Feuille de TD n$^{\underline{o}}$ 11: *Radiation (I)*
*Théorie classique du rayonnement par une charge ou un atom*e

1 Relation de Larmor

On rappelle l'expression du champ rayonné, à grande distance, par une charge q en mouvement non relativiste, d'accélération $\vec{a}$, positionnée au centre du référentiel :

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\text{ray}}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r}\,\vec{e}_r \wedge \left[\vec{e}_r \wedge \vec{a}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \\ \vec{B}^{\text{ray}}(\vec{r},t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r\,c}\,\vec{e}_r \wedge \vec{a}\left(t-\frac{r}{c}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

1. Donner l'expression des champs rayonnés si le mouvement s'effectue seulement le long de l'axe z.
2. Déterminer alors le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(\vec{r},t)$.
3. Calculer la puissance instantanée $\mathcal{P}(r,t)$ rayonnée par la charge à travers une sphère de rayon r. Il s'agit de la relation de LARMOR. On posera: $e^2 \equiv \dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$.

2 Equation d'Abraham-Lorentz

L'énergie rayonnée s'accompagne d'une diminution de l'énergie cinétique de la charge. Cette dernière est donc ralentie.

1. On considère une charge en mouvement pseudo-périodique. En égalisant l'énergie rayonnée par la charge pendant une durée T avec le travail d'une force dite *force de réaction radiative*, montrer que cette dernière peut être écrite :
$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\vec{a}}$$
2. La charge est soumise à une force extérieure $\vec{F}_{\text{ext}}$. Écrire alors son équation du mouvement (équation d'ABRAHAM-LORENTZ). En quoi cette équation est-elle étrange ?
3. Résoudre cette équation dans le cas où $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$. Vous introduirez une durée τ caractéristique du mouvement de la charge q pouvant être exprimée en fonction du rayon classique de l'électron $r_0 \equiv \dfrac{e^2}{m_e c^2}$. Commenter cette équation et faire l'application numérique pour τ et r_0.
4. Dans quels cas la force de réaction radiative peut-elle être considérée comme une perturbation ? On examinera la situation d'une particule en mouvement périodique.

3 Modèle de Rutherford

On se place maintenant dans cadre du modèle de RUTHERFORD. On suppose que l'électron décrit un mouvement circulaire uniforme autour du noyau (numéro atomique Z) supposé immobile.

1. Donner l'expression de l'énergie mécanique de l'électron.
2. Exprimer la force de réaction radiative dans les coordonnées cylindriques, puis sa puissance ~~son travail~~.
3. On se place dans le cadre d'une approximation adiabatique où le mouvement obéit en permanence aux lois du mouvement circulaire uniforme. Ecrire une équation différentielle où n'interviennent que m_e, τ, e^2, Z et $r(t)$, $r(t)$ étant le rayon de l'orbite à l'instant t.
4. En déduire que le cube du rayon de l'orbite décroît linéairement avec le temps.
5. Comment varie dans le même temps la fréquence orbitale et donc la fréquence du rayonnement émis? Commentaire.

6. Estimer cependant l'ordre de grandeur de la durée de vie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental.
7. Estimer de la même façon quelle serait la durée de vie de l'atome d'hydrogène dans un état caractérisé par le nombre quantique n. Commentaire.

Feuille de TD n°11 : Radiation (I)

Théorie classique du rayonnement par une charge ou un atome

① Relation de Larmor

On rappelle l'expression du champ rayonné, à grande distance, par une charge q en mvt non relativiste, d'accélération $\vec{a}$, positionnée au centre du référentiel:

$\bar{E}, \bar{B} \propto \frac{1}{r}$

$$\vec{E}^{ray}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r} \vec{e_r} \wedge \left[\vec{e_r} \wedge \vec{a}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

temps retardé

$$B^{ray}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{rc} \vec{e_r} \wedge \vec{a}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

1) Donner l'expression des champs rayonnés si le mvt s'effectue seulement le long de l'axe z.

particule au ref. en mvt. $(\vec{O})$

point M : point où on veut les champs rayonnés

point M:

