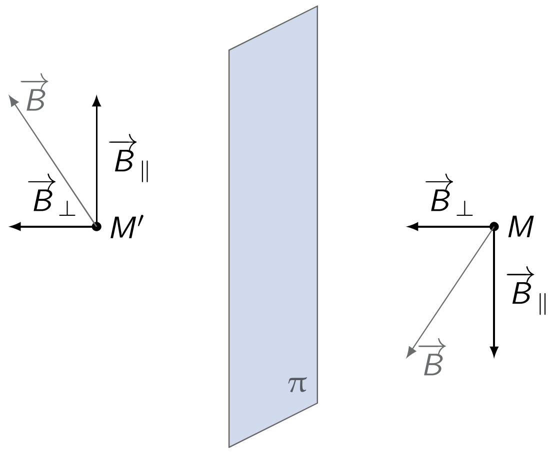
Les plans (xMz) et (yMz) sont tous deux plans d'antisymétrie de la distribution de courant : le champ magnétique pour tout point M appartenant à l'axe Oz est compris dans chacun de ces plans soit $\vec{B}(M \in Oz) \parallel \vec{u}_z$.

2. On se place cette fois en un point quelconque, qui ne se trouve pas nécessairement sur l'axe Oz. De par les symétries, quel système de coordonnées serait il judicieux d'employer ? En utilisant ce système, quelles sont les composantes non nulles de $\vec{B}$? De quelles variables dépendent ces composantes ?

En raison des symétries du problème, le système de coordonnées cylindriques est le mieux adapté à la description du problème. En particulier, le système est invariant par rotation d'angle θ et le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie : $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z$.

3. Montrer que $B_r(r,z)$ est une fonction impaire de z, alors que $B_z(r,z)$ est une fonction paire de z.

Symétrie du champ magnétique

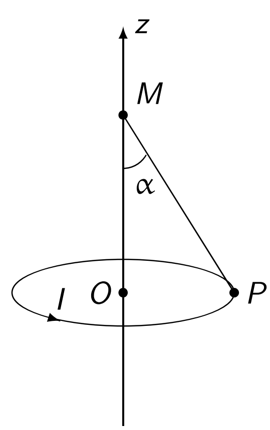


Le plan (xOy) est plan de symétrie de la distribution de courant impliquant

$$B_z(r,z) = B_z(r,-z)$$
$$B_r(r,z) = -B_r(r,-z)$$

4. Calculer le champ en tout point de l'axe Oz. Vérifier la parité prévue par la question 3. On suppose $L \gg R$, montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ au point O est le double de celui du point situé à l'extrémité, c'est-à-dire en $z = L/2$.

Calcul du champ magnétique généré par une boucle de courant



Loi de Biot & Savart

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{d\ell} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$\text{où } \begin{cases} \vec{d\ell} &= Rd\theta\, \vec{u}_\theta \\ \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = -R\vec{u}_r + z\vec{u}_z \end{cases}$$

$$\text{soit } \vec{d\ell} \times \overrightarrow{PM} = \begin{vmatrix} 0 \\ Rd\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ z \end{vmatrix} = Rd\theta z \vec{u}_r + R^2 d\theta \vec{u}_z$$

En raison des symétries invoquées à la question 1), le champ magnétique est colinéaire au vecteur $\vec{u}_z$ d'où

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{PM^3} \int_0^{2\pi} d\theta \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{PM^3} \vec{u}_z \text{ avec } PM = \frac{R}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\cancel{R^2}}{\cancel{R^3}} \sin^3\alpha\, \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\alpha\, \vec{u}_z \end{aligned}$$

Pour calculer le champ magnétique généré par un solénoïde fini, on superpose les champs magnétiques générés par les N spires. En considérant une épaisseur dz' contenant donc $n \times dz = \frac{N}{L} \times dz'$ spires, le champ magnétique ainsi généré a pour expression

$$\begin{aligned} \vec{dB}_{\text{solénoïde}}(M) &= \vec{B}_{\text{spire}}(M) \times n \times dz' \\ \vec{B}_{\text{solénoïde}}(M) &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 n I}{2R} \sin^3\alpha dz' \vec{u}_z \end{aligned}$$

La coordonnée z est reliée à l'angle α par l'expression $\tan\alpha = \frac{R}{z-z'}$ d'où $\frac{dz'}{d\alpha} = \frac{R}{\sin^2\alpha}$ [f].

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{solénoïde}}(M) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 n I}{2\cancel{R}} \sin^{\cancel{3}}\alpha \frac{\cancel{R}}{\cancel{\sin^2\alpha}} d\alpha \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} \left[-\cos\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

[f] la dérivée de $\frac{1}{\tan\alpha}$ est égale à

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)' &= \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)' \\ &= -\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= -\left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = -\frac{1}{\sin^2\alpha} \end{aligned}$$

Sachant que

$$\cos\alpha_1 = \frac{z+L/2}{\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}} = f(z)$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}} = -f(-z)$$

le champ magnétique sur l'axe du solénoïde devient

$$\vec{B}_{\text{solénoïde}}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(f(z)+f(-z)\right)\ \vec{u}_z$$

confirmant la parité de B_z avec $\vec{B}(z) = \vec{B}(-z)$.

