Feuille de TD n$^{\underline{o}}$ 12: *Radiation (II)*
Rayonnement d'une antenne

On considère une portion de conducteur rectiligne MN de longueur l, dirigée selon l'axe Oz. Ce conducteur est parcouru par un courant $I = I_0 \cos(\omega t)$.

1. On suppose qu'à l'extérieur du tronçon MN, la densité de courant est nulle. En utilisant la fonction de Heaviside (voir à la fin de l'énoncé) et la distribution de Dirac, donner l'expression de la densité de courant $\vec{j}$ dans tout l'espace.

2. En utilisant la conservation de la charge, montrer que ce système peut être assimilé à un dipôle oscillant constitué de deux charges opposées placées en M et N et dont la valeur varie de façon sinusoïdale ($\pm q\ \sin \omega\, t$).

3. En déduire la densité de courant complexe $\vec{j}(\vec{r},\, t)$ dans tout l'espace, ainsi que la densité de charge complexe $\rho(\vec{r},\, t)$.

4. On cherche tout d'abord à calculer à l'instant t les potentiels en un point P de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).

   (a) En utilisant l'expression des potentiels retardés, exprimer le potentiel scalaire V (en notation complexe) au point P en fonction des distances $r_1 = MP$ et $r_2 = NP$.

   (b) On note λ la longueur d'onde du champ électromagnétique rayonné par le dipôle. On suppose $r \gg \lambda \gg l$ (approximations dipolaire et champ lointain). Montrer que le potentiel scalaire complexe peut s'écrire en ne gardant que le terme principal du DL en l/λ et en l/r :

   $$V \;=\; -\frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{i\,\omega}{c\,r}\,p\,\cos(\theta)$$

   en fonction du moment dipolaire complexe retardé $p = i\,q\,l\,\exp(-\,i\,\omega\,(t - r/c))$.

   (c) Montrer que la seule composante non nulle du potentiel-vecteur $\vec{A}$ s'écrit :

   $$A_z \;=\; -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{i\,\omega}{r}\,p$$

5. Calculer les composantes non nulles des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ au point P en ne gardant que les termes principaux des DL en λ/r. Montrer que $E_r \ll E_\theta$. Calculer $\|\vec{E}\|/\|\vec{B}\|$. Faire un schéma montrant O, P, $\vec{E}$, $\vec{B}$ et le vecteur d'onde $\vec{k}$.

6. On se propose maintenant de calculer la puissance rayonnée à grande distance par cette antenne dipolaire en fonction de l'amplitude I_0 du courant circulant dans le conducteur MN. Montrer que la puissance totale peut s'exprimer par :

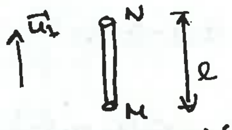
   $$P \;=\; \frac{1}{2}\,R_r\,I_0^2$$

   où R_r est la *résistance de rayonnement* de l'antenne dont on donnera l'expression en fonction de l et λ.

La fonction de Heaviside est définie par :
$$\begin{cases} \Theta(x) = 1 & \text{si } x > 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $\dfrac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$.

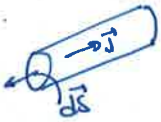
Feuille TD n°12 : Rayonnement d'une antenne



$I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$

1) On suppose qu'à l'extérieur du tronçon MN, la densité de courant est nulle. En utilisant la fonction Heaviside $H = \begin{cases} \Theta(x) = 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et la distribution de Dirac, sachant $\frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x)$, donner l'expression de la densité de courant $\vec{J}$ dans tout l'espace.