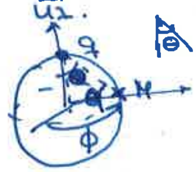
$\vec{r} = \vec{r_M} - \vec{r_p}$ si ref. se déplace avec particule

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r_M}$ / $\vec{r_M} = (x_M, y_M, -\frac{1}{2}at^2+z_M)$

sont ctes car mvt selon $\vec{u_z}$.

particule :

$$\begin{pmatrix} \vec{a} = a\vec{u_z} \\ \vec{v} = at\,\vec{u_z} \\ \vec{r} = \frac{1}{2}at^2\,\vec{u_z} \end{pmatrix} \text{ si } a = cte$$



en sphériques:

$\vec{e_r} = (\sin\Theta\cos\phi, \sin\Theta\sin\phi, \cos\Theta)$

On a: $\vec{e_r} \wedge \vec{a} = a \cdot \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ \sin\Theta\cos\phi & \sin\Theta\sin\phi & \cos\Theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot (\sin\Theta\cdot\sin\phi, -\sin\Theta\cos\phi, 0) =$

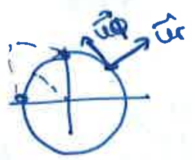
NOTE: connu $\vec{u_r} \equiv \cos\phi, \sin\phi$

$\Downarrow$

$\vec{u_\phi} \equiv \cos\phi, -\sin\phi$

$= \underbrace{a\cdot\sin\Theta}\cdot(\sin\phi, -\cos\phi)$

projection dans le plan



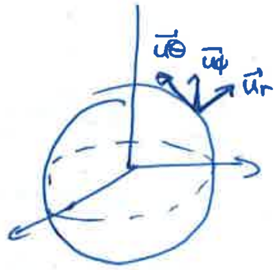
$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

$= a\cdot\sin\Theta\ \vec{u_\phi}$

on a donc :

$$\vec{E}_{ray} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} a \cdot \sin\theta \; \vec{e_r} \wedge \vec{e_\phi} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{a \sin\theta}{r} \vec{e_\theta}$$

$$\vec{B}_{ray} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot a \sin\theta}{r \cdot c} \vec{e_\phi}$$



→ r, ϕ par le plan

→ θ latitude

2) Déterminer le vecteur de poynting $\vec{\Pi}(\vec{r},t)$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E \cdot B}{\mu_0} \cdot \vec{e_\theta} \wedge \vec{e_\phi} =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0 q}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{a \sin\theta}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{c} \vec{e_r} \underset{\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}}{=} \frac{q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{a^2 \sin^2\theta}{c^3} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e_r}$$

$$= \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{(a \sin\theta)^2}{\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \vec{e_r}$$

3) Calculer la puissance instantanée $P(\vec{r},t)$ rayonnée par la charge à travers une sphère de rayon r. Il s'agit de la relation de Larmor.

On posera : $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$

$$P(\vec{r},t) = \int_S \vec{\Pi} \, d\vec{S} \qquad \vec{\Pi} \parallel d\vec{S}$$

$$dS|_{r=cte} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

⟶ angle solide $\frac{dS}{r^2} = d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

$$P(\vec{r},t) = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} a\right)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 c^3} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi =$$

$$\frac{2\pi}{\varepsilon_0 c}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{a}{c}\right)^2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{\varepsilon_0 c}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{c}\right)^2 \left[\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta - \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta\right]$$

$$\sin^3\theta = \sin\theta \cdot (1 - \cos^2\theta)$$

$$= \frac{2\pi}{\varepsilon_0 c}\left(\frac{q}{4\pi}\cdot\frac{a}{c^2}\right)^2 \cdot \left[\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{\varepsilon_0 c}\left(\frac{q}{4\pi}\cdot\frac{a}{c^2}\right)^2 \cdot \left[1+1 + \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) \right] = \frac{2\pi}{\varepsilon_0 c}\left(\frac{q}{4\pi}\cdot\frac{a}{c^2}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{2\pi}{2\cdot 3c}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{1}{c^2}\right)^2 \frac{\pi}{6\cdot c}$$

$$e^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$= \frac{2\pi\, a^2}{2\cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot c^3}\cdot\frac{q^2}{4\pi}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\, a^2$$

$$\boxed{P_{(F,t)} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\, a^2}$$ Larmor's formula

! Note : Puissance rayonnement indépendant de r ($\neq$ aux champs) $\Rightarrow$ propagation à grande distance sans s'atténuer.

