

Feuille de TD n° 3: La méthode de séparation des variables

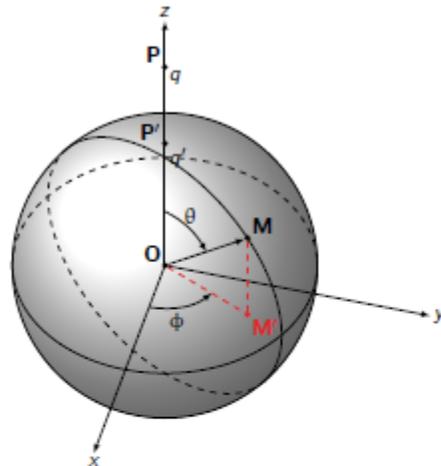
Exercice 1 : Zangwill 203-205

Exercice 2 : Zangwill 219

Exercice 3 : Zangwill 210-211

Feuille de TD n° 4: La méthode des images en électrostatique

2.3 Boule conductrice en présence d'une charge ponctuelle : méthode des images



Soit une boule conductrice, de centre O , de rayon R . On place une charge q sur l'axe Oz au point P . On étudiera le potentiel et le champ créés par cette charge.

1. On impose le potentiel $V = 0$ en un point de la surface de la boule.
 - a) Quel est le potentiel dans l'ensemble de la boule ? Par des considérations de symétrie, simplifier l'expression du champ électrostatique \vec{E} (direction et dépendance des composantes par rapport aux différentes coordonnées). Quel système de coordonnées a-t-on intérêt à adopter ?
 - b) Montrer qu'il est possible d'obtenir $V = 0$ sur la surface de la boule de

centre O et de rayon R dans le vide en remplaçant la boule conductrice par une deuxième charge q' sur l'axe Oz , en plus de la charge q initiale. Que vaut $V(\infty)$? Déterminer la valeur et la position de q' .

- c) Rappeler l'équation de Poisson. Quelles sont les conditions aux limites imposées par la boule ? En déduire que pour $r > R$, le champ créé par la charge q en présence de la boule est le même que celui créé par les charges q et q' .
- d) Calculer \vec{E} au voisinage de la sphère. Rappeler les conditions de continuité à la traversée d'une surface chargée. En déduire la densité surfacique de charges portée par la surface de la boule conductrice.
- e) Calculer la charge totale portée par la boule conductrice. En utilisant le théorème de Gauss, montrer que le résultat était prévisible.
- f) Calculer la force qu'exerce la charge q sur la sphère conductrice.

1. a) L'absence de charges libres dans le volume d'un conducteur (les charges sont surfaciques) implique que le champ électrique \vec{E}_{int} soit nul (théorème de Gauss). Le potentiel électrique V_{int} , déduit de $\vec{E}_{\text{int}} = -\text{grad} V_{\text{int}}$ est par conséquent constant. $V_{\text{int}}(r = R)$ étant par ailleurs nul

$$V_{\text{int}} = V(r \leq R) = 0$$

Le problème est invariant par rotation autour de l'axe Oz et le plan (\vec{u}_r, \vec{u}_z) est plan de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrostatique \vec{E} exprimé dans le système de coordonnées cylindriques $M = (r, \theta, z)$, a donc pour expression

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{u}_r + E_z(r, z)\vec{u}_z$$

- b) En raison de la symétrie du problème, une charge fictive q' est nécessairement sur l'axe Oz . Le potentiel alors généré en tout point M de l'espace est la somme des potentiels induits par chaque particule soit

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{PM} + \frac{q'}{P'M} \right)$$

où P' est la position de la charge q' . Le potentiel pour $r \rightarrow \infty$ est nul : $V(\infty) = 0$. La condition selon laquelle le potentiel est nul en tout point M de la surface de la sphère implique

$$\frac{q}{PM} = -\frac{q'}{P'M}$$

q' est donc de signe opposé à q . Par suite, on déduit que

$$\begin{aligned} q P'M &= -q' PM \\ q^2 P'M^2 &= q'^2 PM^2 \\ q^2 \overrightarrow{P'M}^2 &= q'^2 \overrightarrow{PM}^2 \\ q^2 (\overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{OM})^2 &= q'^2 (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM})^2 \\ \underbrace{q^2 P'O^2 - q'^2 PO^2 + q^2 R^2 - q'^2 R^2}_{\textcircled{1}} &= \underbrace{q'^2 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} - q'^2 2\overrightarrow{P'O} \cdot \overrightarrow{OM}}_{\textcircled{2}} \end{aligned}$$