$I = \frac{dq}{dt}$

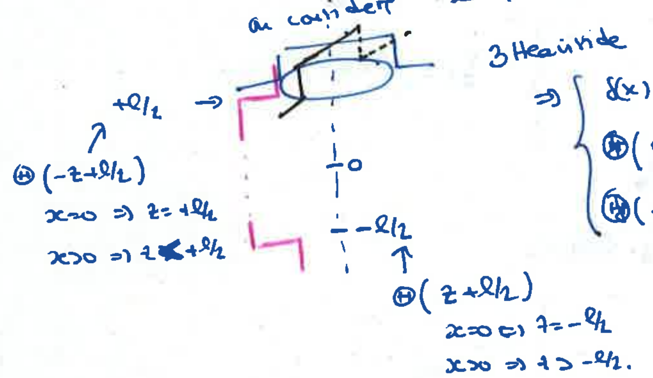


$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$

$\partial\ \vec{J} \neq 0\ \forall\ z \in [-\ell/2, \ell/2]$

on considère le fil de section infinitésimale $\Rightarrow \int_S dS = \delta(x) \cdot \delta(y)$

3 Heaviside dans 3 directions :



$\Rightarrow \begin{cases} \delta(x), \delta(y) \rightarrow \text{car } S \rightarrow 0 \\ \Theta(z+\ell/2) \\ \Theta(-z+\ell/2) \end{cases}$

puis comme $dS \rightarrow 0 \Rightarrow$ I confondu avec $\vec{J}$ / $\vec{J} = I \cdot \delta(x) \cdot \delta(y)$
(J est par unité surface $\rightarrow 0$)

dans le cas de notre fil $\qquad \vec{J} \parallel$ axe fil $\Rightarrow \parallel \vec{u_z}$.

$$\vec{J} = I \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \Theta(z+\ell/2) \cdot \Theta(-z+\ell/2) \cdot \vec{u_z}$$

$$= I_0 \cos(\omega t)\, \delta(x)\, \delta(y) \cdot \Theta(z+\ell/2)\, \Theta(-z+\ell/2) \cdot \vec{u_z}$$

On note : $\frac{d\Theta}{dx} = \delta(x) \Rightarrow \delta(x) = \frac{1}{L}$ on a donc $\vec{J} \propto I \cdot \delta(x)\,\delta(y) \Rightarrow I/L^2 \equiv I/\text{surface}$

• $\left[\frac{d\Theta}{dx}\right] = \frac{1}{L}$

2. En utilisant la conservation de la charge, montrer que ce système peut être assimilé à un dipôle oscillant constitué de deux charges opposées placées en M et N et dont la valeur varie de façon sinusoïdale $(\pm q \sin(\omega t))$

conservation charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0$$

$\vec{J} = J\, \vec{u_z} \Rightarrow \nabla \vec{J} = \frac{\partial J_z}{\partial z}$

on a $\frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j_z}{\partial z} = -I_0 \cdot \cos(\omega t)\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\frac{d}{dz}\left[\Theta(z+\ell/2)\cdot\Theta(-z+\ell/2)\right]$$

$$= -I_0\cdot\cos(\omega t)\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\left[\delta(z+\ell/2)\cdot\Theta(-z+\ell/2) + \Theta(z+\ell/2)(-\delta(-z+\ell/2))\right]$$

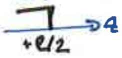
$$= -I_0\cdot\cos(\omega t)\,\delta(x)\cdot\delta(y)\left[\delta(z+\ell/2)\cdot\Theta(-z+\ell/2) - \delta(-z+\ell/2)\cdot\Theta(z+\ell/2)\right]$$

Note: $\delta(z+\ell/2) \neq 0 \Leftrightarrow z = -\ell/2$

$\delta(-z+\ell/2) \neq 0 \Leftrightarrow z = \ell/2$

on regarde Θ associée / $\delta\cdot\Theta$ et on a:

$\underbrace{\delta(z+\ell/2)}_{\neq 0 \Leftrightarrow z=-\ell/2}\cdot\Theta(-z+\ell/2)$



et Θ en $z=-\ell/2$ $=1$ $\Big\}$ $\delta(z+\ell/2)$

unique valeurs non-nulles

$\underbrace{\delta(z-\ell/2)}_{\neq 0 \Leftrightarrow \ell/2=z}\cdot\Theta(z+\ell/2)$ $\Big\}$ $\delta(z-\ell/2)$

en $\ell/2=z \Rightarrow \Theta=1$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = I_0\cdot\cos(\omega t)\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\left[\delta(z+\ell/2) - \delta(-z+\ell/2)\right]$$

on détermine $\rho \Rightarrow \rho = \int \dots\, dt$

$$\rho(x,y,z,t) = -\frac{I_0}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\left[\delta(z+\ell/2) - \delta(-z+\ell/2)\right]$$

