Feuille de TD n° 1

Équations de Maxwell dans le vide et champ électromagnétique

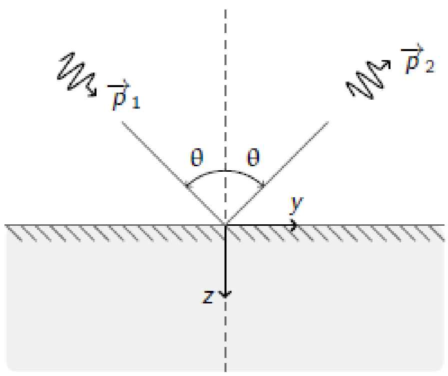
III Interprétation corpusculaire de la pression de radiation

Un faisceau cylindrique d'onde plane électromagnétique monochromatique produit par un laser à argon se propage dans le vide et rencontre un plan métallique parfaitement réfléchissant, dont la normale fait l'angle $\theta = 30\ °$ avec la direction de propagation des photons associés à l'onde.

On donne la longueur d'onde $\lambda = 0{,}515\ \mu$m et l'intensité du faisceau (puissance moyenne transportée à travers une section droite unité) $I = 90$ kW/m^2. On note E_0 l'amplitude du champ électrique.

1. Quelle est la moyenne temporelle $< u >$ de la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde ? Exprimer $< u >$ en fonction de I.
2. Calculer la densité N de photons dans le faisceau en focntion de I et de λ.
3. Quelle est la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}_0$ transférée au métal par un photon qui subit un choc élastique ?
4. Calculer le nombre x de photons reçus par le métal par unité de temps et par unité de surface.
5. En déduire la pression de radiation P en fonction de θ et de E_0.

1.4 Interprétation corpusculaire de la pression de radiation DM



$$\vec F = \frac{d\vec p}{dt}, P = \frac{F}{S} = \frac{d\vec p/dt}{S}$$

> Un faisceau cylindrique d'onde plane électromagnétique monochromatique produit par un laser à argon se propage dans le vide et rencontre un plan métallique parfaitement réfléchissant, dont la normale fait un angle de $\theta = 30°$ avec la direction de propagation des photons associés à l'onde.
> On donne la longueur d'onde $\lambda = 515$ nm et l'intensité du faisceau (puissance moyenne transportée à travers une section droite unité) $I = 90$ kW/m^2. On note E_0 l'amplitude du champ électrique.
>
> 1. Quelle est la moyenne temporelle $\langle u \rangle$ de la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde ? Exprimer $\langle u \rangle$ en fonction de I.

Onde plane monochromatique : $\vec B = \frac{\vec k \times \vec E}{\omega} = \frac{\vec u_k \times \vec E}{c} = \frac{E}{c}\vec u_B$. La densité volumique d'énergie électromagnétique u est égale à

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$
$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2}$$
$$u = \epsilon_0 E^2$$
$$\langle u \rangle_T = \left\langle \epsilon_0 E_0^2 \cos^2\left(\vec k . \vec r - \omega t\right)\right\rangle_T$$
$$\langle u \rangle_T = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

L'intensité I est par définition la puissance moyenne par unité de surface S [c]

$$\begin{aligned} I &= \frac{P_W}{S} = \frac{dE}{Sdt} \text{ où} \\ dE &= \langle u \rangle \times S \times c \times dt \\ I &= \frac{\langle u \rangle \times Scdt}{Sdt} = \langle u \rangle \times c \end{aligned}$$

2. Calculer la densité N de photons dans le faisceau en fonction de I et de λ.

Calcul de la densité N de photons dans le faisceau

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= N \times E = N \times \frac{hc}{\lambda} \\ \frac{I}{c} &= N \times \frac{hc}{\lambda} \\ N &= \frac{I\lambda}{hc^2} = \frac{9\,10^4 \times 5.15\,10^{-7}}{6.62\,10^{-34} \times (3\,10^8)^2} = 7.8\,10^{14}\,\text{photons/m}^3 \end{aligned}$$