Le premier membre de l'équation est indépendant de M et est donc constant. Le second membre dépend de M mais doit demeurer constant pour tout M appartenant à la surface de la sphère. Cette égalité est ainsi vérifiée pour $M(r, \theta, z = 0)$ soit $\overrightarrow{OM} \perp \vec{u}_z$. On obtient $\textcircled{1} = \textcircled{2} = 0$ et on déduit

$$\begin{aligned} \textcircled{2} = 0 &= 2\overrightarrow{OM} \cdot (q'^2 \overrightarrow{PO} - q^2 \overrightarrow{P'O}) \\ \overrightarrow{P'O} &= \frac{q'^2}{q^2} \overrightarrow{PO} \parallel \vec{u}_z \end{aligned}$$

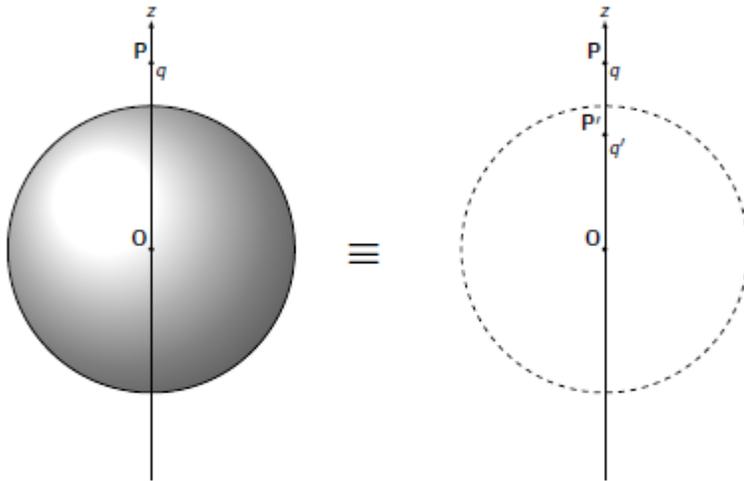
À partir du premier membre $\textcircled{1}$, on déduit

$$\begin{aligned} \textcircled{1} = 0 &= q^2 P'O^2 - q'^2 PO^2 + q^2 R^2 - q'^2 R^2 \\ R^2 (q^2 - q'^2) &= q^2 P'O^2 - q'^2 PO^2 \\ &= q^2 \times \frac{q'^4}{q^4} PO^2 - q'^2 PO^2 \\ &= q'^2 PO^2 \left(\frac{q^2}{q'^2} - 1 \right) \\ R^2 &= PO^2 \times \left(\frac{q'}{q} \right)^2 \\ q' &= -\frac{qR}{PO} \\ P'O &= \frac{R^2}{PO} \leq R \end{aligned}$$

- c) À partir de l'équation locale $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et de l'expression du potentiel électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, on obtient l'équation de Poisson

$$\begin{aligned} -\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}}V) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ -\Delta V &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} &= 0 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites imposées par la boule sont que le potentiel électrique en tout point de la surface soit nul $V(r = R) = 0$. Pour tout point $r > R$, le problème "charge q + boule conductrice" est équivalent à la situation "charge q + charge q' " du fait que les deux situations obéissent à la même équation de Poisson et satisfont aux mêmes conditions aux limites $V(r = R) = 0$. Le théorème d'unicité implique donc les mêmes solutions pour chacune des représentations. Cette équivalence n'est vraie que pour $r > R$ car à l'intérieur de la boule le champ électrostatique demeure nul ce qui n'est pas le cas dans la situation "charge q + charge q' ".