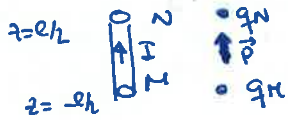
regardons où ρ est non nulle

$\Rightarrow \rho(x,y,z=-\ell/2,t)$

$\rho(x,y,z=\ell/2,t)$ $\Rightarrow$ deux charges en $z=\pm\ell/2 \Rightarrow$ les deux points M,N

on note $\rho = q_1 + q_2$ / $q_{1,2} = -\frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t)\left[\pm\right]$ car seulement une $\delta(\;)\neq 0$ à une position z

Dans le dessin



$\Rightarrow$ $q_N = +\frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t)$

$q_M = -\frac{I_0}{\omega}\cdot\sin(\omega t)$

On a deux charges de même amplitude $\frac{I_0}{\omega}$, signe opposé qui oscillent à la même pulsation en positions M et N. ≡ $\boxed{\text{dipôle oscillant}}$

3. En déduire la densité de courant complexe $\vec J(\vec r,t)$ dans tout l'espace, ainsi que la densité de charge complexe $\rho(\vec r,t)$

On a $\vec J(\vec r,t) = I_0\cdot\underbrace{\sin(\omega t)}_{e^{-i\omega t}}\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\Theta(z+\ell/2)\cdot\Theta(-z+\ell/2)\,\vec{u_z}$

$$\rho(\vec r,t) = -\frac{I_0}{\omega}\cdot\underbrace{\sin(\omega t)}_{e^{-i\omega t}}\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\Big[\underbrace{\delta(z+\tfrac{\ell}{2})}_{\delta(\vec r+\frac{\ell}{2}\vec{u_z})}\underbrace{-\delta(-z+\ell/2)}_{-\delta(-\vec r+\frac{\ell}{2}\vec{u_z})}\Big]$$

$\delta(x)=\delta(-x)$
$\delta(y)=\delta(-y)$

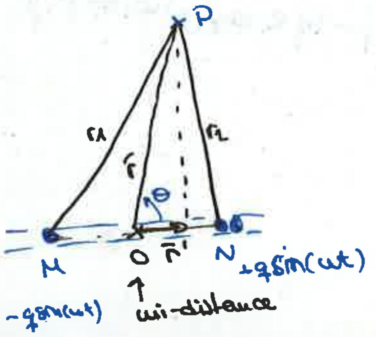
. P note: seul la composante réelle a un sens physique

4. On cherche tout d'abord à calculer à l'instant t les potentiels en un point P de coordonnées sphériques (r,θ,ϕ).

a) En utilisant les expressions des potentiels retardés, exprimer le potentiel scalaire V (en notation complexe) au point P en fonction des distances $r_1 = MP$ et $r_2 = NP$.

fil → dipôle → 2 charges en positions M et P qui sont accélérées ⇒ potentiels décrits par les éq. de Liénard-Wiechert

$$V_{\text{retardé}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec r',t')}{\|\vec r-\vec r'\|}\,d^3r'$$



avec $t' = t - \frac{\|\vec r-\vec r'\|}{c}$

et $\|\vec r-\vec r'\|$ = distance du point P à la distribution de charges : ici le fil

$\vec r'$ → vecteur sur la distribution

$\vec r$ → vecteur au point P, depuis l'origine

$$V_{\text{retardé}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{-i\frac{I_0}{\omega} e^{-i\omega t}\left[\delta(\vec{r} + \frac{\ell}{2}\vec{u_z}) - \delta(-\vec{r} + \frac{\ell}{2}\vec{u_z})\right]}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} =$$