! Note 2 : unique dépendance en r via $\vec{a}\left(t - \frac{r}{c}\right)$

2. Équation d'Abraham - Lorentz

L'énergie rayonnée s'accompagne d'une ↓ Énergétique de q. Cette dernière est donc ralentie. ($\Rightarrow m\cdot\dot{v} = (\vec{F}_{ext}) + \vec{F}_{rad}$ / $\vec{F}_{rad}$ force introduite pour compenser les pertes énergétiques.) En égalisant

1. On considère une charge en mvt pseudo-périodique. La E_{rayo} pendant $T \equiv W$ force réaction radiative, montrer $\vec{F}_{rad}$ peut s'écrire : $\vec{F}_{rad} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\dot{\vec{a}}$

$$\int_T \frac{\partial E_{rayonnée}}{\partial t}\cdot dt = \int \vec{F}_{rad}\cdot d\vec{r} \qquad \text{où} \quad d\vec{r} = \vec{v}\cdot dt \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{rad}\cdot\vec{v} = \text{Puissance}$$

$$\Rightarrow \int \vec{F}_{rad}\cdot d\vec{r} = \int_T \vec{F}_{rad}\cdot\vec{v}\cdot dt = \int_T \underbrace{P_{(F,t)}}_{\text{dû au rayonnement}}\, dt = P_{(F,t)} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot a^2$$

$$= \int_T \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot a^2\cdot dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot \underbrace{\int \dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}}\cdot dt}_{\text{intégration par parties}}$$

$u = \dot{\vec{v}} \longrightarrow du = \ddot{\vec{v}}$

$\dot{v} = \dot{\vec{v}}\cdot dt \qquad \vec{v} = \vec{v}$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left[\left[\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\right]_T - \int_T \dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}}\,dt\right]$$

si mvt périodique $\vec{v} \propto \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{v} \propto \cos(\omega t)$

$[\ \ ]_T$ d'un $\sin(\ )\cdot\cos(\ ) = 0$.

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{c^3}\cdot\int_T \vec{v}\cdot\ddot{\vec{v}}\,dt$$

$$\Rightarrow \int\left(\vec{F}_{rad} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\ddot{\vec{v}}\right)\vec{v}\cdot dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{rad} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\ddot{\vec{v}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\dot{\vec{a}}}$$

$\Rightarrow$ elle donne éq. de mvt $\boxed{m\cdot\dot{\vec{v}} = \underbrace{(\vec{F}_{ext})}_{\text{plus}} + \underbrace{\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\ddot{\vec{v}}}_{F_{rad}}}$

la réaction radiative est due à la force de la charge sur soi-même $\Rightarrow$ la force est exercé par les champs sur les ≠ parties de la distribution de charge agissant entre eux.

2) la charge est soumise a une force extérieure ($\vec{F}_{ext}$). Écrire son éq. de mvt (éq. d'Abraham-Lorentz). En quoi cette équation est-elle étrange ?

Eq. mvt $\rightarrow \sum \vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\cdot\dot{\vec{v}}$

$\sum\vec{F} = \vec{F}_{rad} + \vec{F}_{ext}$

on a : $\boxed{m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{ext} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\ddot{\vec{v}}}$ Éq. Abraham-Lorentz

$\vec{a}$ dépend d'une force $\propto \dot{\vec{a}}$ (inhabituel pour éq. mvt.)