- d) Calcul du champ $\vec{E}(r \geq R)$: combinaison des champs coulombiens de chacune des charges q et q'

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{PM^3} \vec{PM} + \frac{q'}{P'M^3} \vec{P'M} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{q}{PM^3} + \frac{q'}{P'M^3} \right) \vec{OM} + \underbrace{\frac{q\vec{PO}}{PM^3} + \frac{q'\vec{P'O}}{P'M^3}}_{\textcircled{1}} \right] \end{aligned}$$

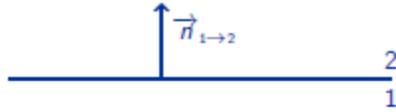
Sachant que $\vec{P'O} = \frac{q^2}{q'} \vec{PO}$ et $P'M = -\frac{q'}{q} PM$, l'expression $\textcircled{1}$ devient

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \frac{q\vec{PO}}{PM^3} + \frac{q'\vec{P'O}}{P'M^3} \\ &= \frac{q\vec{PO}}{PM^3} + \frac{q' \times q^2}{q^2} \times \frac{\vec{PO}}{-q^3} \times \frac{q^3}{PM^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

soit pour $M \in$ sphère

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{R\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{PM^3} + \frac{q'}{P'M^3} \right) \\ &= \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \times \left(1 - \frac{q^2}{q^2} \right) \\ &= \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \times \left(1 - \frac{PO^2}{R^2} \right) \end{aligned}$$

Conditions de continuité du champ électrique au passage d'une surface



$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \text{discontinuité de la composante normale}$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \rightarrow \text{continuité de la composante tangentielle}$$

Étant donné que $\vec{E}_{\text{int.}} = \vec{E}_1 = \vec{0}$, la densité surfacique de charge est égale à

$$\begin{aligned} \vec{E}(M \in \text{sphère}) &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r \\ \sigma &= \frac{qR}{4\pi} \left(1 - \frac{PO^2}{R^2}\right) \times \frac{1}{PM^3} \end{aligned}$$

e) La charge totale $Q_{\text{tot.}}$ de la boule conductrice est donc

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot.}} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \times R^2 \sin \theta \times \sigma(\theta) \\ &= \frac{2\pi qR^3}{4\pi R^2} (R^2 - PO^2) \times \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{PM^3} \\ &\text{avec } PM^2 = PO^2 + OM^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OM} = PO^2 + R^2 - 2R PO \cos \theta \\ Q_{\text{tot.}} &= \frac{qR(R^2 - PO^2)}{2} \times \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(PO^2 + R^2 - 2R PO \cos \theta)^{3/2}}}_{\textcircled{1}} \end{aligned}$$

Pour calculer $\textcircled{1}$, on pose $x = \cos \theta$ avec $x \in [1, -1]$ et $dx = -\sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_1^{-1} \frac{-dx}{(PO^2 + R^2 - 2R PO x)^{3/2}} \\ \text{or } \int \frac{dx}{(b + ax)^{3/2}} &= \frac{1}{(b + ax)^{1/2}} \times -\frac{2}{a} \\ \textcircled{1} &= \frac{1}{R PO} \left(\frac{1}{\sqrt{PO^2 + R^2 - 2R PO}} - \frac{1}{\sqrt{PO^2 + R^2 + 2R PO}} \right) \\ &= \frac{1}{R PO} \left(\frac{1}{PO - R} - \frac{1}{PO + R} \right) \\ &= \frac{1}{R PO} \left(\frac{2R}{PO^2 - R^2} \right) \end{aligned}$$

Finalement $Q_{\text{tot.}}$ devient

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot.}} &= \frac{qR(R^2 - PO^2)}{2} \times \frac{1}{R PO} \times \frac{2R}{PO^2 - R^2} \\ &= -\frac{qR}{PO} = q' \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss impose que $Q_{\text{tot.}}$ soit égal à la somme des charges à l'intérieur de la sphère. La charge fictive q' est par construction à l'intérieur de la sphère d'où $Q_{\text{tot.}} = q'$.