On a $\delta(\vec{r} + \frac{\ell}{2}\vec{u_z}) \to$ point M

$\delta(-\vec{r} + \frac{\ell}{2}\vec{u_z}) \to$ point N

seulement 2 charges localisés ce qui limite $\vec{r}'$ à deux positions

On a donc $\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \underset{\underset{r_1}{\parallel}}{MP}$ et $\underset{\underset{r_2}{\parallel}}{NP}$

$$V_{\text{retardé}} = \frac{-i\, I_0/\omega}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{e^{-i\omega\left(t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c}\right)}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \cdot \left[\delta(\vec{r} + \frac{\ell}{2}\vec{u_z}) - \delta(-\vec{r} + \frac{\ell}{2}\vec{u_z})\right] =$$

$$= -\frac{i\, I_0/\omega}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{e^{-i\omega(t - \frac{r_1}{c})}}{r_1} - \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r_2}{c})}}{r_2}\right]$$

notes: courant de M $\to$ N

$\Rightarrow$ d'abord excitation en M et après N

$$= -\frac{iq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \left[\frac{e^{\frac{i\omega r_1}{c}}}{r_1} - \frac{e^{\frac{i\omega r_2}{c}}}{r_2}\right] =$$

$$= \frac{iq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot e^{-i\omega t} \left[\frac{e^{\frac{i\omega r_2}{c}}}{r_2} - \frac{e^{\frac{i\omega r_1}{c}}}{r_1}\right] \blacksquare$$

b) On note λ la longueur d'onde du champ magnétique rayonné par le dipôle. On suppose $r \gg \lambda \gg \ell$ (approx. dipolaire et champ lointain). Montrer que le potentiel scalaire complexe peut s'écrire en ne gardant que le terme principal du developpement limité en ℓ/λ et en ℓ/r :

$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{i\omega}{cr} p\cos\theta$$

en fonction du moment dipolaire complexe retardé $p = iq\ell \exp(-i\omega(t - \frac{r}{c}))$.

on a $r \gg \lambda \gg \ell$

avec $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega/c} = \frac{2\pi c}{\omega}$

on sait : $r \gg \ell$ approx dipolaire

$r \gg \lambda$ champ lointain

$\lambda \gg \ell$ approx. non-relativiste

on évalue $V = \frac{iq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot e^{-i\omega t} \left[\frac{e^{i\omega r_2/c}}{r_2} - \frac{e^{i\omega r_1/c}}{r_1} \right]$ dans ces limites

a) $\vec{r_1} = \vec{MO} + \vec{OP} \longrightarrow r_1^2 = MO^2 + OP^2 + 2\vec{MO}\cdot\vec{OP} =$

$$= \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + r^2 + 2 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot r \cdot \cos\theta =$$

$$\simeq r^2 \left(1 + \frac{\ell}{r}\cos\theta + \cancel{\frac{\ell^2}{4r^2}} \right)$$

0 car $r \gg \ell$ et beaucoup plus petit que le terme en $\frac{\ell}{r}\cos\theta$

$$r_1 \simeq r \left(1 + \frac{\ell}{r}\cos\theta \right)^{1/2}$$

$\vec{r_2} = \vec{NO} + \vec{OP} \longrightarrow r_2^2 = NO^2 + OP^2 + 2\vec{NO}\vec{OP}$

$$= \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + r^2 - 2 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot r \cdot \cos\theta \simeq r^2 \left(1 - \frac{\ell}{r}\cos\theta + \frac{\ell^2}{4r^2} \right)$$

$$r_2 \simeq r \left(1 - \frac{\ell}{r}\cos\theta \right)^{1/2}$$

b) $e^{i\omega r_2/c} \simeq e^{i\omega \frac{r}{c}(1 - \frac{\ell}{r}\cos\theta)^{1/2}}$