3. Quelle la quantité de mouvement $\Delta \vec{p}_0$ transférée au métal par un photon qui subit un choc élastique.

Choc élastique $E_1 = E_2$ d'où $p_1 c = p_2 c \to p_1 = p_2 = p$. La conservation de l'impulsion se traduit par

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{p}_2 + \Delta \vec{p}_0 \\ \Delta \vec{p_0} &= \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = 2p\cos\theta\,\vec{u}_z \\ \|\Delta \vec{p}_0\| &= \frac{2h}{\lambda}\cos\theta = \frac{2 \times 6.62\,10^{-34}}{5.15\,10^{-7}}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.08\,10^{-27}\,\text{kg.m.s}^{-1} \end{aligned}$$

4. Calculer le nombre x de photons reçus par le métal par unité de temps et par unité de surface.

[c] l'intensité I est également égale à la valeur moyenne du vecteur de Poynting $I = \|\langle \vec{R} \rangle\|$ avec $\vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ et $\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$

Calcul du flux de photon par unité de surface

$$\begin{aligned} x &= \frac{N \times V_{\text{cylindre}}}{S_{\text{projetée}} \times dt} \text{ où } S_{\text{projetée}} = S_{\text{cylindre}} / \cos\theta \\ &= \frac{N \times S_{\text{cylindre}} \times \cos\theta cdt}{S_{\text{cylindre}} \times dt} \\ &= Nc\cos\theta = \frac{I\lambda}{hc}\cos\theta \\ &= \frac{9\,10^4 \times 5.15\,10^{-7}}{6.62\,10^{-34} \times 3\,10^8}\cos 30 = 2\,10^{23}\,\text{photon.m}^{-2}.\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

5. En déduire la pression de radiation P en fonction de θ et de E_0.

Calcul de la pression de radiation

$$\begin{aligned}
P &= \frac{d\vec{p}}{Sdt} = x \cdot \Delta p_0 \\
&= \frac{I\lambda}{hc}\cos\theta \times \frac{2h}{\lambda}\cos\theta \\
&= \frac{2I\cos^2\theta}{c} = \frac{2\times 9\,10^4 \times \cos^2 30}{3\,10^8} = 4.5\,10^{-4}\,\mathrm{N/m^2} \\
&\text{avec } I = \frac{\epsilon_0 E_0^2 c}{2}, P = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2\theta
\end{aligned}$$

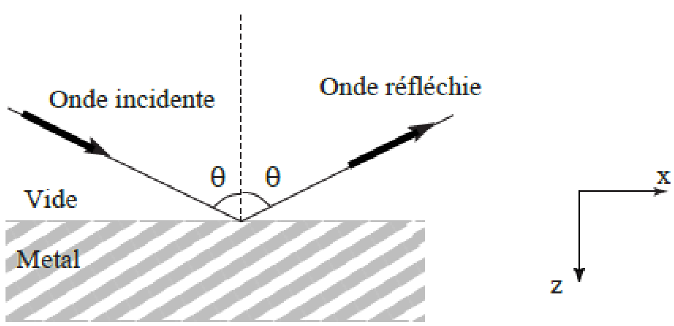
Application expérimentale: La pression de radiation aussi faible soit elle, est un bruit important pour les interféromètres de haute sensibilité tels que Virgo (*cf.* http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00175254/en/).