- f) Calcul de la force exercée par la charge q sur $q' \equiv$ à calculer la force exercée par la charge q sur la boule conductrice.

$$\begin{aligned}\vec{F}_{q \rightarrow q'} &= \vec{F}_{q \rightarrow \text{boule}} \\ &= q' \vec{E}_{q \rightarrow q'} \\ &= \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{PP}'}{PP'^3} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{-\vec{u}_z}{PP'^2} \\ \text{avec } PP'^2 &= (PO - OP')^2 = \left(PO - \frac{R^2}{PO}\right)^2 = \frac{(PO^2 - R^2)^2}{PO^2} \\ \vec{F}_{q \rightarrow \text{boule}} &= -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{PO^2}{(PO^2 - R^2)^2} \vec{u}_z \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{RPO}{(PO^2 - R^2)^2} \vec{u}_z\end{aligned}$$

2. La boule conductrice est maintenant au potentiel $V_0 \neq 0$

- a) En utilisant le principe de superposition, montrer qu'on peut vérifier les nouvelles conditions aux limites en ajoutant une troisième charge q'' . Déterminer la position de q'' et sa valeur.

- b) Calculer la charge totale Q portée par la boule conductrice. Sachant que $Q = 0$, déterminer V_0 en présence de la charge q .

2. a) Le principe de superposition implique

$$V(M) = V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{PM} + \underbrace{\frac{q'}{P'M}}_{=0} + \frac{q''}{P''M} \right)$$

soit

$$q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 \times P''M = \text{constante}$$

impliquant que $P'' \equiv O$ et donc $q'' = 4\pi\epsilon_0 R V_0$

- b) Les charges fictives/virtuelles q' et q'' sont à l'intérieur de la boule conductrice d'où $Q_{\text{boule}} = q' + q'' = 0$. La charge q'' est ainsi égale à $-q' = \frac{qR}{PO}$ soit un potentiel V_0 égal à

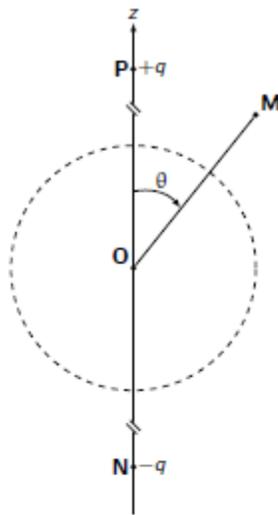
$$\begin{aligned}4\pi\epsilon_0 R V_0 &= -q' = \frac{qR}{PO} \\ V_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{PO}\end{aligned}$$

i.e. le potentiel généré en O par la particule q .

3. On place une boule conductrice dans un champ uniforme créé par deux charges $+q$ et $-q$ respectivement placées en $+Z$ et $-Z$, où $Z \gg R$.

- Déterminer le champ \vec{E} créé par $+q$ et $-q$ en l'absence de la boule conductrice. Montrer qu'au 1^{er} ordre, \vec{E} peut être considéré comme uniforme sur le volume de la boule.
- Calculer la densité surfacique de charge σ qui apparaît sur la boule conductrice en présence de $+q$ et $-q$. Le champ reste-t-il uniforme au voisinage de la boule ?
- En déduire le champ créé à l'intérieur d'une sphère de rayon R , portant la densité surfacique de charge $\sigma_0 \cos \theta$.
- Enfin on suppose que la boule est coupée en deux par le plan xOy . Elle est toujours soumise à un champ électrostatique uniforme. Calculer la force qui s'exerce sur chacun des hémisphères en utilisant la pression électrostatique.

