2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

Cet exercice comporte deux parties dont la première vise à démontrer la formule générale donnée par l'équation 1 en section 2.2. La deuxième partie peut être traitée séparément.

On rappelle que pour une fonction scalaire $s(\mathbf{r})$ et deux champ vectoriel $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{w}(\mathbf{r})$:

— $\operatorname{div}(s\mathbf{v}) = \nabla \cdot (s\mathbf{v}) = (\nabla s) \cdot \mathbf{v} + s(\nabla \cdot \mathbf{v})$

— $\operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}$

2.1 Étude générale

2.1.1 Équation bilan d'une grandeur physique extensive

Une grandeur extensive A (telle que la masse ou l'énergie) vérifie les propriétés suivantes :

— elle est localisée : elle peut être décrite par une densité volumique a telle que la quantité de A dans un volume V peut s'écrire $\iiint d^3 r a = A$;

— elle peut être échangée entre différents systèmes séparés par une surface S. Le débit sortant de S associé à ce transfert s'écrit alors $\oiint \mathbf{j_A} \cdot \mathbf{dS}$ où $\mathbf{j_A}$ est la densité de courant associée à A ;

— elle peut être créée dans le volume d'un système. Cette réaction étant décrite par le taux de création par unité de volume et de temps α tel que, dans le volume V, $\frac{\delta A_{creation}}{\delta t} = \iiint_V \alpha d^3 r$.

En faisant le bilan de la grandeur A, démontrer l'équation-bilan locale reliant a, α et $\nabla \cdot \mathbf{j_A}$.

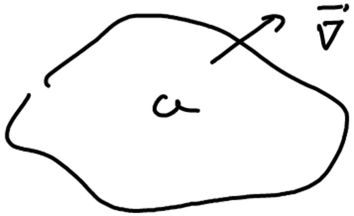
$$\frac{A}{m^3} \qquad \vec{j}_A = a \times \vec{v}$$

$$\underline{\frac{\partial a}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A + \alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint a\, dV = \iiint \alpha\, dV - \oiint \vec{j}_A \cdot \vec{dS}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint a\, dV = \iiint \alpha\, dV - \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A\, dV$$

α = densite volumique crée - densite volumique consommée / unite de tps



$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A$ = ce qui sort - ce qui entre

2.1.2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

On se place maintenant en régime variable quelconque. On utilise les équations de Maxwell dans le vide en présence de charges et de courants décrits par des densités volumiques.

1. **Densité volumique de forces.** On étudie un volume élémentaire $d\tau$ dans lequel existe une densité volumique de charges ρ et une densité volumique de courant $\mathbf{j}$. Calculer la force électromagnétique subie par ce volume $d\tau$. Exprimer la densité volumique de force $\frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mathbf{f}$ en fonction de ρ, $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{f} = \frac{dq}{d\tau} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\underline{\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}}$$

2. **Equation bilan de quantité de mouvement.** A l'aide des équations de Maxwell, mettre l'expression $\mathbf{Y} = \mathbf{f} + \dfrac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})$ sous une forme où n'apparaissent que les champs $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ ainsi que certaines de leurs dérivées spatiales (mais pas leur dérivée temporelle).

$$N = \frac{kg\, m^2}{s^2}$$

$$F = \frac{kg\, m}{s^2}$$

$$\rho = \frac{kg}{s^2 m}$$

$$\vec{Y} = \vec{f} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})}_{\frac{kg}{m^2 s}}$$

$$\uparrow \quad \frac{kg}{m^2 s^2}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{kg\, m}{s}$$

$$\vec{Y} = (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + \left(\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0} - \cancel{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}\right) \wedge \vec{B} + \cancel{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{B}} + \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \vec{E} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$$

$$= \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$$

3. On remarquera que l'expression de $\mathbf{Y}$ comporte deux termes, l'un faisant intervenir uniquement $\mathbf{E}$, et l'autre $\mathbf{B}$ uniquement. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur constant quelconque. $\mathbf{Y}\cdot\mathbf{u}$ comporte donc également deux termes. Développer l'expression $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{E}^2}{2}\mathbf{u}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\right)$ et la comparer avec le terme de $\mathbf{Y}\cdot\mathbf{u}$ contenant $\mathbf{E}$. On utilisera la relation $\mathbf{u}\cdot((\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}) = \mathbf{E}\cdot(\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{E})) = \sum_{ij} E_i u_j \partial_i E_j$ (BONUS : la montrer).