Réflexion d'onde en incidence oblique sur un conducteur parfait

On considère une surface plane séparant le vide d'un conducteur métallique parfait. Une onde plane électromagnétique incidente se propage dans le vide. Son champ électrique en $M(x, y, z)$ à l'instant t est :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}_i.\mathbf{r} - \omega t) \tag{1}$$

Cette onde rencontre le métal sous l'angle d'incidence θ et se réfléchit. Le plan Oxz est choisi de façon à contenir le vecteur d'onde incident $\mathbf{k}_i$. On prend l'origine O sur la surface du métal. L'onde incidente est polarisée rectilignement et perpendiculairement au plan d'incidence ($\mathbf{E}_i \perp (Oxz)$)



1. Déterminer les champs $(\mathbf{E}_i, \mathbf{B}_i)$ de l'onde incidente et $(\mathbf{E}_r, \mathbf{B}_r)$ de l'onde réfléchie.
2. Déterminer les champs $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ de l'onde résultante dans le vide.
3. Quelle est la vitesse de phase v_ϕ de l'onde résultante ?
4. Que deviennent $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ au voisinage immédiat de la surface du métal ?
5. Déterminer les densités surfaciques de charge σ et de courant $\mathbf{j}_s$ sur la surface métallique.
6. Quelle est la pression de radiation moyenne de l'onde sur le métal ? L'exprimer en fonction de l'intensité incidente.
7. Calculer les vecteurs de poynting incident et réfléchit. A quel flux de photon cela correspond-il ? Retrouver la pression de radiation à partir de l'échange de quantité de mouvement entre ces photons et la paroi.

7.1 Réflexion d'onde en incidence oblique sur un conducteur parfait

On considère une surface plane séparant le vide d'un conducteur métallique parfait. Une onde plane électromagnétique incidente se propage dans le vide. Son champ électrique en $M(x, y, z)$ à l'instant t est :

$$\vec{E_i} = \vec{E_0}\cos(\vec{k_i}.\vec{r} - \omega t)$$

Cette onde rencontre le métal sous l'angle d'incidence θ et se réfléchit. Le plan Oxz est choisi de façon à contenir le vecteur d'onde incident $\vec{k_i}$. On prend l'origine O sur la surface du métal. L'onde incidente est polarisée rectilignement et perpendiculairement au plan d'incidence ($\vec{E_i} \perp Oxz$).

1. Déterminer les champs $(\vec{E_i}, \vec{B_i})$ de l'onde incidente et $(\vec{E_r}, \vec{B_r})$ de l'onde réfléchie.

1. L'onde plane incidente est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$ soit le champ électrique

$$\vec{E_i} = E_0 \cos(\vec{k_i}.\vec{r} - \omega t)\,\vec{u}_y$$

Le fait que l'onde incidente soit plane, le champ magnétique se déduit de l'expression suivante

$$\begin{aligned}\vec{B_i} &= \frac{\vec{k_i} \times \vec{E_i}}{\omega}\\ &= \frac{1}{\omega}\left|\begin{array}{l} k_{ix}\\ 0\\ k_{iz}\end{array}\right. \times \left|\begin{array}{l} 0\\ E_i\\ 0\end{array}\right. = \frac{1}{\omega}\left|\begin{array}{l} -k_{iz}E_i\\ 0\\ k_{ix}E_i\end{array}\right.\end{aligned}$$

avec $k_{ix} = k_i \sin\theta$ et $k_{iz} = k_i\cos\theta$. La propagation se faisant dans le vide, la norme du vecteur d'onde est en outre égale à $\frac{\omega}{c}$. L'expression de $\vec{B_i}$ devient

$$\vec{B_i} = \frac{E_0}{c}\cos(\vec{k_i}.\vec{r} - \omega t)\,(-\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_z})$$

Afin de déterminer l'expression du champ électrique de l'onde réfléchie, on applique les relations de passage à l'interface vide/métal au point O *i.e.* en $\vec{r} = \vec{0}$. Le métal étant un conducteur parfait, la conservation de la composante tangentielle du champ électrique implique que le champ électrique de l'onde réfléchie demeure polarisé selon $\vec{u_y}$. On obtient donc la relation suivante

$$\begin{aligned}\left(\vec{E_i} + \vec{E_r} - \cancel{\vec{E}_{\text{métal}}}\right)\Big|_{\vec{r}=\vec{0}} \times \vec{u_z} &= \vec{0}\\ \vec{E_r}(\vec{r} = \vec{0}, t) &= -\vec{E_i}(\vec{r} = \vec{0}, t)\\ \vec{E_{0r}} &= -\vec{E_{0i}}\end{aligned}$$