- en $z=0$,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(O) &= \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\frac{L/2}{\sqrt{R^2+L^2/4}} + \frac{L/2}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\right)\ \vec{u}_z\\
&= \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\right)\ \vec{u}_z \text{ avec } L \gg R\\
&= \frac{\mu_0 n I L}{2}\left(\frac{1}{L/2\times(1+4R^2/L^2)^{1/2}}\right)\ \vec{u}_z\\
&\simeq \frac{\mu_0 n I \cancel{L}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{L}}\ \vec{u}_z + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{L^2}\right)\\
&\simeq \mu_0 n I\ \vec{u}_z
\end{aligned}$$

- en $z = L/2$,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(z=L/2) &= \frac{\mu_0 n I}{2}\times\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}\ \vec{u}_z\\
&\simeq \frac{\mu_0 n I}{2}\times\frac{\cancel{L}}{\cancel{L}}\ \vec{u}_z = \frac{\vec{B}(O)}{2}
\end{aligned}$$

5. On veut maintenant étudier le champ magnétique $\vec{B}$ au voisinage du point O, c'est-à-dire lorsque z et r sont tous les deux très inférieurs aux deux grandeurs L et R. Établir les approximations suivantes :

$$B_z(r,z) = B_z(0,0) + ar + br^2 + cz^2$$
$$B_r(r,z) = drz$$

Calculer les constantes a, b et d en fonction de c. Comment peut-on calculer la constante c ? Exprimer c en fonction N, L et R. En déduire l'expression approximative de $\vec{B}$ au voisinage du point O.

Champ magnétique au voisinage de O. On réalise un dévelopement limité à l'ordre 2 de B_z et B_r soit

$$
\begin{aligned}
B_z(r \to 0, z \to 0) \quad \simeq B_z(0,0) \quad & + \left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{r=0,z=0} r \quad + \left.\frac{\partial B_z}{\partial z}\right|_{r=0,z=0} z \\
& + \left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right|_{r=0,z=0} \frac{r^2}{2!} \quad + \left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\right|_{r=0,z=0} \frac{z^2}{2!} \\
& + \left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial r \partial z}\right|_{r=0,z=0} rz \quad + \mathcal{O}(r^2, z^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_z(r,z) &\simeq B_z(0,0) + \alpha_r\, r + \beta_r\, r^2 + \gamma_z\, z + \delta_z\, z^2 + \eta_{rz}\, rz + \mathcal{O}(r^2, z^2) \\
B_r(r,z) &\simeq B_r(0,0) + \alpha'_r\, r + \beta'_r\, r^2 + \gamma'_z\, z + \delta'_z\, z^2 + \eta'_{rz}\, rz + \mathcal{O}(r^2, z^2)
\end{aligned}
$$

- Calcul de B_r :

  $B_r(0,0) = 0$ et $B_r(r,z) = -B_r(r,-z)$ *i.e.* une fonction impaire en z implique nécessairement que $\delta'_z = 0$. Par ailleurs, la parité de la fonction conduit à l'équation suivante

$$
\begin{aligned}
\alpha'_r\, r + \beta'_r\, r^2 + \cancel{\gamma'_z\, z} + \cancel{\eta'_{rz}\, rz} &= -\alpha'_r\, r - \beta'_r\, r^2 + \cancel{\gamma'_z\, z} + \cancel{\eta'_{rz}\, rz} \\
\alpha'_r = \beta'_r &= 0
\end{aligned}
$$

  L'expression de B_r se réduit à $\gamma'_z\, z + \eta'_{rz}\, rz$ or $B_r(0,z) = 0$ implique que $\gamma'_z = 0$ d'où

$$B_r(r,z) = \eta'_{rz}\, rz = drz$$

- Calcul de B_z :

  La parité de B_z *i.e.* $B_z(r,z) = B_z(r,-z)$ implique que les termes "impairs" en z, γ_z et η_{rz}, soient nuls. L'expression de B_z se limite à

$$
\begin{aligned}
B_z(r,z) &= B_z(0,0) + \alpha_r\, r + \beta_r\, r^2 + \delta_z\, z^2 \\
&= B_z(0,0) + ar + br^2 + cz^2
\end{aligned}
$$

- Calcul de a, b, d en fonction de c :

  On utilise les équations de Maxwell faisant intervenir le champ magnétique à savoir $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ (au voisinage de O, il n'y a pas de courant ni de variation temporelle d'un champ électrique)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{B} &= 0 \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0 \\
\frac{1}{r} \times 2dzr + 2cz &= 0 \\
d &= -c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} &= \vec{0} \\
\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} &= 0 \\
dr - a - 2br &= 0 \\
a = 0 \text{ et } b &= \frac{d}{2} = -\frac{c}{2}
\end{aligned}
$$

- Calcul de c :