$$\underline{\vec{Y}\cdot\vec{u}\Big|_E = \left[\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\vec{E} - \varepsilon_0\,\vec{E}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\right]\cdot\vec{u}}$$

$$\underline{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{E^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{E}\right)} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot(E^2\vec{u}) - \vec{\nabla}\cdot\left[(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{E}\right]$$

$$= \frac{1}{2}E^2\underbrace{\vec{\nabla}\vec{u}}_{0} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}E^2)\cdot\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{E})(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})(\vec{u}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}(\vec{E}\cdot\vec{E}) - (\vec{u}\cdot\vec{E})(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})(\vec{u}\cdot\vec{E})$$

$$-\left[(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}\right]\cdot\vec{u}$$

$$-\vec{u}\cdot\left[(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}\right]$$

$$-\vec{u}\cdot(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{u}\cdot\left[2\vec{E}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) + 2(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}\right] - (\vec{u}\cdot\vec{E})(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{E})$$

$$= \vec{u}\cdot\left(\vec{E}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\right) + \vec{u}\cdot\cancel{(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}} - (\vec{u}\cdot\vec{E})(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \cancel{\vec{E}\cdot\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{E})}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{E^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{E}\right) = \underline{\vec{u}\cdot\left(\vec{E}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\right) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})(\vec{E}\cdot\vec{u})} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{Y}\cdot\vec{u}\Big|_E$$

$$\underline{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{E^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{E}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{Y}\cdot\vec{u}\Big|_E}$$

4. Sans calcul supplémentaire, justifier que $\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2}\mathbf{u}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}\right)=-\frac{1}{\mu_0}\left((\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}\right)\cdot\mathbf{u}$.

$$\vec{Y}\cdot\vec{u} = \underbrace{\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\vec{E}\cdot\vec{u} - \varepsilon_0\left[\vec{E}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\right]\cdot\vec{u}}_{-\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{E^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{E}\right]} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\left[(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})\wedge\vec{B}\right]\cdot\vec{u}}_{-\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{B^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{B})\vec{B}\right]}$$

5. Montrer alors que l'expressoin complète de $\mathbf{Y}\cdot\mathbf{u}$ peut s'écrire sous la forme de la divergence d'un champ de vecteur.

$$\vec{Y}\cdot\vec{u} = -\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\left[\frac{E^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{E}\right]+\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{B^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{B})\vec{B}\right]\right) = +\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_P$$

$$\vec{j}_P = -\underline{\varepsilon_0\left[\frac{E^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{E}\right]} - \frac{1}{\mu_0}\underline{\left[\frac{B^2}{2}\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{B})\vec{B}\right]}$$

j_P en $\frac{J}{m^3} = \frac{q^{te}\text{ de mvt} \times \text{vitesse}}{m^3}$

6. Comment s'appelle ce champ de vecteur ? → <u>tenseur des contraintes</u>

↳ en $J/m^3 \equiv \left[\frac{q^{te}\text{ de mvt}}{m^3}\right]\times v = \vec{j}_P$

→ courant de densité volumique de q^{te} de courant

7. **Interprétation.** En lien avec la question 2.1.1, déterminer les quantités a, α et $\mathbf{j_A}$ considérées dans cette question.

$$\frac{\partial a}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j_A} + \alpha$$

$$\vec{V} \cdot \vec{u} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} \cdot \vec{u} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})}_{\vec{\pi} = \frac{d\vec{p}}{dz}} \cdot \vec{u} = \vec{V} \cdot \vec{u} - \frac{\partial (\vec{f} \cdot \vec{u})}{dz} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j_\pi} - \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} \cdot \vec{u}$$

$\vec{\pi} = \frac{d\vec{p}}{dz}$: densité volumique de q^{te} de mvt

courant de densite volumique de q^{te} de mvt

densité volumique de q^{te} de mvt crée / consommée par unité de tps

$$[\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}] = [\varepsilon_0 \frac{E^2}{c}] = \frac{\text{Joule}}{m^3 \times \text{vitesse}} = \frac{q^{te} \text{ de mvt}}{m^3} = \text{densité volumique de } q^{te} \text{ de mvt}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{dp}{dt} \times \frac{1}{dz} = \frac{1}{dt} \frac{dp}{dz} = \frac{q^{te} \text{ de mvt}}{\text{volume tps}}$$

$a = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ = densité volumique de q^{té} de mvt

$\vec{j_A}$: tenseur des contraintes = courant de q^{te} de mvt volumique $\left(\frac{kg\, m}{s} \times \frac{1}{m^2} \times \frac{1}{s} \right) = \frac{J}{m^3}$

$\alpha = \frac{df}{dz}$ = création de q^{te} de mvt volumique / tps

8. Montrer alors que $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ peut s'interpréter comme une densité volumique de quantité de mouvement associée au champ électromagnétique.

$$g = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \qquad [g] = \frac{J}{m^3} \times \frac{1}{\text{vitesse}} = \frac{\text{q}^{\text{te}} \text{ de mvt} \times \text{vitesse}}{m^3} \times \frac{1}{\text{vitesse}} = \frac{\text{q}^{\text{te}} \text{ de mvt}}{m^3}$$

$$\propto \varepsilon_0 \frac{E^2}{c}$$

2.2 Application aux ondes électromagnétiques

Le résultat de la partie précédente est résumé par la formule :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \frac{d}{dt}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{j_P} = 0 \tag{1}$$

avec $\mathbf{j_P} = -\epsilon_0 \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2}\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} \right) - \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2}\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \right)$ et $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ définis plus haut pour un vecteur constant $\mathbf{u}$ quelconque.