Le champ électrique réfléchi s'écrit en tout point de l'espace et du temps

$$\vec{E_r} = -E_{0i}\cos(\vec{k_r}.\vec{r} - \omega t)\vec{u_y}$$

De la même façon que pour l'onde incidente, le champ magnétique associé à l'onde réfléchie s'exprime

$$\vec{B_r} = \frac{\vec{k_r} \times \vec{E_r}}{\omega}$$

avec $\vec{k_r} = k\,(\sin\theta\vec{u_x} - \cos\theta\vec{u_z})$ et $k = \frac{\omega}{c}$ (la longueur d'onde n'est pas modifiée lors de la réflexion – *cf.* exercice "Réflexion totale et onde évanescente" – la norme du vecteur d'onde $\vec{k_r}$ est égale à la norme du vecteur d'onde $\vec{k_i}$). Le champ magnétique s'écrit donc

$$\vec{B_r} = \frac{E_0}{c}\cos(\vec{k_r}.\vec{r} - \omega t)\,(-\cos\theta\,\vec{u_x} - \sin\theta\,\vec{u_z})$$

2. Déterminer les champs $(\vec{E}, \vec{B})$ de l'onde résultante dans le vide.

2. Le champ électrique résultant s'exprime comme la superposition des champs électriques incident et réfléchi soit

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E_i} + \vec{E_r} \\
&= \vec{E_0}\left(\cos(\vec{k_i}.\vec{r} - \omega t) - \cos(\vec{k_r}.\vec{r} - \omega t)\right) \\
&= \vec{E_0}\,\mathrm{Re}\left(e^{i(\vec{k_i}.\vec{r} - \omega t)} - e^{i(\vec{k_r}.\vec{r} - \omega t)}\right) \\
&= \vec{E_0}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}\left(e^{i(kx\sin\theta + kz\cos\theta)} - e^{i(kx\sin\theta - kz\cos\theta)}\right)\right) \\
&= \vec{E_0}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i(\omega t - kx\sin\theta)}\left(e^{ikz\cos\theta} - e^{-ikz\cos\theta}\right)\right) \\
&= \vec{E_0}\,\mathrm{Re}\left(e^{-i(\omega t - kx\sin\theta)} \times 2i\sin(kz\cos\theta)\right) \\
&= 2\vec{E_0}\left(\sin(\omega t - kx\sin\theta)\sin(kz\cos\theta)\right) \\
&= -2E_0\sin(kx\sin\theta - \omega t)\sin(kz\cos\theta)\,\vec{u_y}
\end{aligned}
$$

Le champ magnétique résultant s'écrit

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{B_i} + \vec{B_r} \\
&= \frac{E_0}{c}\Big[-\cos\theta\,\vec{u_x}\left(\cos(\vec{k_i}.\vec{r} - \omega t) + \cos(\vec{k_r}.\vec{r} - \omega t)\right) \\
&\qquad + \sin\theta\,\vec{u_z}\left(\cos(\vec{k_i}.\vec{r} - \omega t) - \cos(\vec{k_r}.\vec{r} - \omega t)\right)\Big] \\
&= -2\frac{E_0}{c}\Big[\cos\theta\cos(kx\sin\theta - \omega t)\cos(kz\cos\theta)\,\vec{u_x} \\
&\qquad + \sin\theta\sin(kx\sin\theta - \omega t)\sin(kz\cos\theta)\,\vec{u_z}\Big]
\end{aligned}
$$