3. Boule conductrice dans un champ électrostatique uniforme



a) Les champs électrostatiques créés par chaque charge se superposent en M

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{PM^3} \vec{PM} - \frac{q}{NM^3} \vec{NM} \right)$$

avec $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}$

$$PM^3 = \left(Z^2 + r^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OM} \right)^{3/2}$$

$$PM^3 = Z^3 \left(1 - 2\frac{r}{Z} \cos \theta + \frac{r^2}{Z^2} \right)^{3/2}$$

Pour $r \leq R$, l'expression de la longueur PM devient au premier ordre en $\frac{r}{Z}$ ($Z \gg R$)

$$PM^3 \simeq Z^3 \left(1 - 2\frac{r}{Z} \cos \theta \right)^{3/2}$$

$$\frac{1}{PM^3} \simeq \frac{1}{Z^3} \left(1 + 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right)$$

De même

$$\frac{1}{NM^3} \simeq \frac{1}{Z^3} \left(1 - 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right)$$

Le champ électrique au voisinage de la boule conductrice devient

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(r \leq R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{Z^3} \times \left[\vec{OM} \left(1 + 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right) - \vec{OM} \left(1 - 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \vec{PO} \left(1 + 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right) - \vec{NO} \left(1 - 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{Z^3} \times \left[6\frac{r}{Z} \left(\alpha \frac{r^2}{Z^2} \ll 1 \right) \cos \theta \vec{u}_r \right. \\
 &\quad \left. + \vec{PO} \left(1 + 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right) - \vec{NO} \left(1 - 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{Z^3} \times \left[\vec{PO} \left(1 + 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right) - \vec{NO} \left(1 - 3\frac{r}{Z} \cos \theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{Z^3} \vec{PN} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2q}{Z^2} \vec{u}_z \rightarrow \text{champ électrique constant pour } r \leq R
 \end{aligned}$$

Le champ ainsi généré correspond au champ électrique généré par un dipôle électrique $\vec{p} = q\vec{NP}$ (où la charge q est en P et la charge $-q$ est en N , cf. Cours Chapitre 2, page 44).

- b) Nous avons établi à la question 1.d) qu'en présence d'une charge ponctuelle q , la densité surfacique de charge était

$$\sigma = \frac{q}{4\pi} \times \frac{R^2 - PO^2}{R} \times \frac{1}{PM^3}$$

où P est la position de la charge q et M est un point situé à la surface de la boule. On déduit ainsi que la charge $+q$ génère une densité surfacique

$$\sigma_+ = \frac{q}{4\pi} \times \frac{R^2 - PO^2}{R} \times \frac{1}{PM^3}$$

tandis que la charge $-q$ placée en N implique une densité surfacique

$$\sigma_- = \frac{-q}{4\pi} \times \frac{R^2 - NO^2}{R} \times \frac{1}{NM^3}$$

En ne considérant toujours que le premier ordre en $\frac{R}{Z}$, on obtient une densité surfacique totale

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{totale}} &= \sigma_+ + \sigma_- \\
 &\simeq \frac{q \times (R^2 - Z^2)}{4\pi R} \times \frac{1}{Z^3} \left(1 + \frac{3R}{Z} \cos \theta - 1 + \frac{3R}{Z} \cos \theta \right) \\
 &\text{avec } R^2 - Z^2 = Z^2 \left(-1 + \frac{R^2}{Z^2} \right) \simeq -Z^2 \\
 &\simeq -\frac{3q}{2\pi Z^2} \cos \theta
 \end{aligned}$$

Le champ électrique au voisinage de la surface de la boule n'est plus uniforme du fait de la présence de charge en surface de cette boule.

c) Le champ dipolaire électrique s'écrit

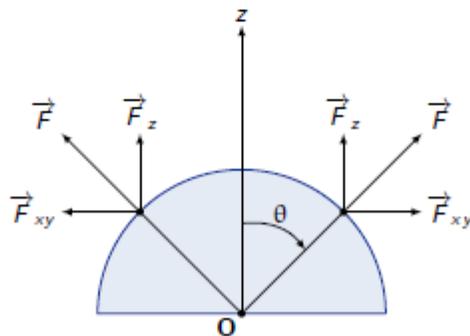
$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{dipôle}} &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 Z^2} \vec{u}_z \\ &= \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_z \\ \text{où } \sigma_{\text{totale}} &= -\frac{3q}{2\pi Z^2} \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta\end{aligned}$$