3) Résoudre l'éq si $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$. Vous introduirez une durée ~~de~~ ~~the~~ τ caractéristique du mvt de la charge q pouvant être exprimée en fonction du rayon classique de l'électron $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$. Commenter cette éq. et faire l'application numérique pour τ et r_0.

si $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ éq. mvt $m\dot{\vec{v}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\cdot\ddot{\vec{v}}$

$$\ddot{\vec{v}} = \frac{3}{2}\frac{mc^2\cdot c}{e^2}\cdot\dot{\vec{v}} = \frac{3}{2}\frac{c}{r_0}\dot{\vec{v}}$$

$\dot{x} = A\cdot x \Rightarrow x = B\exp(At)$

on a $\ddot{\vec{v}} = B \cdot \exp\left(\frac{3}{2} c/r_0 \cdot t\right) = B \exp\left(t/\tau\right) \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2}{3}\frac{r_0}{c}.}$

$[\tau] = s$ par dimension

attention

$$\Delta N: \quad r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{\overbrace{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}^{e^2}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3\cdot 10^8)^2} \quad 9\cdot 10^9 \quad = 2{,}8 \cdot 10^{-15}\ m$$

$$\tau = \frac{2}{3}\frac{r_0}{c} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-15}}{3 \cdot 10^8} = 6{,}6 \cdot 10^{-24}\ s$$

Commenter : si $\vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow$ mvt libre

mais si le mvt est libre $\Rightarrow \ddot{\vec{v}}$ doit être nul ; car mais

il y a une $\vec{a}$ dans le système $\Rightarrow$ le terme B de $\ddot{\vec{v}}$ doit être nul.

Cette éq. n'a de sens que si $\vec{F}_{rad}$ est un terme correctif

par rapport à $\vec{F}_{ext}$.

De plus si $B \neq 0 \rightarrow$ il y a $\vec{a}$ / $\vec{a} = a_0 e^{t/\tau} \Rightarrow \vec{a} \nearrow$ avec le temps exponentiellement

mais si $B = 0 \Rightarrow$ et il y a une $\vec{F}_{ext} \neq 0 \Rightarrow$ la particule répond même avant avoir appliqué la force extérieur.

4. Dans quel cas la Force de réaction radiative peut-elle être considérée comme une perturbation ? On examinera la situation d'une particule en mvt périodique.

on a $\underset{\text{énergie radiative}}{E_{rad}} = P_{rad} \cdot T = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} \cdot a^2 \cdot T = \tau \cdot m \cdot a^2 \cdot T$

on examine si $E_{ext} \ll E_{rad}$ (cas d'une perturbation)

2 cas possibles
- $\rightarrow$ particule ~~au repos~~ initialement au repos
- $\rightarrow$ particule en mvt périodique

Particule initialement au repos

$E_{rad} \ll E_{ext}$? $\rightarrow$ $E_{cinétique} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \overset{v = a \cdot t}{=} \frac{1}{2} m (a \cdot T)^2$ mais $E_{cinétique}$ bcp plus grande.

$E_{rad} = \tau m a^2 T$

on compare $\tau m a^2 \cdot T \overset{?}{\ll} \frac{1}{2} m (a T)^2$

$\tau \overset{?}{\ll} T \Rightarrow$ si $\tau \ll T$ cela implique que $r_0 = \frac{3}{2} c\tau$

doit être $\ll$ que la période $T \Rightarrow$ mvt bcp plus

lente que la période

Par contre la radiation nécessite que $\tau \sim T$

Donc ce cas n'est pas possible.

M.S

Particule en mvt périodique à ω :

$\vec{r} = d \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \vec{v} = d \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow \vec{a} : d\omega^2$

on compare E_{rad} à E_{ext} si $E_{rad} \ll E_{ext}$

$E_{rad} = \tau m a^2 \cdot T = \tau m (d\omega^2)^2 \cdot T$

$E_{ext} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot (d\omega)^2$

$\Rightarrow$ on a $\tau \cdot m \cdot d^2 \cdot \omega^4 \cdot T \ll \frac{1}{2} m \cdot d^2 \cdot \omega^2$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\boxed{\tau \cdot \omega \ll 1}$$

déplacements périodiques autour de la position d'éq.

et limite

Cette option est possible $\Rightarrow$ mvt périodiques non relativistes à l'échelle de τ ; avec un mvt qui change ici étant relié à $\vec{r}_0$ $\Rightarrow$ petites oscillations.