3. Quelle est la vitesse de phase v_ϕ de l'onde résultante ?

3. La phase ϕ de l'onde résultante est égale à $kx\sin\theta - \omega t$. La vitesse de phase est le rapport entre la pulsation ω et la norme du vecteur d'onde *i.e.* $k\sin\theta$ dans le cas présent. Sachant que $\frac{\omega}{k}$ est égal à c (propagation dans le vide), la vitesse de phase devient

$$v_\phi = \frac{\omega}{k\sin\theta} = \frac{c}{\sin\theta}$$

4. Que deviennent $\vec{E}$ et $\vec{B}$ au voisinage immédiat de la surface du métal ?

4. Au voisinage de la surface du métal $z \to 0$ et donc $\vec{E} \to \vec{0}$ tandis que $\vec{B} \to -2\frac{E_0}{c}\cos\theta\cos(kx\sin\theta - \omega t)\,\vec{u_x}$

5. Déterminer les densités surfaciques de charge σ et de courant $\vec{j_S}$ sur la surface métallique.

5. Afin de déterminer la densité surfacique de charge σ, on utilise le fait que la composante normale du champ électrique est discontinue soit

$$\vec{u_z}.\left(\vec{E} - \vec{E}_{\text{métal}}\right)\Big|_{\text{surface}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

or $\vec{E} \to \vec{0}$ à la surface du métal et $\vec{E}_{\text{métal}} = \vec{0}$, la densité surfacique de charge σ est nulle.

La densité surfacique de courant $\vec{j_S}$ se déduit de la relation de discontinuïté de la composante tangentielle du champ magnétique soit

$$
\begin{aligned}
\vec{u_z} \times \left(\cancel{\vec{B}_{\text{métal}}} - \vec{B}\right)\Big|_{\text{surface}} &= \mu_0\vec{j_S} \\
\vec{j_S} &= \frac{2E_0\cos\theta}{\mu_0 c}\cos(kx\sin\theta - \omega t)\,\vec{u_y}
\end{aligned}
$$

6. Quelle est la pression de radiation moyenne de l'onde sur le métal ? L'exprimer en fonction de l'intensité incidente.

6. La pression de radiation P s'exprime en fonction de l'angle d'incidence θ et de l'intensité I par la relation (*cf.* devoir "Interprétation corpusculaire de la pression de radiation")

$$P = 2\frac{I}{c}\cos^2\theta$$

Par ailleurs, le rapport $\frac{I}{c}$ étant égal à la moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique $\langle u_{\text{EM}}\rangle$ soit

$$\begin{aligned}
\frac{I}{c} &= \langle u_{\text{EM}}\rangle \\
&= \cancel{\frac{\epsilon_0\langle E^2_{\text{surface}}\rangle}{2}} + \frac{\langle B^2_{\text{surface}}\rangle}{2\mu_0} \\
&= \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2\theta \\
P &= 2\epsilon_0 E_0^2\cos^4\theta
\end{aligned}$$

Solution question 6 : La force de Laplace est $F = \int dV\,\mathbf{j}\times\mathbf{B}$. Ici $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s$ est surfacique donc sa dépendance en z est $\delta(z)$ et on obtient que la force par unité de surface est :

$$dF = \frac{1}{2}\mathbf{j}_s \times \mathbf{B} \tag{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0\cos\theta}{\mu_0 c}\cos(kx\sin\theta-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-2E_0}{c}\cos\theta\cos(kx\sin\theta-\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\epsilon_0 E_0^2\cos^2\theta\cos^2(kx\sin\theta-\omega t \end{pmatrix} \tag{4}$$

soit en moyenne dans le temps $P = \epsilon_0 E_0^2\cos^2\theta$

Solution de la question 7 : La solution est la même qu'à l'exercice "Interprétation corpusculaire de la pression de radiation". On trouve exatement la même expression en comptant le nombre de photons par seconde et par m^2, et en considérant qu'ils échangent chacun la quantité de mouvement $\frac{2h}{\lambda}\cos\theta$ avec la paroi.

Solution à faire en tenant compte des vecteurs de Poynting