$e^{i\omega r_1/c} \simeq e^{i\omega r/c(1 + \frac{\ell}{r}\cos\theta)^{1/2}}$

facteur commun $e^{i\omega \frac{r}{c}}$

c) $\frac{1}{r\sqrt{1+x}} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots\right)$ $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x}{8} \dots$

on a donc :

$$V_{retardé} = \frac{iq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \frac{e^{i\omega\frac{r}{c}}}{r} \left[\frac{e^{\sqrt{1 - \ell/r\cos\theta}}}{\sqrt{1 - \frac{\ell}{r}\cos\theta}} - \frac{e^{\sqrt{1 + \ell/r\cos\theta}}}{\sqrt{1 + \ell/r\cos\theta}} \right] = \dots =$$

$$\simeq \frac{iq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \cdot \left[e^{-i\omega\frac{\ell}{2c}\cos\theta} - e^{+i\omega\frac{\ell}{2c}\cdot\cos\theta} + \frac{\ell}{2r}\cos\theta \left(e^{-i\omega\frac{\ell}{2c}\cos\theta} + e^{+i\omega\frac{\ell}{2c}\cos\theta} \right) \right]$$

avec $e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2\cos\phi$

$e^{i\phi} - e^{-i\phi} = -2i\sin\phi$

$$V_{\text{retardé}} \simeq \frac{iq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \left[-2i\sin\left(\omega\frac{\ell}{2c}\cos\theta\right) + \frac{2\ell}{2r}\cos\theta\cos\left(\omega\frac{\ell}{2c}\cos\theta\right) \right]$$

sachant $\omega = \frac{2\pi}{\lambda/c}$

$\frac{\omega}{c}\ell = \frac{2\pi\ell}{\lambda}$ et $\lambda \gg \ell \Rightarrow \frac{\omega\ell}{c} \ll 1$

$\sin\left(\underset{\uparrow \text{ proportionnel}}{\alpha}\overset{\varepsilon}{\frac{\omega\ell}{c}}\right) \simeq \sin(\varepsilon \to 0) \simeq \left(\frac{\omega\ell}{c}\right)$

$\cos(\varepsilon \to 0) \simeq 1 + \varepsilon^2$

on a donc :

$$V_{\text{retardé}} \simeq \frac{iq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \left[-2i\frac{\omega\ell}{2c}\cos\theta + \frac{2\ell}{2r}\cos\theta\left(1 + \underbrace{\left(\frac{\omega\ell}{2c}\cos\theta\right)^2}_{\text{négligeable}}\right)\right]$$

on compare $\frac{\ell}{r}$ avec $\frac{\omega\ell}{c}$ $\quad \frac{\omega\ell}{c} = \frac{2\pi}{\lambda/c} \cdot \frac{\ell}{c} = \frac{2\pi\ell}{\lambda}$

et $r \gg \lambda \rightarrow \frac{\ell}{r} \ll \frac{\omega\ell}{c}$

$$V_{\text{retardé}} \simeq -\frac{iq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \left[i\omega\frac{\ell}{c}\cos\theta \right]$$

$$\simeq -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{i\omega}{cr} \underbrace{iq\,\ell\, e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}_{P} \cos\theta \simeq -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{i\omega}{cr} P \cdot \cos\theta$$

(c) Montrer que la seule composante non nulle du potentiel-vecteur $\vec{A}$ s'écrit :

$$A_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\omega}{r} P$$

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec J(\vec r',t')}{\|\vec r-\vec r'\|}\cdot d\vec r' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\int \delta(x')\,dx'}_{=1}\underbrace{\int \delta(y')\,dy'}_{=1}\cdot\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{I_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{\|\vec r-\vec r'\|}{c}\right)}}{\|\vec r-\vec r'\|}\,dz'\,\vec u_z$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} e^{-i\omega t}\cdot\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{e^{i\omega\frac{\|\vec r-\vec r'\|}{c}}}{\|\vec r-\vec r'\|}\,dz'\,\vec u_z$$

avec $\|\vec r-\vec r'\|\simeq r$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}e^{-i\omega t}\,\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\cdot\int_{-\ell/2}^{\ell/2}dz'\,\vec u_z$$

$$\boxed{\vec A \simeq \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\,\frac{\ell}{r}\cdot e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\,\vec u_z}$$

avec $p = iq\ell e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$

$q=\frac{I_0}{\omega}$

$$\vec A = -\frac{i\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\omega p\,\vec u_z$$