$$\frac{d}{dt}(\vec{g} \cdot \vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_P - \frac{\partial \vec{f} \cdot \vec{u}}{\partial t}$$

On étudie une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide dans la direction de l'axe Ox. On s'intéresse uniquement à la quantité de mouvement selon Ox. Dans cette partie l'expression *quantité de mouvement* signifiera donc *projection sur Ox de la quantité de mouvement.*

2.2.1 Structure de l'onde

Rappeler l'expression du champ magnétique en fonction du champ électrique pris au même point au même instant.

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$$

2.2.2 Quantité de mouvement

Déterminer en fonction de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{u_x}$ la densité volumique de quantité de mouvement $\mathbf{g}$ ainsi que le vecteur densité de courant $\mathbf{j_P}$ associé. Quel est le lien entre les deux ? Comment peut-on interpréter le résultat ?

$$\vec{g} = \varepsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B}) . \vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0}{c} (\vec{E} \wedge (\vec{u}_x \wedge \vec{E})) . \vec{u}_x$$

$$\vec{g} = \frac{\varepsilon_0}{c} \left(E^2 + (\vec{E} . \vec{u}_x) \vec{E} . \vec{u}_x \right) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}$$

$$\vec{j}_P = - \varepsilon_0 \left(\frac{E^2}{2} \vec{u}_x - \underbrace{(\vec{u}_x . \vec{E})}_{0} \vec{E} \right) - \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} \vec{u}_x - \underbrace{(\vec{u}_x . \vec{B})}_{0} \vec{B} \right)$$

$$\vec{j}_P = - \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} \vec{u}_x - \frac{B^2}{2\mu_0} u_x = \varepsilon_0 E^2 \vec{u}_x$$

$$\vec{j}_P = g \times \vec{c}$$

vitesse de propagation de la q^{te} de mvt

2.2.3 Lien avec l'énergie électromagnétique

Quel est le vecteur densité de courant associé à l'énergie électromagnétique ? Quel lien présente-t-il ici avec $\mathbf{j_P}$? Cela est-il en accord avec l'interprétation de la lumière en termes de photons ?

$$\vec{j}_u = \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = c \, \varepsilon_0 E^2 \vec{u}_x$$

$$= c \, j_P$$

$$\vec{j}_u = c \, \vec{j}_P$$

pour les photons $E = pc$

2.2.4 Pression de radiation, voile solaire

Au voisinage de l'orbite terrestre, la puissance du rayonnement solaire est de l'ordre de 1550 W.m^{-2}. En déduire la pression exercée sur une surface réfléchissante plane orientée vers le Soleil.

Un satellite déploie une voile solaire dont la masse surfacique est de 10g.m^{-2}. Calculer le rapport entre la force de pression de radiation et l'attraction gravitationnelle qu'exerce le Soleil sur la voile. La navigation à voile solaire est-elle réaliste ? On donne : G =6,67. 10^{-11} N.m^2.kg^{-2} ; $M_{soleil} = 1,99.10^{30}$ kg ; $d_{terre-soleil} = 1,5.10^{11}$m.

2.2.4.1) Les deux valeurs j_p^+ et j_p^- sont égales à Epsilon$_0$ E² ux
jp+ amène des photons de QDM positive alors que
jp- enlève des photons de QDM négative

2.2.4.2) En régime périodique la valeur moyenne d'une dérivée est nulle

2.2.4.3) on intègre l'équation (1) su sujet dans le temps sur une période et dans l'espace sur le volume proposé.
Le flux de j_P sur la surface de gauche vaut - 2 Epsilon$_0$ E² S
Le flux à droite vaut zéro car il n'y a pas de champ transmis.
Le flux sur les côtés tend vers zéro lorsque h tend vers zéro.

On obtient donc que la force par unité de surface vaut
P= Epsilon$_0$ E_0^2 soit :

$$\underline{P^{(Pa)} = \frac{\mathcal{P}}{c}}$$

avec P(rond) la puissance lumineuse = <R>

$$P_{grav.} = \frac{dF}{dS} = G\,\frac{m\,M_S}{d^2} = 6,67.10^{-11} \times \frac{10.10^{-3} \times 1,99.10^{30}}{(1,5.10^{11})^2} = \underline{5,89.10^{-5}\ \text{N}}$$

$$\frac{P^{Pa}}{P_{grav}} = \frac{\mathcal{P}}{c\,P_{grav}} = \frac{1\,550}{3.10^8 \times 5,89.10^{-5}} = 0,087 = \underline{8,7\,\%}$$

<u>non négligeable mais peu réaliste</u>