Le champ électrique à l'intérieur de la boule conductrice demeurant nul, on déduit que le champ électrique \vec{E}_σ créée par la densité surfacique de charge σ_{totale} s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{int.}} &= \vec{0} = \vec{E}_{\text{dipôle}} + \vec{E}_\sigma \\ \vec{E}_\sigma &= -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_z\end{aligned}$$

d) La pression électrostatique P est égale à $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$. C'est par ailleurs, la force électrostatique par unité de surface $P = \frac{d\vec{F}}{dS}$. La force exercée sur l'hémisphère supérieure est ainsi

$$\begin{aligned}d\vec{F}_1 &= \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S} \\ \vec{F}_1 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sigma_0^2}{2\epsilon_0} \cos^2\theta R^2 \sin\theta \vec{u}_r\end{aligned}$$



Seule la composante suivant \vec{u}_z de la force est non nulle soit en remplaçant $\vec{u}_r = \vec{u}_z \cos\theta$, la force \vec{F}_1 devient

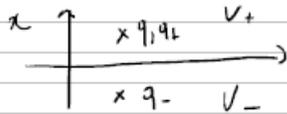
$$\vec{F}_1 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sigma_0^2}{2\epsilon_0} \cos^3\theta R^2 \sin\theta \vec{u}_z$$

En procédant au changement de variable $x = \cos\theta$ avec $x \in [1, 0]$ et $dx = -\sin\theta d\theta$

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= 2\pi \frac{\sigma_0^2}{2\epsilon_0} R^2 \int_0^1 x^3 dx \vec{u}_z \\ &= \frac{\pi R^2 \sigma_0^2}{\epsilon_0} \times \frac{1}{4} \vec{u}_z \\ &= \frac{\pi R^2 \sigma_0^2}{4\epsilon_0} \vec{u}_z = \frac{\pi R^2}{4\epsilon_0} \times \frac{9q^2}{4\pi^2 Z^4} \vec{u}_z \\ \vec{F}_2 &= -\vec{F}_1 = -\frac{\pi R^2 \sigma_0^2}{4\epsilon_0} \vec{u}_z\end{aligned}$$

Exercice 2 : Exam janvier 2024

1^{er} modèle.



1) E_T const.

$$D_N \text{ const.} \Leftrightarrow \epsilon E_{+N} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_{-N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial V_+}{\partial x} = \epsilon_1 \frac{\partial V_-}{\partial x}$$

V est continu à l'interface.

$$2) V_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_-}{4\pi\epsilon_- \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}$$

$$3) V_- = \frac{q_+}{4\pi\epsilon_+ \epsilon_1 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}}$$

4) En $x=0$ $V_+ = V_-$

$$\frac{q}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_-}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q_+}{\epsilon_1 (d^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\boxed{q + q_- = \frac{q_+}{\epsilon_1}}$$

$$\frac{\partial V_+}{\partial x} = \epsilon_1 \frac{\partial V_-}{\partial x} \text{ en } x=0.$$

$$q \left(\frac{-d}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} \right) + q_- \left(\frac{+d}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right) = \left(q_+ \frac{(-d)}{\epsilon_1} \right) \epsilon_1$$

$$\boxed{q - q_- = +q_+}$$

$$d'au \quad 2q = \left(\frac{1}{\epsilon_1} + 1 \right) q_+ = \frac{1 + \epsilon_1}{\epsilon_1} q_+$$

$$\boxed{q_+ = \frac{2\epsilon_1}{1 + \epsilon_1} q}$$

$$\boxed{q_- = \frac{-2\epsilon_1 + (1 + \epsilon_1)}{1 + \epsilon_1} q = \frac{1 - \epsilon_1}{1 + \epsilon_1} q}$$

On a donc $\Delta V = \frac{q}{\epsilon_0}$ pour $x > 0$

$$\Delta V = 0 \quad \text{pour } x < 0$$

donc $\Delta V = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_1}$ dans tout l'espace.

De plus, pour $x \rightarrow \infty$, on a bien

$$V \rightarrow 0$$

à l'interface $x=0$, V et $\frac{\partial V}{\partial x}$ vérifient les conditions de passage.

On a une seule $\Delta V = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_1}$ vérifiant les conditions aux limites. On a donc

la solution.