5. Calculer les composantes non nulles des champs $\vec E$ et $\vec B$ au point P en ne gardant que les termes principaux des DL en λ/r. Montrer que $E_r \ll E_\theta$. Calculer $\|\vec E\|/\|\vec B\|$. Faire un schéma montrant O, P, $\vec E$, $\vec B$ et le vecteur d'onde $\vec k$.

$$\vec B = \vec\nabla\wedge\vec A$$

$$\vec E = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial\vec A}{\partial t}$$

$$\vec B = \begin{vmatrix} \vec u_x & \vec u_y & \vec u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\,\vec u_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\,\vec u_y =$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\,\vec u_x - \frac{\partial A_z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\,\vec u_y$$

avec $r^2=x^2+y^2+z^2$

$x = r\sin\theta\sin\phi$

$y = r\sin\theta\cos\phi$

$z = r\cos\theta$

$$\Rightarrow \vec B = \frac{\partial A_z}{\partial r}\left(\frac{y}{r}\,\vec u_x - \frac{x}{r}\,\vec u_y\right)$$

$$= \sin\theta\,\frac{\partial A_z}{\partial r}\left(\cos\phi\,\vec u_x - \sin\phi\,\vec u_y\right) =$$

$$= \sin\theta\cdot\frac{\partial A_z}{\partial r}\cdot\left(-\vec u_\phi\right).$$

avec $\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{i\mu_0}{4\pi}\cdot\omega\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right) =$

$$= -\frac{i\mu_0}{4\pi}\,\omega\cdot\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\cdot p\right) =$$

$$= -\frac{i\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\omega}{r}\cdot\left(\frac{i\omega}{c}\,p - \frac{p}{r}\right) = -\frac{i\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\omega p}{r}\cdot\left(\frac{i\omega}{c}\right) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\omega^2 p}{c\cdot r}$$

$\frac{1}{c/\omega} \propto \frac{1}{\lambda}$ si $\lambda \ll r \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \gg \frac{1}{r}$

on a donc $\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\omega^2 p}{c\cdot r}\sin\theta\,\vec{u_\phi}}$

- par $\vec{E} = -\vec{grad}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$\vec{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u_r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \phi}\cdot\vec{u_\phi} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\vec{u_\phi}$ trièdre $(\vec{u_r}, \vec{u_\phi}, \vec{u_\theta})$

avec $V_{\text{retardé}} \simeq -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{i\omega}{cr}\,p\cos\theta$

$\vec{grad}\,V_{\text{retardé}} = -\frac{i\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{r}\right)\cos\theta\,\vec{u_r} + 0\,\vec{u_\phi} + \frac{p}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta)\,\vec{u_\theta}\right]$

avec $p = i\frac{I_0}{\omega}\ell e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{i\mu_0}{4\pi r}\,\omega\,\frac{\partial p}{\partial t}\,\vec{u_z} = -\frac{i\mu_0}{4\pi r}\cdot\omega\,(-i\omega p)\,\vec{u_z} =$$

$$= -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r}\,p\,\vec{u_z} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r}\,p\cdot(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_z})$$

$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}$ $\quad p\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi r}\cos\theta + \frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi r}\cos\theta - \frac{i\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{1}{r^2}\cos\theta \\ -\frac{\mu_0\omega^2 p}{4\pi}\,\frac{1}{r}\sin\theta + \frac{i\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{1}{r^2}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

s'annulent — négligeable

on a $1/r$ domine sur $1/r^2$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{i\omega p}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{1}{r^2}\cdot\cos\theta \\ -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\,p\,\frac{1}{r}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et puis $E_r \ll E_\theta$