  Pour calculer la constante c, on évalue sa valeur pour $r = 0$ *i.e.* sur l'axe du solénoïde où nous avons établi que $B_z = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(f(z) + f(-z)\right)$ avec $f(z) = \frac{L/2+z}{\sqrt{R^2+(L/2+z)^2}}$. On a donc

$$
B_z(0,z) = B_z(0,0) + cz^2 = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(f(z) + f(-z)\right)
$$

  Sachant que $L \gg z$ et $R \gg r$, il s'agit dès lors de développer l'expression de $f(z)$ au voisinage de zéro. On calcule ainsi

$$
\begin{aligned}
\left(R^2 + (L/2+z)^2\right)^{-1/2} &= \left(R^2 + L^2/4 + Lz + z^2\right)^{-1/2} \\
&= \left(R^2 + L^2/4\right)^{-1/2}\left[1 + \underbrace{\frac{z^2}{R^2+L^2/4} + \frac{Lz}{R^2+L^2/4}}_{\epsilon}\right]^{-1/2}
\end{aligned}
$$

  or

$$
(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)
$$

  on obtient finalement

$$
\left(R^2 + (L/2+z)^2\right)^{-1/2} = \left(R^2 + L^2/4\right)^{-1/2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{Lz+z^2}{R^2+L^2/4} + \frac{3}{8}\left(\frac{Lz+z^2}{R^2+L^2/4}\right)^2\right]
$$

  La fonction $f(z)$ devient au deuxième ordre en z

$$
f(z) \simeq \frac{L/2\left(1+\frac{2z}{L}\right)}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{Lz}{R^2+L^2/4} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2+L^2/4} + \frac{3}{8}\frac{L^2z^2}{(R^2+L^2/4)^2}\right] + \mathcal{O}(z^2)
$$

$$
\begin{aligned}
f(z) \simeq \frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\Bigg[1 - \frac{1}{2}\frac{Lz}{R^2+L^2/4} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2+L^2/4} + \frac{3}{8}\frac{L^2z^2}{(R^2+L^2/4)^2} \\
+\frac{2z}{L} - \frac{z^2}{R^2+L^2/4}\Bigg] + \mathcal{O}(z^2)
\end{aligned}
$$

$$f(z) \simeq \frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[1+\frac{2z}{L}-\frac{1}{2}\frac{Lz}{R^2+L^2/4}-\frac{3}{2}\frac{z^2}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{8}\frac{L^2z^2}{(R^2+L^2/4)^2}\right]+\mathcal{O}(z^2)$$

$$f(-z) \simeq \frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[1-\frac{2z}{L}+\frac{1}{2}\frac{Lz}{R^2+L^2/4}-\frac{3}{2}\frac{z^2}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{8}\frac{L^2z^2}{(R^2+L^2/4)^2}\right]+\mathcal{O}(z^2)$$

$$f(z)+f(-z) \simeq \frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[2-3\frac{z^2}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{4}\frac{L^2z^2}{(R^2+L^2/4)^2}\right]+\mathcal{O}(z^2)$$

Le champ magnétique B_z se réduit à l'expression

$$\begin{aligned} B_z(0,z) &\simeq \frac{\mu_0 n I}{2}\times\frac{L}{2}\times\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[2-\left(\frac{3}{R^2+L^2/4}-\frac{3}{4}\frac{L^2}{(R^2+L^2/4)^2}\right)z^2\right] \\ &\simeq B_z(0,0)+cz^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} B_z(0,0) &= \frac{\mu_0 n I}{2}\times\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2/4}} \\ c &= \frac{\mu_0 n I}{4}\times\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left(-\frac{3}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{4}\frac{L^2}{(R^2+L^2/4)^2}\right) \\ &= \frac{\mu_0 n I}{4}\times\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left(\frac{\cancel{3L^2}-3\times 4\left(R^2+L^2/4\right)}{4\left(R^2+\cancel{L^2/4}\right)^2}\right) \\ &= -B_z(0,0)\times\frac{3R^2}{2\left(R^2+L^2/4\right)^2} \end{aligned}$$

soit finalement

$$\begin{aligned} B_z(r\to 0, z\to 0) &= B_z(0,0)\times\left(1+\frac{3R^2}{4\left(R^2+L^2/4\right)^2}r^2-\frac{3R^2}{2\left(R^2+L^2/4\right)^2}z^2\right) \\ B_r(r\to 0, z\to 0) &= B_z(0,0)\times\frac{3R^2}{2\left(R^2+L^2/4\right)^2}rz \end{aligned}$$

4.3 Supraconducteurs

Effet Meissner dans un supraconducteur

> Dans toute cette partie, on s'intéresse à une boule supraconductrice de centre O et de rayon R placée dans un solénoïde très long et de section circulaire de rayon $a \gg R$, d'axe $z'Oz$, possédant n spires par unité de longueur, et parcouru par un courant stationnaire I, le reste de l'espace étant vide. On pose $B_\infty = \mu_0 n I$.
> On constate expérimentalement que la boule supraconductrice tend à expulser le champ magnétique en créant des courants localisés au voisinage de la surface (effet Meissner). Pour rendre compte de cet effet, on admettra que dans un supracon-