3. Modèle de Rutherford

$\bar{e}$ décrit un mvt circulaire uniforme autour du noyau (numéro atomique Z) supposé immobile.

1. Donner l'expression de l'Emécanique de l'électron.

$\bar{e}$ mcu. $\Rightarrow |\vec{v}| = cte$

Emécanique dépend de l'Ecinétique + E électrostatique

$\frac{1}{2}mv^2$ $\qquad + \frac{q \cdot q'}{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$E_{méca} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Z \cdot 1 \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

2. Exprimer la force de réaction radiative dans les coordonnées cylindriques, puis son travail.

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2} \cdot \dot{\vec{a}} = \partial \cdot m \cdot \dot{\vec{a}}$$

mvt. circulaire
$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{u_r}$$
$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u_r} + \rho\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = \ddot{\rho}\,\vec{u_r} + \dot{\rho}\cdot\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - \rho\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\theta}\,\vec{u_r}$$
$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{u_\theta}$$

uniforme $\Rightarrow \ddot{r} = 0$ et $\dot{r} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$

on a donc : $\boxed{\vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}}$

et ainsi $\dot{\vec{a}} = -\rho \cdot \dot{\theta}^3 \cdot \vec{u_\theta} = -r \cdot \omega^3 \cdot \vec{u_\theta}$

on a donc $\boxed{\vec{F}_{rad} = -\partial \cdot m \cdot r \cdot \omega^3 \cdot \vec{u_\theta}}$ $\quad |\vec{F}_{rad}| < 0 \Rightarrow$ freine le mvt de l'électron

et le $P_{rad} = \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v}$ $\longrightarrow$ $W_{rad} = \int \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v}\, dt$

avec $\vec{F}_{rad} = -\partial \cdot m \cdot r\,\omega^3 \cdot \vec{u_\theta}$
$\vec{v} = \rho \cdot \omega \cdot \vec{u_\theta}$

$\boxed{P_{rad} = -\partial m r^2 \omega^4}$

on a : $\boxed{W_{rad} = \int -\partial \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^4\, dt}$

Puis on sait $\boxed{\frac{dE_{mécanique}}{dt} = P_{radiative}}$

sachant $\boxed{E_{méca} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$ $\underset{\text{mvt circulaire uniforme}}{=}$ $\boxed{\frac{1}{2}m(r\omega)^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$

3. On se place dans le cadre d'une approximation adiabatique où le mvt obéit en permanence aux lois du mvt circulaire uniforme. Écrire une éq. différentielle où n'interviennent que m_e, τ, e^2, Z et $r(t)$, $r(t)$ étant le rayon de l'orbite à l'instant t.

→ si mvt circulaire uniforme

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{electrostatique}$

$m \cdot (-r\omega^2)\,\vec{e_r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$; $m r^2 \cdot \omega^2 = Ze^2 \cdot \frac{1}{r}$

attractive

on va dire englobé par e^2

→ par contre il ∃ la $\vec{F}_{rad} = -mr\omega^3 \tau \vec{e_\theta}$

on a $\frac{d E_{méca}}{dt} = P_{rad} = \vec{F}_{rad} \vec{v}$

on réécrit $E_{méca} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2} m \cdot (\omega r)^2 - \frac{Ze^2}{r} =$

$= \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot r^2 - m r^2 \omega^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 =$

$= -\frac{Ze^2}{2r}$

$\Rightarrow \frac{d E_{méca}}{dt} = -\frac{Ze^2}{2} \cdot \frac{-1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{Ze^2}{2r^2} \frac{dr}{dt}$

$P_{rad} = -m r^2 \omega^4 \cdot \tau \underset{\uparrow}{=} -\frac{Ze^2}{r} \omega^2 \cdot \tau = -\frac{Z^2 e^4}{m r^4} \tau$

$m r^2 \omega^2 = \frac{Ze^2}{r}$

on compare $\frac{Ze^2}{2r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = -\frac{Z^2 \cdot e^4}{m r^4} \tau \longrightarrow \boxed{\frac{r^2 \cdot dr}{2} = -\frac{Ze^2}{m} \tau \cdot dt}$