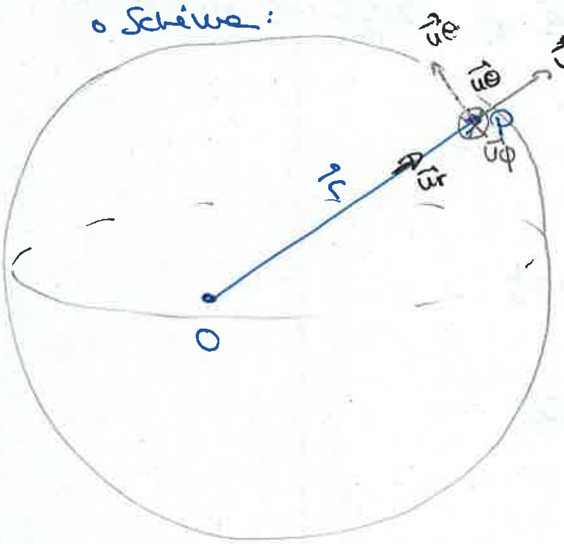
$\frac{1}{r^2}$ $\quad 1/r$.

$$\Rightarrow \vec{E} \simeq E_\theta\,\vec{u_\theta} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\,\frac{p}{r}\sin\theta\,\vec{u_\theta}$$

• Calculer $\|\vec{E}\| / \|\vec{B}\|$

$$\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} \simeq \frac{\|E_0\|}{\|B\|} = \frac{\frac{\mu_0 \omega^2 p}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}\sin\theta}{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2 p}{rc}\sin\theta} = \frac{1}{1/c} = c$$

• Schéma :

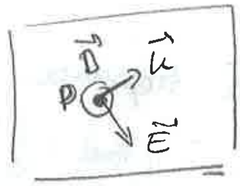


$\vec{E} \parallel -\vec{u_\theta}$

$\vec{B} \parallel -\vec{u_\varphi}$

$\vec{u_k} \parallel \vec{u_r}$

donc



6. On se propose maintenant de calculer la puissance rayonnée à grande distance par cette antenne dipolaire en fonction de l'amplitude I_0 du courant circulant dans le conducteur MN. Montrer que la puissance totale peut s'exprimer par :

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2$$

où R_r est la résistance de rayonnement de l'antenne dont on donnera l'expression en fonction de l et d.

$$P_{rayonné} = \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} Re(\vec{E}) \wedge Re(\vec{B})$$

$$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{-\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi}\frac{p}{r}\sin\theta\,\vec{u_\theta} \times -\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\omega^2 p}{cr}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}}{\mu_0} =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot \omega^4}{(4\pi)^2}\left(\frac{p}{r}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\theta}{c}\,\vec{u_r}$$

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{u_r}$$

$$\vec{\Pi} \parallel d\vec{S}$$

$$\vec{p} = q\, l\, e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}$$

$$q = \frac{I_0}{\omega}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 \omega^4}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\Theta}{r^2} \left(q\ell \sin\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)^2 \vec{u_r}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{32} \cdot \frac{\mu_0 \omega^4 q^2\ell^2}{\pi^2 c} \frac{\sin^2\Theta}{r^2} \vec{u_r} \qquad \underline{\langle \vec{\Pi} \rangle > 0}$$

la Puissance

$$P_{rad} = \int_S \langle \vec{\Pi} \rangle d\vec{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{32} \frac{\mu_0 \omega^4}{\pi^2 . c} q^2\ell^2 \frac{\sin^2\Theta}{r^2} \cdot r^2 \sin\Theta \, d\Theta \underbrace{d\phi}_{2\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot \omega^4}{16\pi c} q^2\ell^2 \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\Theta \, d\Theta}_{\text{déjà fait en TD} = \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot \omega^4}{12\pi c} q^2\ell^2 \underset{q = \frac{I_0}{\omega}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \omega^2}{6\pi c} \ell^2\right) \cdot I_0^2$$

R_r

et $\quad R_r = \frac{\mu_0 \omega^2}{6\pi c} \ell^2 \underset{\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}}{=} \frac{\mu_0}{3} \frac{\omega}{\lambda} \ell^2 = \frac{\mu_0}{3} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda} \ell^2 = \frac{2\pi \mu_0 c}{3} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 =$

avec $\quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad \Rightarrow R_r = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\ell}{c}\right)^2 \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}_{Z_0 = 377\Omega}$

! $P_{rad} \propto I_0^2$

indépendant de r. comme attendu.