4. En déduire que le cube du rayon de l'orbite décroît linéairement avec le temps.

$\frac{r^3}{6} = -\frac{Ze^2}{m} \tau \cdot t + cte \longrightarrow \boxed{r^3 = -\frac{6Ze^2}{m} \cdot \tau\, t + cte}$

et à $t=0$ on a r_0 ⇒ r_0^3 $\Rightarrow \boxed{r^3 = -\frac{6Ze^2}{m} \cdot \tau \cdot t + r_0^3}$

5. Comment varie dans le même temps la fréquence orbitale et donc la fréquence du rayonnement émis ? Commentaire.

on a dit mvt. circulaire $\Rightarrow v = \omega \cdot r$ on suppose que ~~v~~ uniforme $\omega = cte$; par contre on vient de voir que $r \downarrow$ avec le temps.

Ceci implique que pour un mouvt. circulaire uniforme $|\vec{v}| = cte$

on doit avoir un $\omega \nearrow$ avec le temps pour compenser la décroissance de r.

$\Rightarrow \ddot{\theta} \neq 0$ ∴ à rayonnement.

6. Estimer cependant l'ordre de grandeur de la durée de vie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental.

Atome hydrogène $Z=1$.

on sait que le rayon orbite ē sur hydrogène est $a_0 = 0{,}5\ \text{Å} = r_0 \leftarrow$ rayon de Bohr $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e \cdot e^2}$

et que $r^3 = \frac{-6Z\, e^2 \cdot \partial \cdot t}{m} + a_0^3$

durée de vie $\Rightarrow r(t \to T) = 0$ avec T : durée de vie

$$0 = -\frac{6 \cdot 1 \cdot e^2 \cdot \partial \cdot T}{m} + a_0^3 \quad ; \quad T = \frac{m\, a_0^3}{6 \cdot e^2 \cdot \partial} = \frac{m \cdot a_0^3}{6 \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \partial}$$

On note $4\pi\varepsilon_0 = 4\pi \cdot \frac{1}{\mu_0 c^2} = 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}\, c^2}$

$\uparrow$ $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\boxed{T = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-10})^3}{6 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 6 \cdot 10^{-24}} \cdot 10^{-7} \cdot c^2} \simeq \underline{10^{-10}\ s} \simeq 0{,}1\ \text{ns}$$

temps de vie tout petit

(valeurs quasi particulier dans son des deuxs)

7. Estimer de la même façon quelle serait la durée de vie de l'atome d'hydrogène dans un état caractérisé par le nombre quantique n. Commentaire.

Hydrogène : $Z=1$

état n $\Rightarrow r = n^2 \cdot a_0 \rightarrow$ positions ē quantifiées énergies

avec $E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot E_I$; $E_I = \frac{m e^4}{2\hbar^2} = 13{,}6\,\text{eV}$.

on regarde la radiation entre deux niveaux

N.S.

au port d'un atome d'hydrogène classique ⟺ càd atomes de Rydberg au atome circulaires

Ceci demande d'avoir un n grand.

On va donc regarder la radiation entre les niveaux $n=50$ et $n=49$.

(valeur $n=50$ fixé par les expériences pour obtenir at. de Rydberg circulaire)

$$T_{50} = \frac{m\, r_{50}^3}{6 \hbar e^2}$$

$$T_{\text{radiation}} = \frac{m}{6 \hbar e^2} \cdot \left(r_{50}^3 - r_{49}^3 \right) \underset{r = n^2 a_0}{=} \frac{m \cdot a_0^3}{6 \hbar e^2} \cdot \left((50)^6 - (49)^6 \right)$$

$$T_{49} = \frac{m \cdot r_{49}^3}{6 \hbar e^2}$$

$\simeq 0{,}2\ \mathrm{s}$ valeur plus proche de la réalité.

Note : intérêts atomes Rydberg circulaires

→ très long temps de vie

→ très fort élément de matrice dipolaire

→ pas de problème avec la structure hyperfine ⟹ système à deux niveaux presque parfait.